Критерии проверки статистических гипотез в задачах метрологического обеспечения, анализа результатов измерений, контроля, испытаний

(*проблемы применения и перспективы*)

Борис Юрьевич Лемешко

Новосибирский государственный технический университет

e-mail: Lemeshko@ami.nstu.ru
https://ami.nstu.ru/~headrd/

Состояние

Следует констатировать, что существующий аппарат прикладной математической статистики крайне ограничено и/или неэффективно используется в задачах метрологии.

В настоящее время из обширного множества критериев, предназначенных для проверки различных статистических гипотез, в задачах метрологического обеспечения, анализа результатов измерений, контроля и испытаний используется лишь очень ограниченный круг.

Ряд очень перспективных критериев, которые “буквально напрашиваются” для применения в приложениях (как, например, критерии однородности законов или однородности дисперсий в задачах лабораторных сличений), практически там не используются.

Зачастую критерии используются в условиях нарушения стандартных предположений, обуславливающих возможность их применения, что приводит к некорректности статистических выводов.

Причинами такого состояния являются следующие:

1. Отсутствует доступная информация о существовании соответствующего математического аппарата (о соответствующих критериях).

2. Реальные свойства критериев при ограниченных объёмах анализируемых выборок могут существенно отличаться от асимптотических свойств.

3. Возможность применения многих критериев ограничена отсутствием информации о распределениях статистик этих критериев при справедливости проверяемой гипотезы. В связи с чем приходится опираться на ограниченные таблицы критических значений.

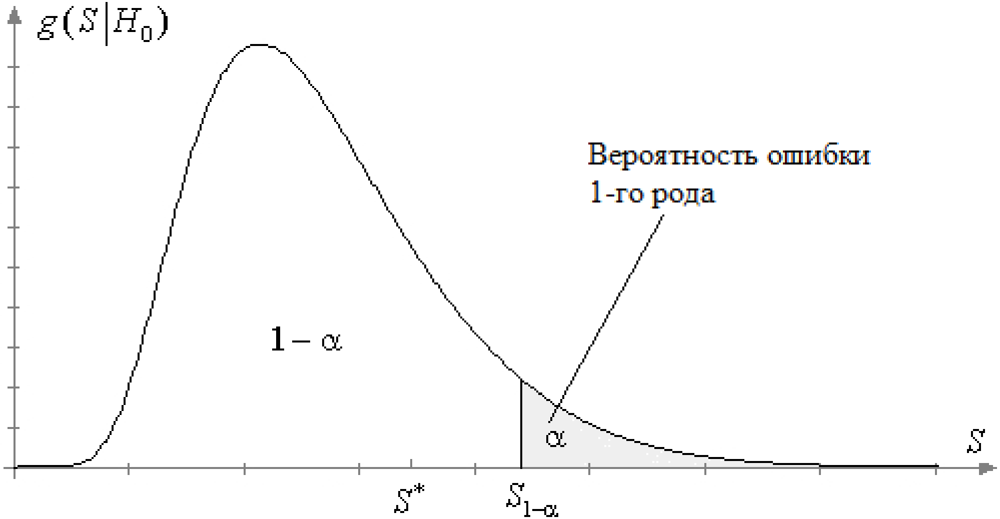
4. Отсутствует доступная информация о том, что происходит с критериями (с распределениями их статистик) в условиях нарушения стандартных предположений.

5. Отсутствует информация о достоинствах и недостатках отдельных критериев, о преимуществе в мощности тех или иных критериев из группы критериев, ориентированных на проверку одной и той же гипотезы, что позволило бы выбрать наиболее предпочтительный критерий.

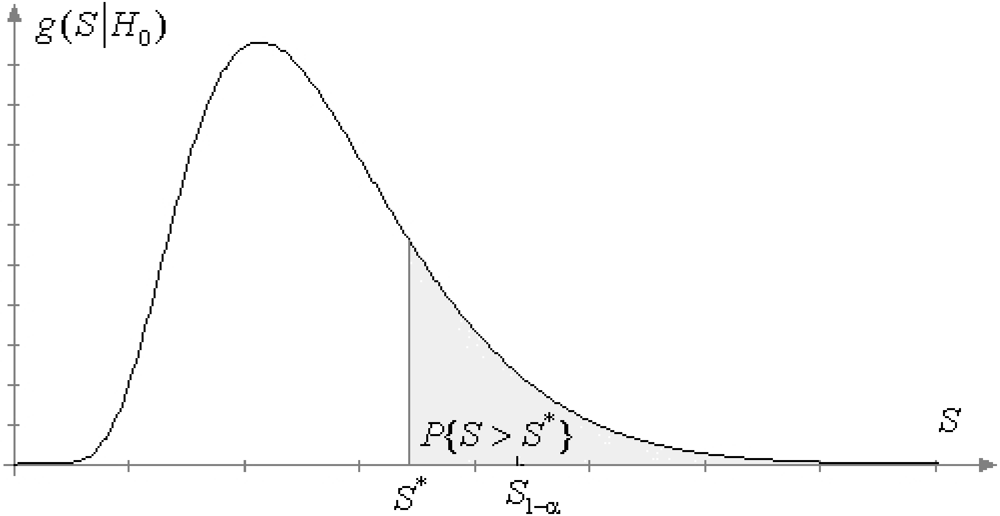
6. Отсутствие программного обеспечения для использования соответствующих критериев, гарантирующего корректность выводов как в условиях стандартных предположений, так и в условиях конкретных приложений.

Общие сведения о проверке статистических гипотез

С каждым из используемых для проверки гипотезы H_0 критериев связана статистика S, которая представляет собой некоторую меру для измерения вероятности соответствия (несоответствия) анализируемых выборок проверяемой гипотезе H_0. При справедливости проверяемой гипотезы H_0 статистика S подчиняется некоторому распределению $G(S|H_0)$.



Плотность распределения статистики при справедливости гипотезы H_0 и критическое значение для правостороннего критерия

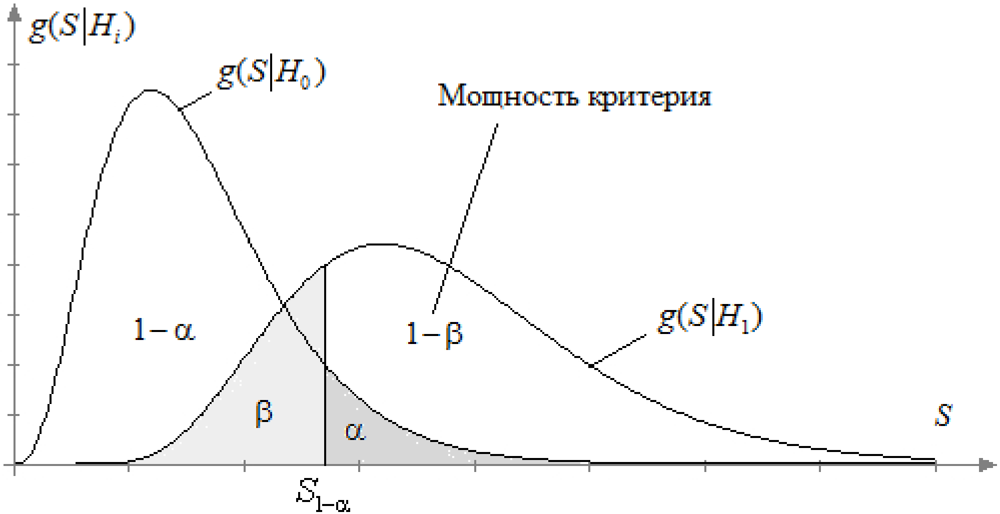


Плотность распределения статистики при справедливости гипотезы H_0 и достигнутый уровень значимости

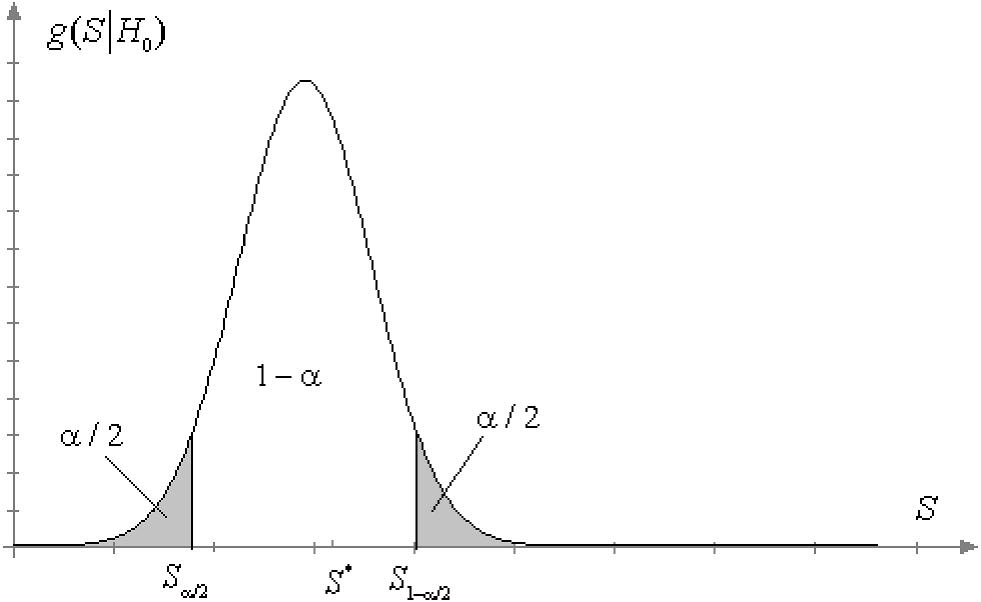
$$p_{value} = P\{S > S^*\} = \int_{S^*}^{\infty} g(s|H_0)\,ds = 1 - G(S^*|H_0)$$

