определить функцию $p^{i,j+\frac{1}{2}}$, компенсирующую на сечении S_i главную часть силы F_r. Поэтому очень полезно перед началом итерационного процесса по расчету $V_r^{i,j+1}$ и $V_\eta^{i,j+1}$ формировать на сечении S_i значение $p^{i,0}$ как решение уравнения

$$\frac{\partial p^{i,0}}{\partial r} = \rho F_r . \qquad (38)$$

Найденное из уравнения (38) с точностью до константы первое приближение для p позволяет проводить устойчивые вычисления V_r и V_η на S_i при достаточно большом шаге по ψ.

На основании рассмотренного алгоритма был проведен ряд вычислительных экспериментов, позволивших определить оптимальные размеры сечения винтового канала теплообменника, обеспечивающие максимальный теплообмен с охлаждаемой частью ротора криогенного турбогенератора.

Литература

I. Петухов Б.С. Теплообмен и сопротивление при ламинарном течении жидкости в трубах. - М.: Энергия. 1967.
2. Кочин Н.Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. - М.: Наука, 1965.

УДК 519.25

Б.Ю.Лемешко

ОБ ОЦЕНИВАНИИ ПО ЧАСТИЧНО ГРУППИРОВАННЫМ ВЫБОРКАМ ПАРАМЕТРОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЭРЛАНГА

Получены условия существования и единственности оценок максимального правдоподобия параметра распределения Эрланга h -го порядка по частично группированным выборкам. Решается задача асимптотически оптимального группирования при оценивании и проверке гипотез.

В практике обработки экспериментальных наблюдений зачастую приходится сталкиваться с задачами оценивания параметров распределений по группированным или цензурированным выборкам. Наиболее общим случаем является частично группированная выборка. Естественно, что различным образом группирование данных сопровождается неизбежной потерей информации об оцениваемых параметрах. Однако применение его оказывается оправданным, так как вызывается условиями проведения экспериментальных исследований или объясняется необходимостью сжатия больших объемов информации и удобством обработки данных.

Наиболее распространенным методом оценивания параметров по частично группированным данным является метод максимального правдоподобия. При решении уравнений правдоподобия, особенно по группированным данным, приходится останавливаться на таких вопросах, как существование решения, его единственность, обращает ли это решение в максимум функцию правдоподобия. Проверка условий существования и единственности позволяет отказаться от трудоемкого и бесполезного процесса вычисления оценки, если она не существует. При экспериментальных исследованиях, например, надежности, знание условий существования и единственности дает возможность принять решение о прекращении эксперимента или его продолжении, если по полученным данным нельзя найти оценку параметра.

Г.Куллдорфом [I] рассмотрены условия существования и единственности оценок максимального правдоподобия ОМП по группированным или частично группированным выборкам для параметров экспоненциального и нормального распределений. Н.А.Бодиным [2] уточнены результаты Куллдорфа по условиям существования и единственности ОМП неизвестного параметра и распространены на многомерный случай. Ряд результатов по условиям существования и единственности ОМП по группированным и частично группированным выборкам содержится в работах [3 - 6]. Нами рассматриваются условия существования и единственности ОМП параметров распределения Эрланга с функцией плотности

$$f(x,\theta)=\frac{\theta^{n}}{\Gamma(n)}\, x^{n-1} e^{-\theta x},$$

Задача оценивания неизвестного параметра по частично группированной выборке формулируется следующим образом. Пусть непрерывная случайная величина распределена на множестве $\mathscr{X}$ с функцией распределения $f(x,\theta)$, где θ – неизвестный параметр, определенный на открытой области Ω. Множество $\mathscr{X}$ разбито на k интервалов $R_i=(x_{i-1},x_i]$, $i=\overline{1,k}$, граничными точками

$$x_0 < x_1 < x_2 < \dots, x_{k-1} < x_k,$$

где $x_0=\inf \mathscr{X}$, $x_k=\sup \mathscr{X}$. Предполагается что всегда $k \geq 2$. Пусть N величина выборки, n_i – число наблюдений, попавших в i-й интервал, $\sum_{i=1}^{k} n_i = N$. Индивидуальные значения наблюдений, попавших в i-й интервал, обозначим $x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in_i}$.

