Материалы Российской НТК "Информатика и проблемы телекоммуникаций", Новосибирск. 2007. – Т.1. – С.172-175.

МОЩНОСТЬ КЛАССИЧЕСИХ КРИТЕРИЕВ ПРОВЕРКИ ГИПОТЕЗ О ВЕКТОРЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ОЖИДАНИЙ И КОВАРИАЦИОННОЙ МАТРИЦЕ ПРИ НАБЛЮДАЕМЫХ ЗАКОНАХ, ОТЛИЧНЫХ ОТ НОРМАЛЬНОГО[1]

Танасейчук А.В., Лемешко Б.Ю.
НГТУ, Новосибирск,
Email: awtan@yandex.ru

Классический аппарат многомерного анализа построен на предположении о принадлежности наблюдаемого случайного вектора многомерному нормальному закону. Однако на практике это предположение зачастую нарушается. Таким образом, актуальным оказывается вопрос о том, насколько нарушение этого предположения влияет на распределения статистик многомерного анализа и на мощность соответствующих критериев.

Исследования распределений различных статистик многомерного анализа в случае отличных от нормального наблюдаемых законов распределения были проведены в работе [1]. В [2] исследовалась мощность некоторых критериев, рассмотренных в [1], в частности, критериев для проверки гипотез о коэффициентах корреляции и ковариационной матрице. В настоящей работе рассматриваются вопросы мощности критериев о векторе математических ожиданий, а также расширены исследования, связанные с проверкой гипотез о ковариационной матрице.

Исследования проводились для критериев проверки гипотез о равенстве вектора математических ожиданий конкретному значению $H_0 : \overline{M} = \overline{M}_0$ как в случае известной, так и в случае неизвестной ковариационной матрицы. Кроме этого, начатые в работе [2] исследования критериев проверки гипотез о ковариационной матрице были продолжены с использованием многомерного распределения Стьюдента.

В критерии проверки гипотезы $H_0 : \overline{M} = \overline{M}_0$ в случае известной ковариационной матрицы используется статистика

$$X_m^2 = n\left(\hat{\overline{M}} - \overline{M}_0\right)^T \Sigma^{-1}\left(\hat{\overline{M}} - \overline{M}_0\right).$$

В случае неизвестной ковариационной матрицы для проверки гипотезы той же гипотезы $H_0 : \overline{M} = \overline{M}_0$ используется статистика

$$T^2 = \frac{n(n-m)}{m(n-1)}\left(\hat{\overline{M}} - \overline{M}_0\right)^T \hat{\Sigma}^{-1}\left(\hat{\overline{M}} - \overline{M}_0\right).$$

В критерии проверки гипотезы о ковариационной матрице $H_0 : \Sigma = \Sigma_0$ применяется статистика

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 06-01-00059)

$$L_1 = mn\left(\ln(n) - 1\right) - n\ln|B\Sigma_0^{-1}| + tr\left(B\Sigma_0^{-1}\right),$$

где $B = \sum_{i=1}^{n}\left(\overline{X}_i - \hat{\overline{M}}\right)\left(\overline{X}_i - \hat{\overline{M}}\right)^T$.

В случае проверки гипотезы $H_0 : \Sigma = \Sigma_0, \overline{M} = \overline{M}_0$ используется статистика

$$L_2 = L_1 + n\left(\hat{\overline{M}} - \overline{M}_0\right)^T \Sigma_0^{-1}\left(\hat{\overline{M}} - \overline{M}_0\right).$$

Данная работа была проделана в целях исследования того, что происходит с мощностью указанных критериев. Исследования проводились для многомерных распределений, построенных на основе экспоненциального семейства с различными значениями параметра формы λ, и для многомерного распределения Стьюдента. Для моделирования многомерных распределений на основе экспоненциального семейства использовалась процедура, описанная в работе [3].

В следующих таблицах приведены значения мощности критерия проверки гипотезы $H_0 : \Sigma = \Sigma_0$ против альтернативы $H_1 : \sigma_{ij} = \sigma_0 + \sigma^*$. Результаты в первой таблице соответствуют случаю, когда наблюдаемые данные соответствуют многомерному нормальному закону, во втором и третьем – многомерному закону, построенному на основе распределений экспоненциального семейства с параметром формы $\lambda = 1$ и $\lambda = 5$ [3]. Объемы многомерных выборок n=100.