Если задана конкурирующая гипотеза H_1, то можно говорить об ошибке 2-го рода и её вероятности

$$\beta = \int_{-\infty}^{S_{1-\alpha}} g(s|H_1)ds .$$

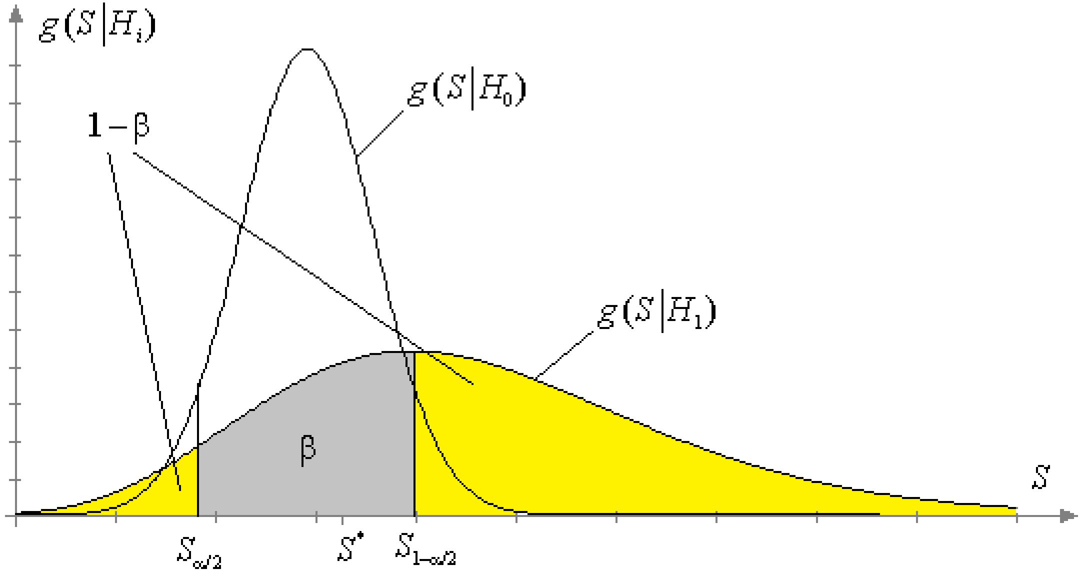


Плотности распределения статистик при справедливости соответственно гипотез H_0 и H_1 в случае правостороннего критерия



Плотность распределения статистики при справедливости гипотезы H_0
и критические значения для двустороннего критерия

$$p_{value} = 2\min\left\{G(S^*|H_0),\, 1 - G(S^*|H_0)\right\}.$$



Плотности распределения статистик при справедливости соответственно гипотез H_0 и H_1 в случае двустороннего критерия

Чем критерий мощнее, тем он предпочтительней.

0. **Непараметрические критерии согласия**
1. **Критерии однородности законов**
2. **Критерии однородности средних (о равенстве математических ожиданий)**
3. **Критерии однородности дисперсий (о равенстве дисперсий)**

0 Непараметрические критерии согласия

В данном случае будем говорить о применении критериев Колмогорова, Крамера–Мизеса–Смирнова, Андерсона–Дарлинга, Купера, Ватсона, Жанга.

Практика применения такого рода критериев в приложениях богата большим числом примеров некорректного использования.

Наиболее распространенные ошибки применения связаны с использованием классических результатов, имеющих место при проверке простых гипотез, для ситуаций, соответствующих проверке сложных гипотез [1].

При проверке согласия различают простые и сложные гипотезы.

Простая проверяемая гипотеза имеет вид $H_0:\ F(x)=F(x,\theta)$, где $F(x,\theta)$ – функция распределения вероятностей, с которой проверяют согласие наблюдаемой выборки, а θ – известное значение параметра (скалярного или векторного).

Сложная проверяемая гипотеза имеет вид $H_0:\ F(x)\in\{F(x,\theta),\ \theta\in\Theta\}$, где Θ – область определения параметра θ.

Если процесс вычисления оценки $\hat{\theta}$ скалярного или векторного параметра закона не опирается на ту же самую выборку, по которой проверяют гипотезу о согласии, то алгоритм применения критерия согласия при проверке сложной гипотезы не отличается от проверки простой гипотезы.

0.1 Непараметрические критерии согласия при проверке простых гипотез

0.1.1 Критерий Колмогорова

Критерий Колмогорова [3] опирается на статистику

$$D_n = \sup_{|x|<\infty} \left| F_n(x) - F(x,\theta) \right|, \qquad (0.1)$$

где $F_n(x)$ – эмпирическая функция распределения; $F(x,\theta)$ – теоретическая функция распределения; n – объем выборки. При $n \to \infty$ функция распределения статистики $\sqrt{n} \cdot D_n$ сходится равномерно к функции распределения Колмогорова $K(s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{-2k^2 s^2}$.

В критерии Колмогорова рекомендуется использовать статистику с поправкой Большева [4, 5] в форме [6]

$$S_K = \sqrt{n} D_n + \frac{1}{6\sqrt{n}} = \frac{6nD_n + 1}{6\sqrt{n}}, \qquad (0.3)$$

где $D_n = \max\left(D_n^+, D_n^-\right)$, $D_n^+ = \max_{1 \le i \le n} \left\{ \frac{i}{n} - F(x_i,\theta) \right\}$; $D_n^- = \max_{1 \le i \le n} \left\{ F(x_i,\theta) - \frac{i-1}{n} \right\}$,

n – объем выборки; $x_1, x_2, \ldots, x_n$ здесь и далее – упорядоченные по возрастанию выборочные значения; $F(x,\theta)$ – функция закона распределения, согласие с которым проверяют.

0.1.2 Критерий Крамера-Мизеса-Смирнова

Статистика критерия **Крамера–Мизеса–Смирнова** имеет вид

$$S_{\omega} = n\omega_n^2 = \frac{1}{12n} + \sum_{i=1}^{n}\left\{F(x_i,\theta) - \frac{2i-1}{2n}\right\}^2 , \qquad (0.13)$$

которая при простой гипотезе в пределе подчиняется закону с функцией распределения $a1(s)$, имеющей вид [6]

$$a1(s) = \frac{1}{\sqrt{2s}}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\Gamma(j+1/2)\sqrt{4j+1}}{\Gamma(1/2)\Gamma(j+1)}\exp\left\{-\frac{(4j+1)^2}{16s}\right\}\times\left\{I_{-\frac{1}{4}}\left[\frac{(4j+1)^2}{16s}\right]-I_{\frac{1}{4}}\left[\frac{(4j+1)^2}{16s}\right]\right\},$$

где $I_{-\frac{1}{4}}(\cdot), I_{\frac{1}{4}}(\cdot)$ – модифицированные функции Бесселя вида

$$I_{\nu}(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2k}}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)}, \ |z| < \infty, \ |\arg z| < \pi .$$

0.1.3 Критерий Андерсона-Дарлинга

Статистика критерия **Андерсона–Дарлинга** [7, 8] задается выражением

$$S_{\Omega} = n\Omega_n^2 = -n - 2\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{2i-1}{2n}\ln F(x_i,\theta) + \left(1-\frac{2i-1}{2n}\right)\ln(1-F(x_i,\theta))\right\}. \qquad (0.16)$$

В пределе при проверке простой гипотезы эта статистика подчиняется закону с функцией распределения $a2(s)$, имеющей вид [6]

$$a2(s) = \frac{\sqrt{2\pi}}{s}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j \frac{\Gamma(j+1/2)(4j+1)}{\Gamma(1/2)\Gamma(j+1)}\exp\left\{-\frac{(4j+1)^2\pi^2}{8s}\right\}\times$$

$$\times\int_0^{\infty}\exp\left\{\frac{s}{8(y^2+1)} - \frac{(4j+1)^2\pi^2 y^2}{8s}\right\}dy\,.$$

0.1.4 Критерий Купера

В критерии [9] Купера статистика V_n которого определяется соотношением

$$V_n = \sup_{-\infty<x<\infty}\left\{F_n(x)-F(x,\theta)\right\} - \inf_{-\infty<x<\infty}\left\{F_n(x)-F(x,\theta)\right\}$$

и используется в виде

$$V_n = D_n^+ + D_n^-, \tag{0.18}$$

где D_n^+, D_n^- определены выше), n – объем выборки, x_i – элементы вариационного ряда.

Статистика $\sqrt{n}V_n$ подчиняется распределению [10]:

$$G(s|H_0) = 1 - \sum_{m=1}^{\infty} 2(4m^2s^2-1)e^{-2m^2s^2} .$$

В критерии используется либо модификация статистики [10]

$$V = V_n\left(\sqrt{n} + 0.155 + \frac{0.24}{\sqrt{n}}\right), \tag{0.20}$$

либо [11]

$$V_n^{mod} = \sqrt{n}(D_n^+ + D_n^-) + \frac{1}{3\sqrt{n}}, \tag{0.21}$$

где идея использования поправки вытекает из выражения для статистики критерия согласия Смирнова [6, с. 81].

0.1.5 Критерий Ватсона

Статистика критерия Ватсона [12, 13] имеет вид

$$U_n^2 = n \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ F_n(x) - F(x,\theta) - \int_{-\infty}^{\infty} \left(F_n(y) - F(y,\theta) \right) dF(y,\theta) \right\}^2 dF(x,\theta)$$

и используется в следующей удобной для расчетов форме

$$U_n^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(F(x_i,\theta) - \frac{i - \frac{1}{2}}{n} \right)^2 - n \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} F(x_i,\theta) - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{12n} . \quad (0.23)$$

Предельное распределение $G\left(U_n^2 | H_0\right)$ статистики U_n^2 приведено в [12, 13] в виде

$$G\left(s | H_0\right) = 1 - 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} e^{-2m^2\pi^2 s} .$$

0.1.6 Критерии Жанга

В диссертации Жанга [14] и в последующих работах [15, 16] предложены непараметрические критерии согласия, статистики которых имеют вид:

$$Z_K = \max_{1 \le i \le n}\left(\left(i-\frac{1}{2}\right)\log\left\{\frac{i-\frac{1}{2}}{nF(x_i,\theta)}\right\}+\left(n-i+\frac{1}{2}\right)\log\left[\frac{n-i+\frac{1}{2}}{n\{1-F(x_i,\theta)\}}\right]\right), \tag{0.27}$$

$$Z_A = -\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\log\{F(x_i,\theta)\}}{n-i+\frac{1}{2}}+\frac{\log\{1-F(x_i,\theta)\}}{i-\frac{1}{2}}\right], \tag{0.28}$$

$$Z_C = \sum_{i=1}^{n}\left[\log\left\{\frac{[F(x_i,\theta)]^{-1}-1}{(n-\frac{1}{2})/(i-\frac{3}{4})-1}\right\}\right]^2 \tag{0.29}$$

Использование критериев со статистиками (0.27) – (0.29) осложняет сильная зависимость распределений статистик от объема выборки n.

