

Исследование устойчивости критериев Бартлетта и Кохрена к отклонениям наблюдаемого показателя процесса от нормального закона¹

Лемешко Б.Ю., Миркин Е. П.

НГТУ, Новосибирск. E-mail: headrd@fpm.ami.nstu.ru

В работе исследуется устойчивость статистических процедур, наиболее часто используемых в задачах статистического контроля качества, к нарушению предположений о нормальности наблюдаемого показателя.

С помощью критериев Бартлетта [1] и Кохрена [2] проверяется наличие возмущений в ходе пуска процесса производства. По выборкам, последовательно отбираемым в ходе технологического процесса, проверяются статистические гипотезы о дисперсии наблюдаемого показателя.

Гипотеза о постоянстве технологической дисперсии формулируется следующим образом:

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_m^2 ;$$

$$H_1 : \sigma_{i_1}^2 \neq \sigma_{i_2}^2, \text{ по крайней мере, для одной пары индексов } i_1, i_2.$$

Статистика Бартлетта вычисляется в соответствии с соотношением [2]:

$$\chi^2 = M \left[1 + \frac{1}{3(m-1)} \left(\sum_{i=1}^m \frac{1}{v_i} - \frac{1}{N} \right) \right]^{-1} \quad (1)$$

где n_i – объемы выборок, $v_i = n_i$, если математическое ожидание известно, и

$$v_i = n_i - 1, \text{ если неизвестно, } N = \sum_{i=1}^m v_i,$$

$$M = N \ln \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^m v_i S_i^2 \right) - \sum_{i=1}^m v_i \ln S_i^2,$$

S_i^2 – оценки выборочных дисперсий. Если гипотеза H_0 верна, все $v_i > 3$ и выборки извлекаются из нормальной генеральной совокупности, то статистика (1) приближенно подчиняется χ_{m-1}^2 -распределению.

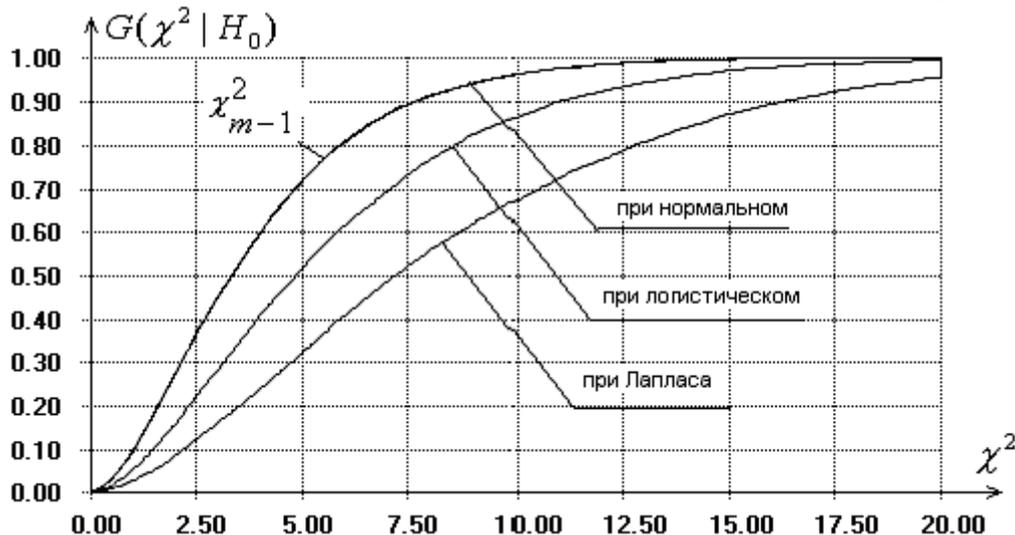
В работе методами компьютерного моделирования исследовались распределения статистики (1) при нарушении предположений о нормальности наблюдаемого закона, в частности, в случае принадлежности наблюдаемых выборок распределениям логистическому и Лапласа. Первый рисунок иллюстрирует изменение условного распределения статистики Бартлетта (1) в зависимости от наблюдаемого закона. Очевидна существенная зависимость статистики от вида закона. При нарушении предположений о нормальности распределения статистики уже не являются χ_{m-1}^2 -распределениями.

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Минобразования РФ (проект № ТО2-3.3-3356)

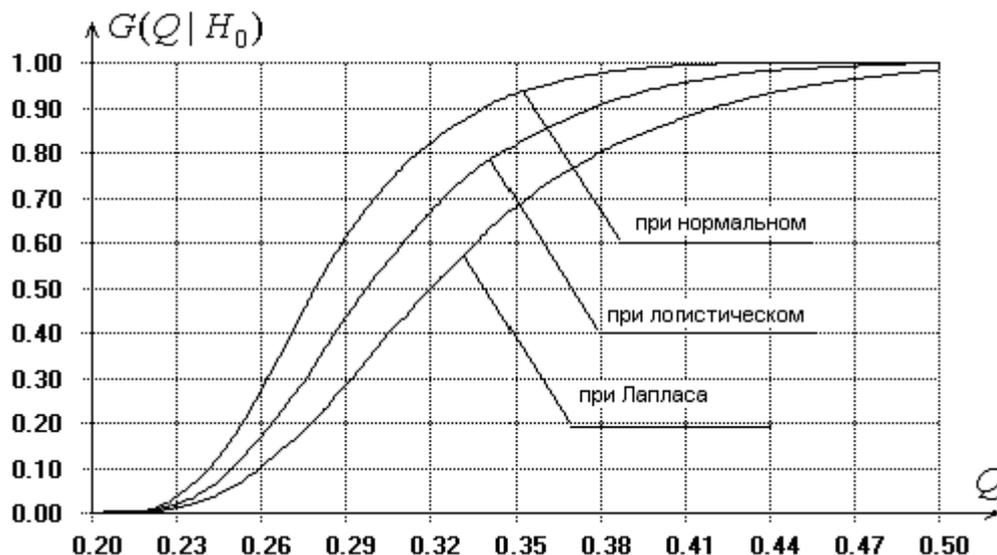
В критерии Кохрена рассматриваются та же самая пара гипотез и предполагается, что все выборки одинакового объема. Статистика имеет вид [2]:

$$Q = \frac{S_{\max}^2}{S_1^2 + S_2^2 + \dots + S_m^2} \quad (2)$$

Процентные точки распределения статистики (2) табулированы [2].



Как и критерий Бартлетта, критерий Кохрена используется в предположении, что наблюдаемая величина принадлежит нормальному закону. В данном случае исследованы распределения статистики (2) при отклонениях измерений контролируемого показателя от нормального закона. На рисунке приведены условные распределения статистики Кохрена (2), когда показатель подчиняется законам распределения нормальному, логистическому и Лапласа.



Полученные результаты позволяют сделать вывод о возможности построения моделей распределений статистик критериев Бартлетта и Кохрена при любых законах распределения наблюдаемых величин.

1. Миттаг Х.-Й., Ринне Х. Статистические методы обеспечения качества. – М.: Машиностроение. 1995. – 600 с.
2. Большев Л.Н., Смирнов Н.В. Таблицы математической статистики. - М.: Наука, 1983. - 416 с.