Таблица 1. Значения мощности в случае многомерного нормального закона

$\alpha \setminus \sigma^*$	0.1	0.3	0.5
0.1	0.227	0.948	1.
0.05	0.145	0.884	1.
0.01	0.030	0.636	1.

Таблица 2. Значения мощности в случае многомерного распределения, построенного на основе распределений экспоненциального семейства с параметром формы $\lambda = 1$

$\alpha \setminus \sigma^*$	0.1	0.3	0.5
0.1	0.155	0.743	1.
0.05	0.100	0.588	1.
0.01	0.023	0.342	1.

Таблица 3. Значения мощности в случае многомерного распределения, построенного на основе распределений экспоненциального семейства с параметром формы $\lambda = 5$

$\alpha \setminus \sigma^*$	0.1	0.3	0.5
0.1	0.325	0.996	1.
0.05	0.180	0.986	1.
0.01	0.042	0.932	1.

В следующих таблицах приведены аналогичные данные для гипотезы $H_0 : \Sigma = \Sigma_0, \overline{M} = \overline{M}_0$.

Таблица 4. Значения мощности в случае многомерного нормального закона

$\alpha \setminus \sigma^*$	0.1	0.3	0.5
0.1	0.228	0.944	1.
0.05	0.146	0.872	1.

0.01	0.031	0.615	1.

Таблица 5. Значения мощности в случае многомерного распределения, построенного на основе распределений экспоненциального семейства с параметром формы $\lambda = 1$

$\alpha \setminus \sigma^*$	0.1	0.3	0.5
0.1	0.164	0.741	1.
0.05	0.103	0.591	1.
0.01	0.020	0.335	1.

Таблица 6. Значения мощности в случае многомерного распределения, построенного на основе распределений экспоненциального семейства с параметром формы $\lambda = 5$

$\alpha \setminus \sigma^*$	0.1	0.3	0.5
0.1	0.321	0.995	1.
0.05	0.184	0.986	1.
0.01	0.043	0.927	1.

Как видим, при проверке гипотез $H_0 : \Sigma = \Sigma_0$ и $H_0 : \Sigma = \Sigma_0, \overline{M} = \overline{M}_0$ следует иметь в виду, что мощность соответствующих критериев в случае распределений с более тяжелыми по отношению к нормальному распределению хвостами ($\lambda = 1$) несколько падает. Напротив, в случае принадлежности наблюдаемых данных закону распределения с более легкими хвостами ($\lambda = 5$) мы видим некоторое увеличение мощности по сравнению с классическим случаем. Заметим, что, несмотря на снижение мощности для случая $\lambda = 1$, критерии остаются несмещенными.

Таким образом, можно заключить, что применение этих критериев остается возможным и корректным в условиях, когда наблюдаемые данные принадлежат законам, отличающимся от нормального в довольно широких пределах. В то же время следует помнить о том, что предельные распределения статистик, применяющихся для проверки гипотез $H_0 : \Sigma = \Sigma_0$ и $H_0 : \Sigma = \Sigma_0, \overline{M} = \overline{M}_0$, в случае “ненормальных” многомерных законов отличаются от классических предельных распределений.

1. Лемешко Б.Ю., Помадин С.С. Статистическое моделирование распределений статистик корреляционного анализа при отклонении многомерного закона от нормального // Тезисы докладов региональной НТК НТИ-2001, 2001. – Т.2. – С.31-32.
2. Лемешко Б.Ю., Танасейчук А.В. Мощность критериев проверки гипотез о ковариационной матрице и коэффициентах корреляции при наблюдаемых законах, отличных от нормального // Материалы РНТК "Информатика и проблемы телекоммуникаций", Т.1. – Новосибирск: 2006. – С. 206-209.
3. Лемешко Б.Ю., Помадин С.С. Один подход к моделированию псевдослучайных векторов с "заданными" числовыми характеристиками по законам, отличным от нормального // Материалы НТК "Информатика и проблемы телекоммуникаций". – Новосибирск, 2002. – С. 121-122.