Естественно, зависимость от n сохраняется и в случае проверки сложных гипотез.

0.2 Непараметрические критерии согласия при проверке сложных гипотез

0.2.1 Факторы, влияющие на распределения статистик критериев при проверке сложных гипотез

При проверке сложных гипотез, когда по той же самой выборке оценивают параметры наблюдаемого закона распределения вероятностей, все рассматриваемые непараметрические критерии согласия теряют свойство «свободы от распределения» [17]. Более того, предельные распределения статистик непараметрических критериев согласия зависят от целого ряда факторов, определяющих «сложность» гипотезы.

На закон распределения статистики $G(S|H_0)$ влияют следующие факторы:

- вид наблюдаемого закона распределения $F(x, \theta)$, соответствующего истинной гипотезе H_0;
- тип оцениваемого параметра и число оцениваемых параметров;
- в некоторых ситуациях конкретное значение параметра (например, в случае гамма-распределения);
- используемый метод оценивания параметров.

Игнорирование того, что проверяют сложную гипотезу, и того, что сложные гипотезы могут быть различными, приводит к некорректному применению непараметрических критериев согласия и, как следствие, к неверным статистическим выводам. Различия в предельных распределениях тех же самых статистик при проверке простых и сложных гипотез настолько существенны, что пренебрегать этим абсолютно недопустимо.

0.2.2 Зависимость распределений статистик критериев от метода оценивания параметров

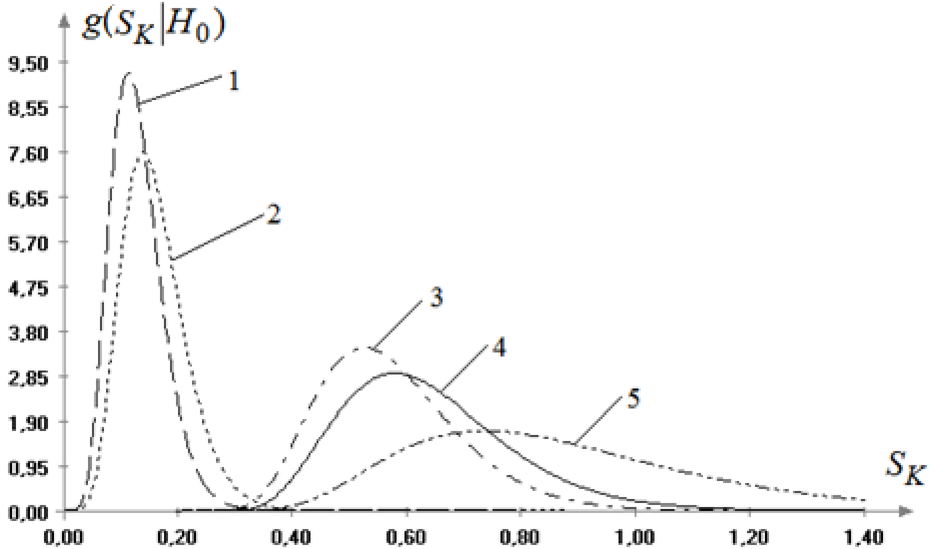


Рис. 0.1. Плотности распределения $g(S_K|H_0)$ статистики S_K критерия Колмогорова при проверке сложной гипотезы (H_0 – нормальный закон, оцениваются оба параметра: *1* – с использованием *MD*-оценок S_K; *2* – *MD*-оценок S_ω; *3* – *MD*-оценок S_Ω; *4* – ОМП; 5 – плотность распределения Колмогорова $k(s)$)

0.2.3 Зависимость распределений статистик критериев от вида закона

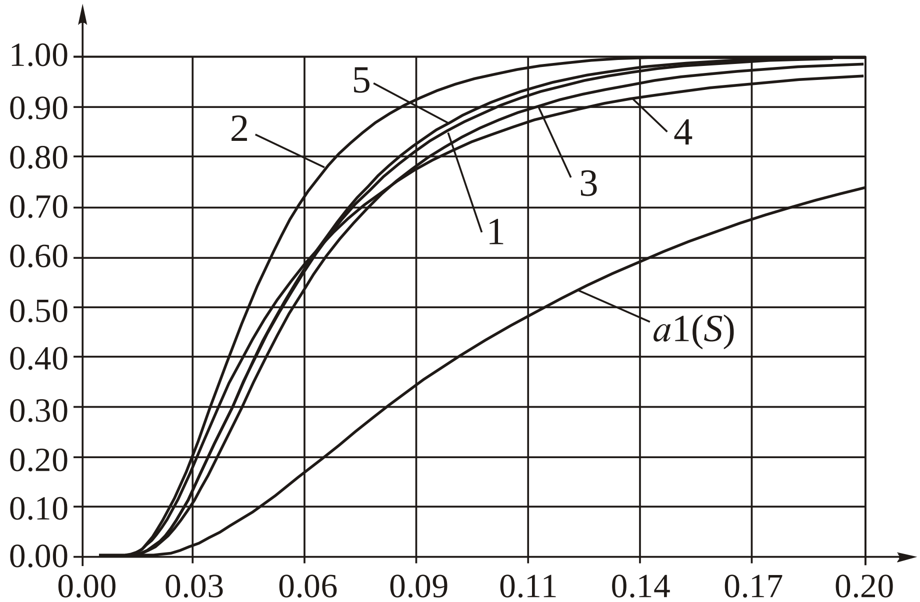


Рис. 0.2. Распределения $G(S_\omega | H_0)$ статистики S_ω Крамера–Мизеса–Смирнова при оценивании двух параметров закона, соответствующего гипотезе H_0 (*1* – нормального, *2* – логистического, *3* – Лапласа, *4* – наименьшего значения, *5* – Коши), при использовании ОМП. $a1(s)$ – функция распределения, предельная при простой гипотезе

0.2.4 Зависимость распределений статистик от числа и типа оцениваемых параметров

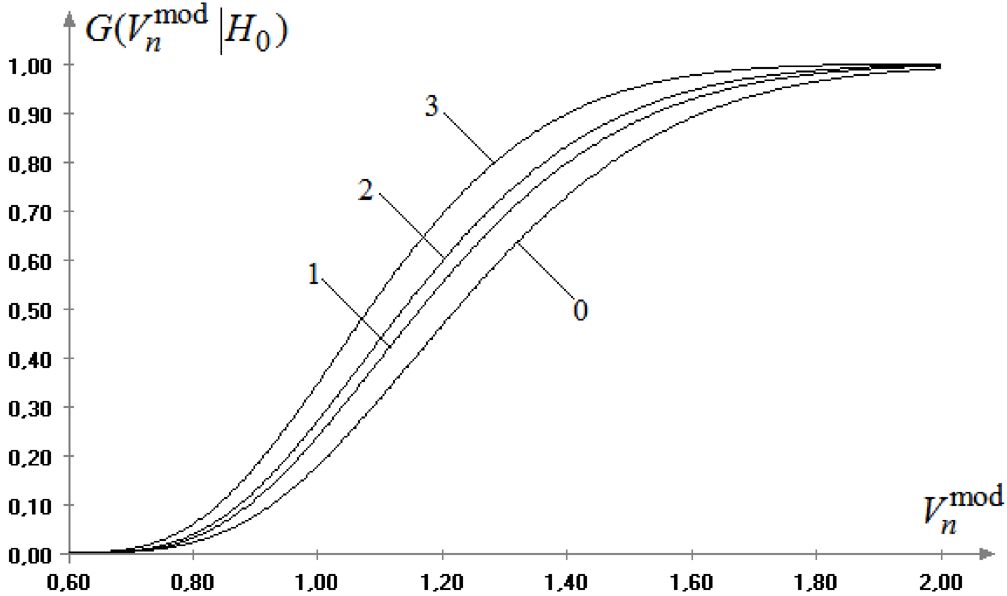
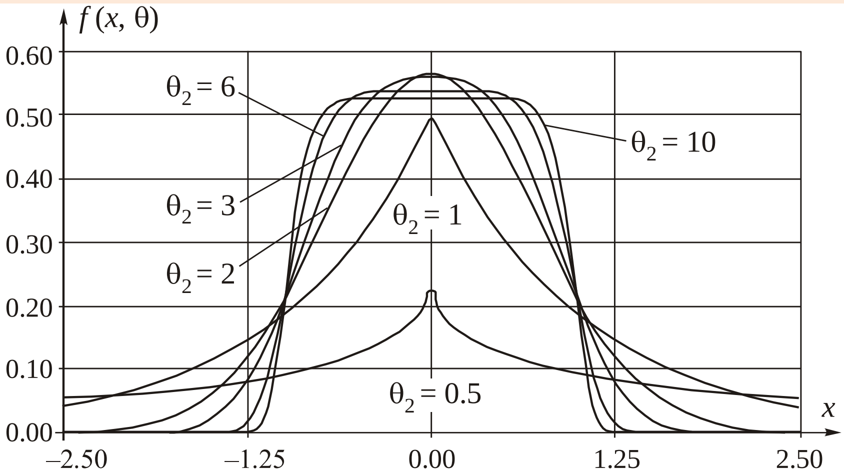


Рис. 0.3. Распределения $G(V_n^{\mathrm{mod}} | H_0)$ статистики V_n^{mod} Купера при использовании ОМП для оценивания параметров нормального закона (*0* – без оценивания (распределение Купера), *1* – при оценивании параметра сдвига, *2* – параметра масштаба, 3 – при оценивании двух параметров)

0.2.5 Зависимость распределений статистик непараметрических критериев от конкретных значений параметра или параметров