Определение. Выборка называется частично группированной, если имеющаяся в нашем распоряжении информация связана с множеством непересекающихся интервалов, которые делят область определения случайной величины так, что каждый интервал принадлежит к одному из двух типов:

а) i-й интервал принадлежит к первому типу, если число n_i известно, но индивидуальные значения x_{ij} $(j=1,2,\ldots,n_i)$ неизвестны;

б) i-й интервал принадлежит ко второму типу, если известно не только число n_i, но также и все индивидуальные значения

$$x_{ij} \ (j=1,2,\ldots,n_i).$$

Такая частично группированная выборка является исходной для определения оценки неизвестного параметра распределения. Для распределения Эрланга n-го порядка $\mathscr{X}=(0,+\infty)$, $\theta\in\Omega=(0,+\infty)$, $x_0=0$, $x_k=+\infty$, и условия существования и единственности ОМП параметра определяются следующей теоремой.

Теорема I. ОМП параметра θ распределения Эрланга n-го порядка по частично группированной выборке существует тогда и только тогда, когда $\sum_{(2)} n_i > 0$ или для интервалов первого типа $n_1 < N$ и $n_k < N$, и определяется как единственное решение уравнения правдоподобия

$$\frac{1}{\theta}\left\{\sum_{(1)} n_i \frac{t_i^n e^{-t_i} - t_{i-1}^n e^{-t_{i-1}}}{\int_{t_{i-1}}^{t_i} t^{n-1} e^{-t}\,dt} + \sum_{(2)}\sum_{j=1}^{n_i}(n-t_{ij})\right\}=0,$$

где $t_i=\theta x_i$, $t_{ij}=\theta x_{ij}$.

Здесь $\sum_{(1)}$ и $\sum_{(2)}$ обозначено суммирование по интервалам первого и второго типа соответственно.

Доказательство теоремы громоздко и проводится аналогично доказательству, приводимому в работе [6] для масштабного параметра распределения гамма-распределения.

Теорема 2. ОМП параметра распределения Эрланга n-го порядка в условиях теоремы I состоятельна и асимптотически эффективна.

Доказательство ее, очевидно, следует из работы [2].

При оценивании параметра по группированной выборке асимптотическая дисперсионная матрица ОМП описывается соотношением

$$D[\hat{\theta}] = N^{-1} J_r(\hat{\theta}),$$

где $J_r(\hat{\theta})$ – информационное количество Фишера по группированным данным, зависящее от граничных точек интервалов:

$$J_r(\theta) = \frac{1}{\theta^2 \Gamma(n)} \sum_{i=1}^{k} \frac{\left(t_i^n e^{-t_i} - t_{i-1}^n e^{-t_{i-1}}\right)^2}{\int_{t_{i-1}}^{t_i} t^{n-1} e^{-t} dt} .$$

$J_r(\hat{\theta})$ определяет не только $D[\hat{\theta}]$, но и мощность критерия χ^2 Пирсона при проверке гипотез [7]. При асимптотически оптимальном группировании, минимизирующем потери информации от группирования, $J_r(\hat{\theta})$ достигает максимума при заданном числе интервалов группирования k. Это обеспечивает минимум асимптотической дисперсии при оценивании и максимум мощности критерия χ^2 при близких альтернативных гипотезах. Асимптотически оптимальные граничные точки интервалов группирования для распределения Эрланга n-го порядка могут быть легко получены интерполированием из таблиц асимптотически оптимального группирования для масштабного параметра гамма-распределения, полученных в работе [6].

Литература

1. Куллдорф Г. Введение в теорию оценивания по группированным и частично группированным выборкам. - М.: Наука, 1966, 176 с.
2. Бодин Н.А. Оценка параметров распределения по группированным выборкам. - Труды математического института АН СССР, 1970, вып.Ш, с.110-154.
3. Денисов В.И. Математическое обеспечение системы "ЭВМ-экспериментатор". - М.: Наука, 1977. - 251 с.
4. Лемешко Б.Ю. Оценивание параметров распределений по группированным наблюдениям. - В кн.: Вопросы кибернетики. М., 1977, вып.30, с.80-96.
5. Денисов В.И., Лемешко Б.Ю. Оценивание параметров распределения Коши по частично группированным выборкам. - Новосибирск, 1979. - 22 с. Рукопись представлена НЭТИ. Деп. в ВИНИТИ, № 249-79.
6. Денисов В.И., Лемешко Б.Ю. Асимптотически оптимальное группирование при оценивании масштабного параметра гамма-распределения по группированным данным. - Новосибирск, 1978. - 19 с. Рукопись представлена НЭТИ. Деп. в ВИНИТИ, № 1778-78.
7. Денисов В.И., Лемешко Б.Ю. Оптимальное группирование при обработке экспериментальных данных. - В кн.: Измерительные информационные системы. Новосибирск: НЭТИ, 1979, с.5-14.