Предельные распределения $G(S|H_0)$ рассматриваемых статистик при проверке сложных гипотез могут зависеть от конкретных значений параметров закона, с которым проверяют согласие. Это касается таких законов, как семейства гамма-распределений, семейства бета-распределений I, II и III рода, обобщенного нормального распределения, обобщенного распределения Вейбулла, обратного гауссовского распределения и других. Например, для **обобщенного нормального распределения** с плотностью:

$$f(x) = \frac{\theta_2}{2\theta_1 \Gamma(1/\theta_2)} \exp\left\{ -\left(\frac{|x-\theta_0|}{\theta_1} \right)^{\theta_2} \right\}. \qquad (0.7)$$



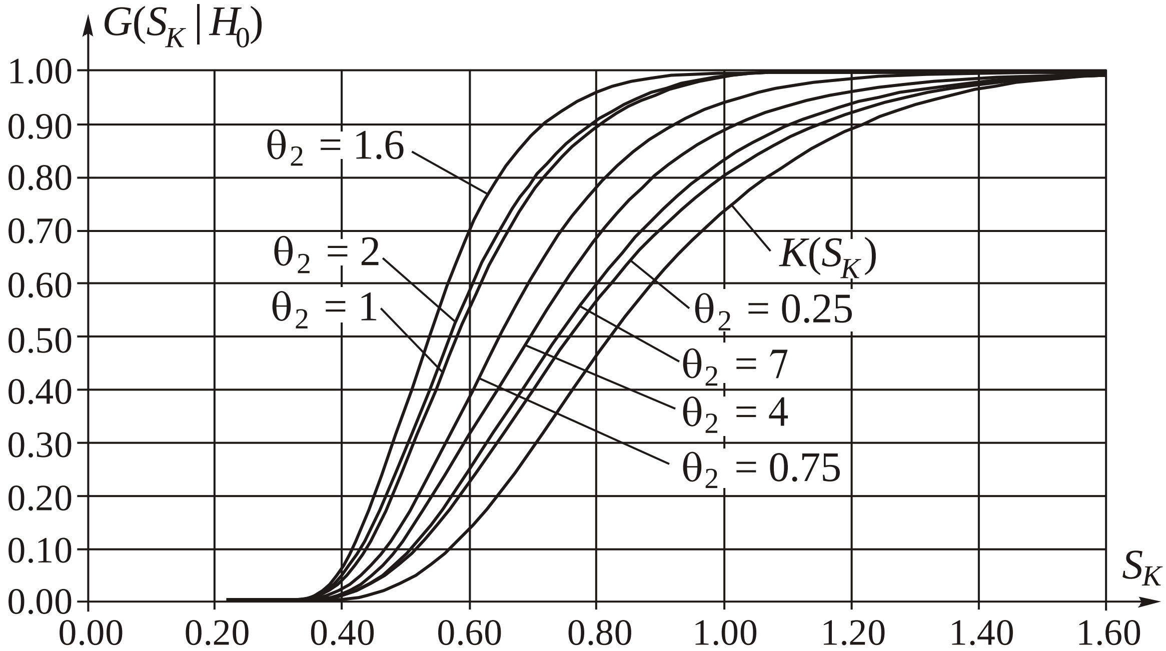


Рис. 0.5. Зависимость распределения статистики критерия типа Колмогорова от параметра формы θ_2 при оценивании всех трех параметров распределения (0.7)

0.2.6 Методика компьютерного моделирования распределений статистик

Если для описания выборки используется закон распределения вероятностей $F(x,\theta)$ и найдена оценка его параметра $\hat{\theta}$, а для проверки сложной гипотезы H_0: $F(x) \in \{F(x,\theta), \theta \in \Theta\}$, то для нахождения неизвестного распределения $G(S|H_0)$ статистики соответствующего критерия согласия целесообразно воспользоваться методикой компьютерного анализа статистических закономерностей.

Для этого следует в соответствии с законом $F(x,\hat{\theta})$ смоделировать N выборок того же объема n, что и выборка, для которой необходимо проверить гипотезу H_0: $F(x) \in \{F(x,\theta), \theta \in \Theta\}$. Далее для каждой из N выборок вычислить оценки тех же параметров закона, а затем – значение статистики S соответствующего критерия согласия.

В результате будет получена выборка значений статистики $S_1, S_2, ..., S_N$ с законом распределения $G(S_n|H_0)$ для проверяемой гипотезы H_0. По этой выборке при достаточно большом N можно построить достаточно гладкую эмпирическую функцию распределения $G_N(S_n|H_0)$, которой можно непосредственно воспользоваться для вывода о том, есть ли основания для отклонения гипотезы H_0.

При необходимости можно по $G_N(S_n|H_0)$ **построить приближенную аналитическую модель**, аппроксимирующую $G_N(S_n|H_0)$, и тогда, опираясь уже на эту модель, принимать решение относительно проверяемой гипотезы H_0.

0.2.7 Перечень законов, для которых построены модели распределений статистик непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез

№ п/п	Распределение случайной величины, область определения	Функция плотности
1	Экспоненциальное, $x \ge 0$	$\frac{1}{\theta_0} e^{-x/\theta_0}$
2	Полунормальное, $x \ge 0$	$\frac{2}{\theta_0\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2\theta_0^2}$
3	Рэлея, $x \ge 0$	$\frac{x}{\theta_0^2} e^{-x^2/2\theta_0^2}$
4	Максвелла, $x \ge 0$	$\frac{2x^2}{\theta_0^3\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2\theta_0^2}$
5	Лапласа, $x \in (-\infty, \infty)$	$\frac{1}{2\theta_0} e^{-(x-\theta_1)/\theta_0}$
6	Нормальное, $x \in (-\infty, \infty)$	$\frac{1}{\theta_0\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\theta_1)^2}{2\theta_0^2}}$

7	Логнормальное, $x \in (0, \infty)$	$\frac{1}{x\theta_0\sqrt{2\pi}} e^{-(\ln x - \theta_1)^2/2\theta_0^2}$
8	Коши, $x \in (-\infty, \infty)$	$\frac{\theta_0}{\pi\left[\theta_0^2 + (x-\theta_1)^2\right]}$
9	Логистическое, $x \in (-\infty, \infty)$	$\frac{1}{\theta_0} \exp\left\{-\frac{(x-\theta_1)}{\theta_0}\right\} \Big/ \left[1+\exp\left\{-\frac{(x-\theta_1)}{\theta_0}\right\}\right]^2$
10	Наибольшего значения, $x \in (-\infty, \infty)$	$\frac{1}{\theta_0}\exp\left\{-\frac{x-\theta_1}{\theta_0} - \exp\left(-\frac{x-\theta_1}{\theta_0}\right)\right\}$
11	Наименьшего значения, $x \in (-\infty, \infty)$	$\frac{1}{\theta_0}\exp\left\{\frac{x-\theta_1}{\theta_0} - \exp\left(\frac{x-\theta_1}{\theta_0}\right)\right\}$
12	Вейбулла, $x \in (0, \infty)$	$\frac{\theta_0 x^{\theta_0 - 1}}{\theta_1^{\theta_0}}\exp\left\{-\left(\frac{x}{\theta_1}\right)^{\theta_0}\right\}$
13	Sb-Джонсона, $x \in [\theta_3, \theta_2 + \theta_3]$	$\frac{\theta_1\theta_2}{\sqrt{2\pi}(x-\theta_3)(\theta_2+\theta_3-x)} \times \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\theta_0 - \theta_1 \ln\frac{x-\theta_3}{\theta_2+\theta_3-x}\right]^2\right\}$

14	Sl-Джонсона, $x \in [\theta_3, \infty)$	$$\frac{\theta_1}{\sqrt{2\pi}\left(x-\theta_3\right)}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\theta_0+\theta_1\ln\frac{x-\theta_3}{\theta_2}\right]^2\right\}$$
15	Su-Джонсона, $x \in (-\infty, \infty)$	$$\frac{\theta_1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\left(x-\theta_3\right)^2+\theta_2^2}}\times\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\theta_0+\theta_1\ln\left\{\frac{x-\theta_3}{\theta_2}+\sqrt{\left(\frac{x-\theta_3}{\theta_2}\right)^2+1}\right\}\right]^2\right\}$$

Построенные модели (*в виде параметрических законов распределения с соответствующими значениями параметров*), аппроксимирующие предельные распределения статистик критериев **Колмогорова, Смирнова, Крамера-Мизеса-Смирнова, Андерсона-Дарлинга, Купера и Ватсона,** предусматривающие, в основном, применение оценок максимального правдоподобия и, в меньшей степени, применение MD-оценок, представлены в таблицах приложения **А** руководства:

Лемешко Б. Ю. Непараметрические критерии согласия. Руководство по применению: Монография. – М.: ИНФРА-М, 2014. – 163 с.

Текущая версия программной системы ISW.

Доступна по адресу: https://ami.nstu.ru/~headrd/

0.2.8 Интерактивный подход к проверке гипотез в нестандартных условиях

№ п/п	Распределение случайной величины, область определения	Функция плотности
16	Гамма-распределение, $x \in (\theta_2, \infty)$	$\frac{1}{\theta_1^{\theta_0}\Gamma(\theta_0)}(x-\theta_2)^{\theta_0-1} e^{-(x-\theta_2)/\theta_1}$
17	Обобщенное нормальное, $x \in (-\infty, \infty)$	$\frac{\theta_2}{2\theta_1\Gamma(1/\theta_2)} \exp\left\{-\left(\frac{\lvert x-\theta_0\rvert}{\theta_1}\right)^{\theta_2}\right\}$
18	Обратное гауссовское, $x \in (0, \infty)$	$\left(\frac{\theta_1}{2\pi x^3}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{\theta_1(x-\theta_0)^2}{2\theta_0^2 x}\right)$
19	Обобщенное Вейбулла, $x \in (0, \infty)$	$\frac{\theta_0}{\theta_1}\theta_2{}^{\theta_0} x^{\theta_0-1}\left(1+\left(\frac{x}{\theta_2}\right)^{\theta_0}\right)^{\frac{1}{\theta_1}-1} e^{1-\left(1+\left(\frac{x}{\theta_2}\right)^{\theta_0}\right)^{\frac{1}{\theta_1}}}$

20	Бета-распределение I рода	$\frac{1}{\theta_2 B(\theta_0,\theta_1)}\left(\frac{x}{\theta_2}\right)^{\theta_0-1}\left(1-\frac{x}{\theta_2}\right)^{\theta_1-1}$
21	Бета-распределение II рода	$\frac{1}{\theta_2 B(\theta_0,\theta_1)}\frac{[x/\theta_2]^{\theta_0-1}}{[1+x/\theta_2]^{\theta_0+\theta_1}}$
22	Бета-распределение III рода	$\frac{\theta_2^{\theta_0}}{\theta_3 B(\theta_0,\theta_1)}\frac{\left(\frac{x-\theta_4}{\theta_3}\right)^{\theta_0-1}\left(1-\frac{x-\theta_4}{\theta_3}\right)^{\theta_1-1}}{\left[1+(\theta_2-1)\frac{x-\theta_4}{\theta_3}\right]^{\theta_0+\theta_1}}$

В случае этих законов **распределения статистик критериев зависят от конкретных значений параметра или параметров формы**.

Так как оценки параметров становятся известными только в процессе анализа, то требуемое для проверки гипотезы распределение статистики нельзя найти заранее (до вычисления оценок по анализируемой выборке!). В случае критериев со статистиками Жанга проблема усугубляется зависимостью распределений статистик от объемов выборок.

Отсюда следует, что **распределения статистик** применяемых критериев в такой ситуации **должны находиться в интерактивном режиме** в ходе проводимого статистического анализа, а затем использоваться при формировании вывода по итогам проверки сложной гипотезы.

Применение критериев Жанга возможно только при использовании такого режима.

0.3 О мощности критериев

Результаты сравнительного анализа мощности непараметрических критериев относительно различных пар *близких* конкурирующих законов показали, что критерии Колмогорова (K), Крамера-Мизеса-Смирнова (KMS), Андерсона-Дарлинга (AD), Купера (V_n), Ватсона (U_n^2), Жанга (Z_C , Z_A и Z_K), **как правило**, можно упорядочить по мощности следующим образом:

– при проверке простых гипотез –

$$Z_C \succ Z_A \succ Z_K \succ U_n^2 \succ V_n \succ AD \succ KMS \succ \approx K \;;$$

– при проверке сложных гипотез –

$$Z_A \succ \approx Z_C \succ Z_K \approx AD \succ KMS \succ U_n^2 \succ V_n \succ K \;.$$

Мощность непараметрических критериев при проверке сложных гипотез при тех же объемах выборок n всегда существенно выше, чем при проверке простых.

Если критерий χ^2 Пирсона использовать асимптотически оптимальное группирование [119] и выбирать число интервалов, при котором он будет иметь максимальную мощность , то при проверке простых гипотез **критерий χ^2 окажется на третьей позиции**.

При проверке сложных гипотез – преимущество за непараметрическими критериями согласия, а критерии типа χ^2 Никулина-Рао-Робсона [18, 19, 20] и χ^2 Пирсона оказываются соответственно на **7-й – 8-й позициях** в общем ряду критериев по убыванию мощности.

0.4 Применение критериев согласия для анализа больших выборок

Вопросы применения статистических методов к анализу больших массивов данных (Big Data) в последние годы вызывают большой интерес. В приложениях всё чаще приходится сталкиваться с необходимостью анализа гигантских объёмов накапливаемых данных. Возникают потребности извлечения и использования закономерностей, в том числе вероятностных, скрытых в этих данных.

При попытках применения для анализа больших данных классического аппарата прикладной математической статистики, как правило, встречаются со специфическими проблемами, ограничивающими возможности их корректного применения. Например, сталкиваются с тем, что хорошо зарекомендовавшие себя методы и алгоритмы становятся неэффективными из-за "проклятия размерности". Одни популярные критерии проверки гипотез оказываются не приспособленными для анализа выборок даже порядка тысячи наблюдений. Другие, которые формально можно использовать при объёмах выборок $n \to \infty$, всегда приводят к отклонению даже справедливой проверяемой гипотезы H_0. Такие проблемы характерны для многих критериев, в том числе для непараметрических критериев согласия. И связаны они не только с ростом вычислительных затрат.

То, что очень часто информация о законе распределения $G(S|H_0)$ статистики критерия ограничена лишь узкими рамками таблицы критических значений, совсем не ограничивает возможность корректного применения критерия при объемах выборок за рамками этой таблицы. Для этого достаточно лишь воспользоваться интерактивным режимом для моделирования и последующего использования $G_N(S_n|H_0)$.

Основная причина, препятствующая корректному применению множества классических критериев проверки статистических гипотез, заключается в следующем. Как правило, объёмы выборок в Big Data (принадлежащие некоторому непрерывному закону распределения) практически неограничены, но сами данные представлены с ограниченной точностью (округлены с некоторым Δ). По сути, "нарушается предположение" о том, что наблюдается непрерывная случайная величина.

Допустим, для критерия существует предельное распределение статистики $G(S|H_0)$. Эмпирическое распределение $F_n(x)$, соответствующее выборке непрерывных случайных величин (без округления), при $n \to \infty$ сходится к функции распределения $F(x)$ этой случайной величины. Эмпирическое распределение $G_N(S_n|H_0)$ статистики, строящейся по выборке непрерывной случайной величины при $n \to \infty$ (и $N \to \infty$) сходится к предельному $G(S|H_0)$.

Пусть теперь наблюдаемые данные округляются с некоторым Δ.

Тогда, начиная с некоторого n, зависящего от вида $F(x)$, от области определения случайной величины и от Δ, $\max|F_n(x) - F(x)|$ перестанет уменьшаться, а распределение $G_N(S_n|H_0)$ – станет с ростом n отклоняться от предельного $G(S|H_0)$ (чем больше Δ, тем при меньшем n).

Описанная проблема имеет место не только в случае анализа выборок очень большого объёма. Она типична для многих задач, возникающих в приложениях, когда данные (измерения) фиксируются с существенной степенью округления, из-за чего в выборках оказывается относительно много повторяющихся наблюдений. В таких ситуациях реальные распределения $G(S_n|H_0)$ статистик критериев (при данной степени округления Δ) могут быть далёкими от предельных $G(S|H_0)$ распределений и существенно отличающимися от $G(S_n|H_0)$, имеющими место в ситуации без округления измерений.

Рассмотрим поведение распределений $G(S_n|H_0)$ статистик критериев на примере проверки согласия со стандартным нормальным законом.

При округлении с точностью до 1 в выборках, принадлежащих $N(0,1)$, может появляться **9** уникальных значений, при округлении с точностью $\Delta = 0.1$ – порядка **86** уникальных значений, с точностью $\Delta = 0.01$ – порядка **956**, с точностью $\Delta = 0.001$ – порядка **9830**.

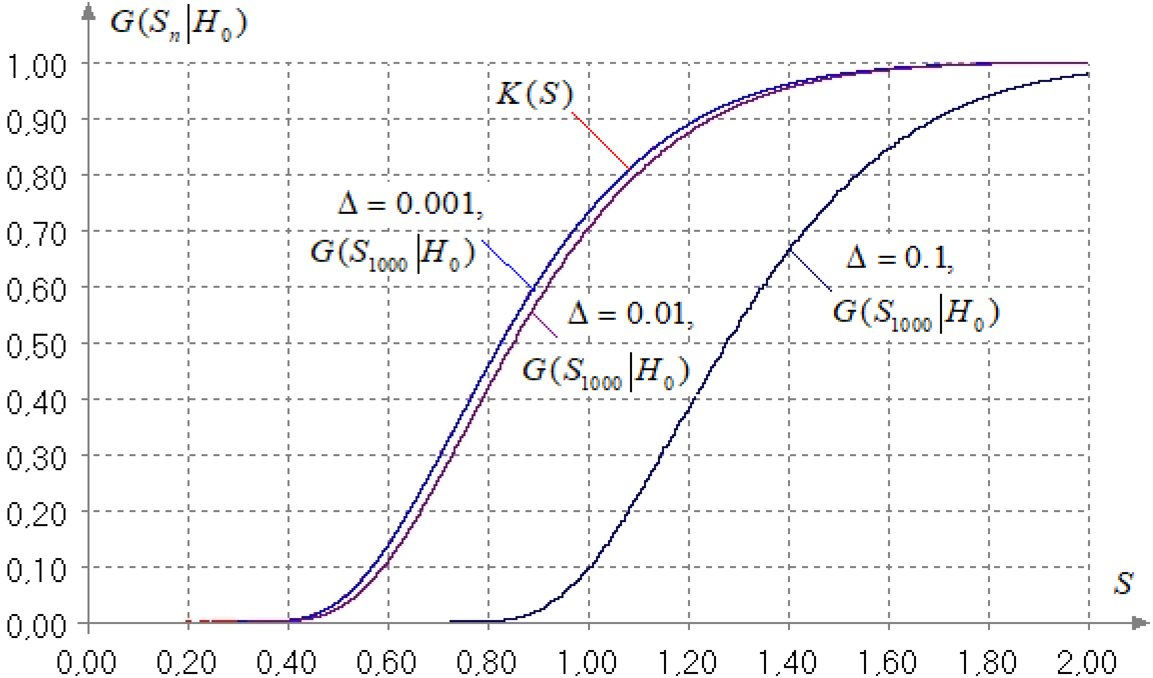


Рис. 0.6. Эмпирические распределения $G(S_{1000}|H_0)$ статистики критерия Колмогорова при проверке согласия со стандартным нормальным законом в зависимости от Δ

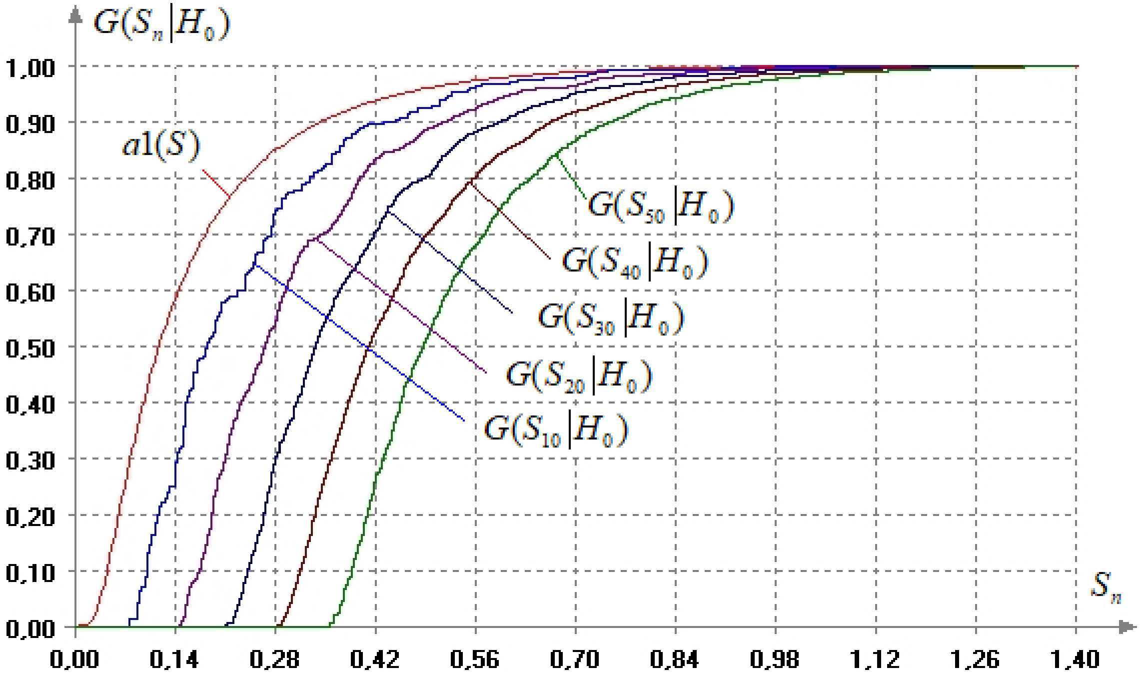


Рис. 0.7. Эмпирические распределения $G(S_n|H_0)$ статистики критерия Крамера–Мизеса–Смирнова при проверке согласия со стандартным нормальным законом в зависимости от n при $\Delta = 1$

При анализе очень больших выборок для того, чтобы при использовании соответствующих критериев для вычисления **p**-value можно было использовать предельное распределение статистики $G(S|H_0)$ (имеющее место при проверке простой или сложной гипотезы), рекомендуется[1] применять критерий не ко всему массиву Big Data, а **извлекать для анализа из этого массива выборки ограниченного объема**. То есть, применять критерий при таких n, при которых для данной степени округления Δ реальное распределение статистики $G(S_n|H_0)$ ещё практически не отличается от $G(S|H_0)$.

Возможность корректного применения критерия в условиях ограниченных объёмов выборок и существенных округлений решается интерактивным моделированием распределения статистики $G_N(S_n|H_0)$ критерия при Δ и n, соответствующих условиям получения анализируемых данных, что и реализуется в ISW.

В ISW при моделировании псевдослучайных (*непрерывных*) величин используются числа двойной точности (с плавающей точкой), что обеспечивает представление данных с 15–17 значимыми десятичными цифрами в диапазоне примерно от 10^{-308} до 10^{308}. Такая точность при моделировании позволяет, с одной стороны, подтверждать имеющиеся теоретические и асимптотические закономерности, а с другой – является критерием точности программной реализации соответствующего критерия, когда подтверждается соответствие $G_N(S_n|H_0)$ известному теоретическому закону $G(S|H_0)$. Но возможно и моделировании псевдослучайных величн с заданным округлением Δ.

[1] *Лемешко Б. Ю. Лемешко С.Б., Семёнова М.А.* К вопросу статистического анализа больших данных // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2018. – № 44. – С. 40-49. DOI: 10.17223/19988605/44/5

О k-выборочных критериях проверки однородности законов

Введение

С необходимостью решения задач проверки гипотез о принадлежности двух (или более) выборок случайных величин одной и той же генеральной совокупности (проверки однородности) постоянно сталкиваются в различных приложениях. При этом возникают проблемы корректности применения и выбора наиболее предпочтительного критерия.

Задача проверки однородности k выборок формулируется следующим образом. Пусть x_{ij} j-е наблюдение i-й выборки $j=\overline{1,n_i}$, $i=\overline{1,k}$. Предположим, что i-й выборке соответствует непрерывная функция распределения $F_i(x)$. Необходимо проверить гипотезу вида $H_0: F_1(x)=F_2(x)=\ldots=F_k(x)$ при любом x без указания общего для них закона распределения. Эмпирическую функцию распределения, соответствующую i-й выборке обозначим как $F_{in_i}(x)$.

На практике чаще всего применяются двухвыборочные критерии Смирнова [97] и Лемана–Розенблатта [52, 79]. Значительно реже упоминается об использовании критерия Андерсона–Дарлинга [78] (Андерсона–Дарлинга–Петита) или его k-выборочного варианта [83] и ещё реже о применении k-выборочных вариантов критериев Смирнова или Лемана–Розенблатта [45, 29, 30]. Практически не говорится об использовании критериев однородности Жанга [14, 95].

Цель настоящей работы состояла в исследовании распределений статистик и мощности критериев однородности при ограниченных объемах выборок, в уточнении объемов выборок, начиная с которых можно реально пользоваться предельными распределениями, в выяснении характера альтернатив, относительно которых тот или иной критерий имеет преимущество в мощности. При проведении исследований использовалась методика компьютерного моделирования и анализа статистических закономерностей, хорошо зарекомендовавшая себя в аналогичных работах, базирующаяся в основном на методе статистического моделирования.

1. Рассматриваемые критерии

1.1 Критерий Смирнова

Критерий однородности Смирнова предложен в работе [135]. Предполагается, что функции распределения $F_1(x)$ и $F_2(x)$ являются непрерывными. Статистика критерия Смирнова измеряет расстояние между эмпирическими функциями распределения, построенными по выборкам

$$D_{n_1,n_2} = \sup_x \left| F_{1,n_i}(x) - F_{2,n_2}(x) \right|.$$

При практическом использовании критерия статистика D_{n_1,n_2} вычисляется в соответствии с соотношениями [6]:

$$D^+_{n_1,n_2} = \max_{1 \le r \le n_1} \left[\frac{r}{n_1} - F_{2,n_2}(x_{1r}) \right] = \max_{1 \le s \le n_2} \left[F_{1,n_1}(x_{2s}) - \frac{s-1}{n_2} \right],$$

$$D^-_{n_1,n_2} = \max_{1 \le r \le n_1} \left[F_{2,n_2}(x_{1r}) - \frac{r-1}{n_1} \right] = \max_{1 \le s \le n_2} \left[\frac{s}{n_2} - F_{1,n_1}(x_{2s}) \right],$$

$$D_{n_1,n_2} = \max\left(D^+_{n_1,n_2}, D^-_{n_1,n_2} \right).$$

При справедливости гипотезы H_0 статистика критерия Смирнова

$$S_{\text{С}} = \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}} D_{n_1,n_2} \tag{1}$$

в пределе подчиняется распределению Колмогорова $K(S)$ [6].

Однако при ограниченных значениях n_1 и n_2 случайная величина D_{n_1,n_2} является дискретной, а число её возможных значений представляет собой наименьшее общее кратное n_1 и n_2 [6]. Ступенчатость условного распределения $G\left(S_{\text{С}} \middle| H_0\right)$ статистики $S_{\text{С}}$ при равных n_1 и n_2 сохраняется даже при $n_i = 1000$. Поэтому предпочтительнее применять критерий, когда объемы выборок n_1 и n_2 не равны и представляют собой взаимно простые числа.

Другим недостатком критерия со статистикой (1) является то, что распределения $G\left(S_{\text{С}} \middle| H_0\right)$ с ростом n_1 и n_2 медленно приближаются к предельному распределению слева и при ограниченных n_1 и n_2 существенно отличаются от $K(s)$ (см. рис.1). В этой связи в [112] предложена простая модификация статистики (1):

$$S_{\text{СМ}} = \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}} \left(D_{m,n} + \frac{n_1 + n_2}{4.6 n_1 n_2} \right),$$

у которой практически отсутствует последний недостаток.

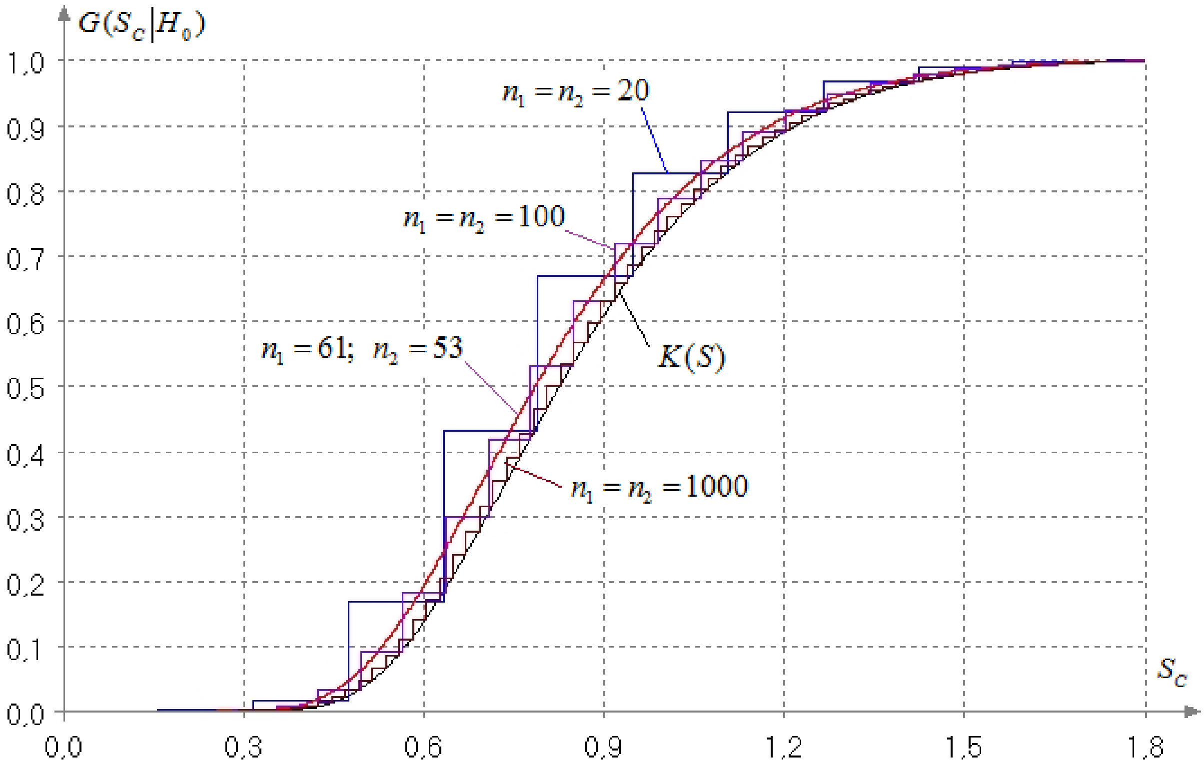


Рис. 1. Распределения статистики (1) при справедливости H_0 в зависимости от n_1 и n_2

1.2 Критерий Лемана–Розенблатта

Критерий однородности Лемана–Розенблатта представляет собой критерий типа ω^2. Критерий предложен в работе [53] и исследован в [79].

Статистика критерия используется в форме [53]

$$T = \frac{1}{n_1 n_2 (n_1 + n_2)} \left[n_2 \sum_{i=1}^{n_2} \left(r_i - i \right)^2 + n_1 \sum_{j=1}^{n_1} \left(s_j - j \right)^2 \right] - \frac{4 n_1 n_2 - 1}{6(n_1 + n_2)}, \qquad (2)$$

где r_i – порядковый номер (ранг) x_{2i}; s_j – порядковый номер (ранг) x_{1j} в объединенном вариационном ряде. В [79] было показано, что статистика (4) в пределе распределена как $a1(t)$ [97].

В отличие от критерия Смирнова распределение статистики T быстро сходится к предельному $a1(T)$. При $n_1 = n_2 = 100$ распределение $G(T|H_0)$ визуально совпадает с $a1(T)$, а при $n_1, n_2 \geq 45$ отклонением $G(T|H_0)$ от $a1(T)$ на практике можно пренебречь.

1.3 Критерий Андерсона–Дарлинга

Двухвыборочный критерий Андерсона–Дарлинга (критерий однородности) рассмотрен в работе [78]. Статистика применяемого критерии определяется выражением

$$A^2 = \frac{1}{n_1 n_2} \sum_{i=1}^{n_1+n_2-1} \frac{\left(M_i(n_1+n_2) - n_1 i\right)^2}{i(n_1+n_2-i)}, \tag{3}$$

где M_i – число элементов первой выборки, меньших или равных i-му элементу вариационного ряда объединенной выборки.

Предельным распределением статистики (3) при справедливости проверяемой гипотезы H_0 является то же самое распределение $a2(t)$ [97], которое является предельным для статистики критерия согласия Андерсона–Дарлинга.

Сходимость распределения $G\left(A^2 \middle| H_0\right)$ статистики (3) к $a2(A^2)$ при ограниченных объёмах выборок была исследована в [130], где было показано, что при $n_1, n_2 \ge 45$ отклонение функции распределения $G\left(A^2 \middle| H_0\right)$ от $a2(A^2)$ не превышает 0.01.

1.4 Многовыборочный критерий Андерсона–Дарлинга

Многовыборочный вариант критерия согласия Андерсона–Дарлинга предложен в [83]. В предположении о непрерывности $F_i(x)$ по анализируемым выборкам строится объединённая общим объёмом $n=\sum_{i=1}^{k} n_i$ и упорядочивается $X_1 \le X_2 \le \ldots \le X_n$. Статистика критерия имеет вид [83]:

$$A_{kn}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\left(nM_{ij}-jn_i\right)^2}{j(n-j)}, \qquad (4)$$

где M_{ij} – число элементов в i-й выборке, которые не больше чем X_j. Проверяемая гипотеза H_0 отклоняется при больших значениях статистики (4).

В [83] таблица верхних процентных точек представлена не для статистики (4), а для статистики вида:

$$T_{kn} = \frac{A_{kn}^2-(k-1)}{\sqrt{D[A_{kn}^2]}}. \qquad (5)$$

Дисперсия статистики A_{kn}^2 определяется выражением [83]

$$D\left[A_{kn}^2\right] = \frac{an^3+bn^2+cn+d}{(n-1)(n-2)(n-3)}$$

при

$$a=(4g-6)(k-1)+(10-6g)H,$$

$$b=(2g-4)k^2+8hk+(2g-14h-4)H-8h+4g-6,$$

$$c=(6h+2g-2)k^2+(4h-4g+6)k+(2h-6)H+4h,$$

$$d = (2h+6)k^2 - 4hk\,,$$

где

$$H = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{n_i}\,, \quad h = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i}\,, \quad g = \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=i+1}^{n-1} \frac{1}{(n-i)\,j}\,.$$

Зависимость предельных распределений статистики (5) от числа сравниваемых выборок k иллюстрирует рис. 2. С ростом числа сравниваемых выборок это распределение медленно сходится к стандартному нормальному закону.

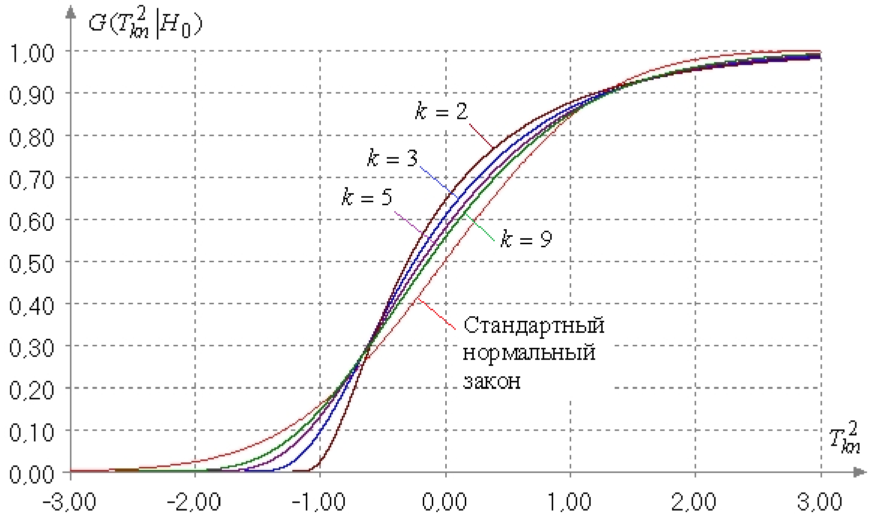


Рис. 2. Зависимость предельных распределений статистики (5) от числа сравниваемых выборок

Исследование распределений статистик методами статистического моделирования показало, что при использовании критериев отличие распределений статистик от соответствующих предельных не имеет практического значения при $n_i \geq 30$.

Таблица верхних процентных точек предельных распределений для статистики (5) представлена в [83].

Таблица 1

Уточненные верхние критические значения $T_{kn}^2(\alpha)$ статистики (5)

k	$1-\alpha$				
	0.75	0.90	0.95	0.975	0.99
2	0.325	1.228	1.966	2.731	3.784
3	0.439	1.300	1.944	2.592	3.429
4	0.491	1.321	1.925	2.511	3.277
5	0.523	1.331	1.900	2.453	3.153
6	0.543	1.333	1.885	2.410	3.078
7	0.557	1.337	1.870	2.372	3.017
8	0.567	1.335	1.853	2.344	2.970
9	0.577	1.334	1.847	2.323	2.927
10	0.582	1.3345	1.838	2.306	2.899
11	0.589	1.332	1.827	2.290	2.867
∞	0.674	1.282	1.645	1.960	2.326

Мы несколько уточнили и расширили таблицу критических значений.

Одновременно для предельных распределений статистики (5) были построены приближенные модели законов (для $k = 2 \div 11$). Хорошими моделями оказались законы семейства бета-распределений III рода с плотностью

$$f(x) = \frac{\theta_2^{\theta_0}}{\theta_3 \mathrm{B}(\theta_0, \theta_1)} \frac{\left(\frac{x-\theta_4}{\theta_3}\right)^{\theta_0 - 1} \left(1 - \frac{x-\theta_4}{\theta_3}\right)^{\theta_1 - 1}}{\left[1 + (\theta_2 - 1)\frac{x-\theta_4}{\theta_3}\right]^{\theta_0 + \theta_1}}$$

при конкретных значениях параметров этого закона $\mathrm{B}_{\mathrm{III}}(\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)$, найденным по полученным в результате моделирования выборкам статистик объёмом $N = 10^6$.

Представленные в таблице 2 модели $\mathrm{B}_{\mathrm{III}}(\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)$ с приведенными значениями параметров позволяют по значениям статистики, вычисленным по соотношению (5), находить оценки p_{value} при соответствующем числе k сравниваемых выборок.

Т а б л и ц а 2

Модели предельных распределений статистики (11)

k	Модель
2	B_{III} (3.1575, 2.8730, 18.1238, 15.0000, –1.1600)
3	B_{III} (3.5907, 4.5984, 7.8040, 14.1310, –1.5000)
4	B_{III} (4.2657, 5.7035, 5.3533, 12.8243, –1.7500)
5	B_{III} (6.2992, 6.5558, 5.6833, 13.010, –2.0640)
6	B_{III} (6.7446, 7.1047, 5.0450, 12.8562, –2.2000)
7	B_{III} (6.7615, 7.4823, 4.0083, 11.800, –2.3150)
8	B_{III} (5.8057, 7.8755, 2.9244, 10.900, –2.3100)
9	B_{III} (9.0736, 7.4112, 4.1072, 10.800, –2.6310)
10	B_{III} (10.2571, 7.9758, 4.1383, 11.186, –2.7988)
11	B_{III} (10.6848, 7.5950, 4.2041, 10.734, –2.8400)
∞	N(0.0, 1.0)

1.5 Критерии однородности Жанга

Предложенные Жангом критерии однородности [14, 95] являются развитием критериев Смирнова, Лемана–Розенблатта и Андерсона–Дарлинга и дают возможность сравнивать $k \geq 2$ выборок.

Критерии согласия Жанга [106] показывают некоторое преимущество в мощности по сравнению с критериями согласия Крамера–Мизеса–Смирнова и Андерсона–Дарлинга, но недостатком, ограничивающим применение критериев согласия Жанга, является зависимость распределений статистик от объёмов выборок.

Этим же недостатком обладают варианты критериев Жанга для проверки однородности законов.

Для преодоления этого недостатка автор [14] предлагает для оценивания p_{value} использовать метод Монте–Карло.

Задача моделирования распределений статистик критериев однородности Жанга, по сравнению с аналогичной задачей для критериев согласия, оказывается много проще, так как приходится моделировать распределения статистик $G(S|H_0)$ критериев в случае принадлежности анализируемых выборок равномерному закону.

Пусть $x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in_i}$ упорядоченные выборки непрерывных случайных величин с функциями распределения $F_i(x)$, ($i = \overline{1,k}$) и пусть $X_1 < X_2 < \ldots < X_n$, где $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$, объединённая упорядоченная выборка.

Обозначим R_{ij} ранг j-го упорядоченного наблюдения x_{ij} i-й выборки в объединённой выборке. Пусть $X_0 = -\infty$, $X_{n+1} = +\infty$, а ранги $R_{i,0} = 1$, $R_{i,n_i+1} = n+1$.

В критериях используется модификация эмпирической функции распределения $\hat{F}(t)$, принимающая в точках разрыва X_m, $m = \overline{1,n}$, значения $\hat{F}(X_m) = (m - 0.5)/n$ [14].

Статистика Z_K критерия однородности Жанга имеет вид [14]:

$$Z_K = \max_{1 \le m \le n} \left\{ \sum_{i=1}^{k} n_i \left[F_{i,m} \ln \frac{F_{i,m}}{F_m} + \left(1 - F_{i,m}\right) \ln \frac{1 - F_{i,m}}{1 - F_m} \right] \right\}, \tag{6}$$

где $F_m = \hat{F}(X_m)$, так что $F_m = (m - 0.5)/n$, а вычисление $F_{i,m} = \hat{F}_i(X_m)$ осуществляется следующим образом. В начальный момент значения $j_i = 0$, $i = \overline{1,k}$. Если $R_{i,j_i+1} = m$, то $j_i := j_i + 1$ и $F_{i,m} = (j_i - 0.5)/n_i$, в противном случае если $R_{i,j_i} < m < R_{i,j_i+1}$, то $F_{i,m} = j_i/n_i$.

Критерий правосторонний: проверяемая гипотеза H_0 отклоняется при **больших** значениях статистики (6). Распределения статистики зависят от n_i и от k. На принятие решения влияет дискретность статистики, которая с ростом k становится менее выраженной (см. рис.3).

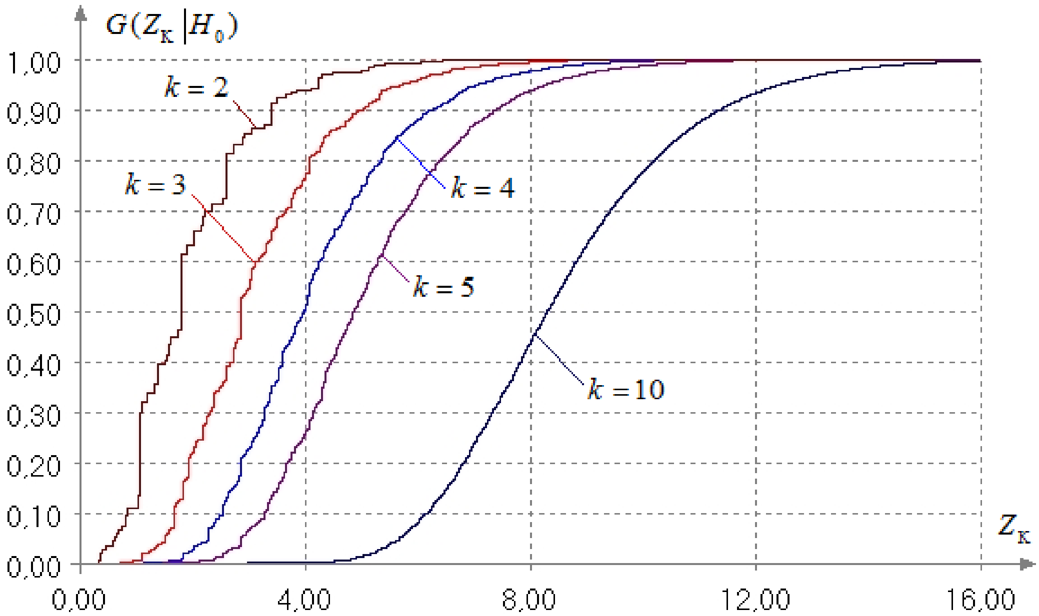


Рис. 3. Зависимость распределений статистики (6) от k при $n_i = 20$

Статистика Z_{A} критерия однородности Жанга определяется выражением [14]:

$$Z_{\text{A}} = -\sum_{m=1}^{n}\sum_{i=1}^{k} n_i \frac{F_{i,m}\ln F_{i,m} + \left(1-F_{i,m}\right)\ln\left(1-F_{i,m}\right)}{(m-0.5)(n-m+0.5)}, \qquad (7)$$

где F_m и $F_{i,m}$ вычисляются, как определено выше.

Критерий левосторонний: проверяемая гипотеза H_0 отклоняется при **малых** значениях статистики (7). Распределения статистики зависят от n_i и от k.

Статистика Z_C критерия однородности Жанга k выборок вычисляется в соответствии с выражением [14]:

$$Z_C = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} \ln\left(\frac{n_i}{j-0.5}-1\right)\ln\left(\frac{n}{R_{i,j}-0.5}-1\right). \qquad (8)$$

Критерий также левосторонний: проверяемая гипотеза H_0 отклоняется при **малых** значениях статистики (8). Распределения статистики зависят от n_i и от k, зависимость от k показана на рис. 4.

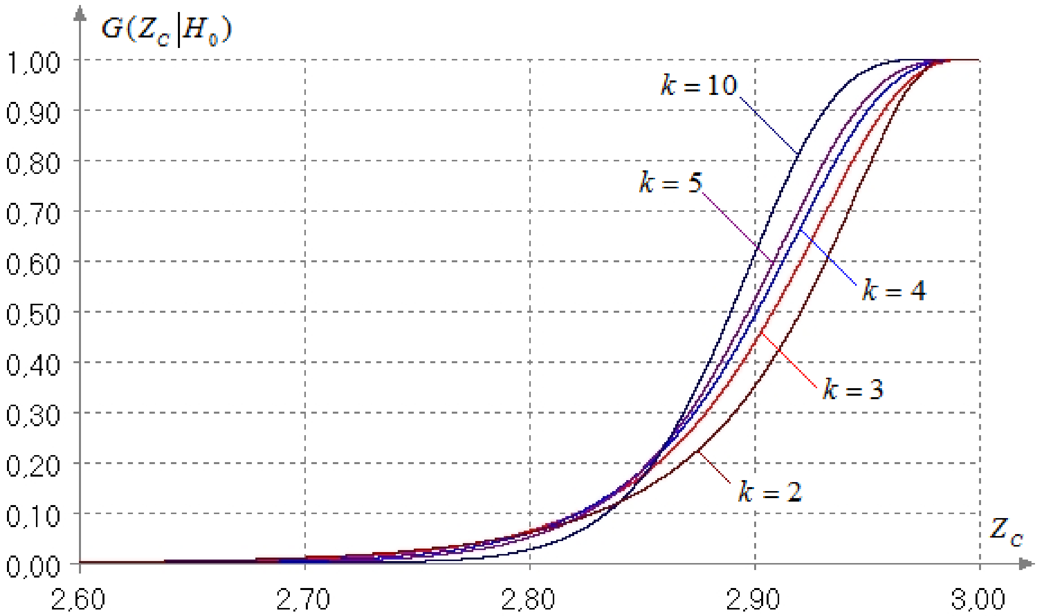


Рис. 4. Зависимость распределений статистики (8) от k при $n_i = 20$

Отсутствие информации о законах распределения статистик и таблиц критических значений в современных условиях не является серьёзным недостатком критериев Жанга, так как в программном обеспечении, осуществляющем поддержку применения критериев, несложно организовать вычисление достигнутых уровней значимостей p_{value}, используя методы статистического моделирования.

2. Двухвыборочные критерии при анализе k выборок

Различные подходы к построению k -выборочных аналогов критериев Смирнова, Лемана–Розенблатта и Андерсона–Дарлинга рассматривались в работе [45].

k -выборочный вариант критерия Колмогорова–Смирнова, основанный на таком подходе, был построен в [29] и рассматривается в последовательных изданиях книги [30].

На использовании такого же подхода построен k -выборочный критерий Андерсона–Дарлинга [83], рассмотренный выше, для которого нами были построены модели предельных распределений.

В этих критериях, так же как и в критериях однородности Жанга, строится объединённая выборка, а статистики измеряют отклонение эмпирических распределений отдельных выборок от эмпирического распределения, построенного по совокупности анализируемых выборок.

Возможен другой путь. Для анализа k выборок можно к каждой паре выборок применить двухвыборочный критерий со статистикой S (всего $(k-1)k/2$ вариантов), а решение принимать по совокупности результатов. В качестве статистики такого k-выборочного критерия (в случае использования правостороннего двухвыборочного критерия) можно рассмотреть, например, статистику вида

$$S_{\max} = \max_{\substack{1 \le i \le k \\ i < j \le k}} \{S_{i,j}\}, \tag{2.17}$$

где $S_{i,j}$ – значения статистик используемого двухвыборочного критерия, полученные при анализе i-й и j-й выборок.

Проверяемая гипотеза H_0 будет отклоняться при **больших** значениях статистики $S_{\max}$.

Преимуществом такого рода критерия является и то, что в результате будет определена пара выборок, различие между которыми оказывается наиболее значимым с позиций используемого двухвыборочного критерия.

В качестве $S_{i,j}$ можно использовать статистики двухвыборочных критериев Смирнова (лучше в модифицированном виде), Лемана–Розенблата, Андерсона–Дарлинга. В этом случае распределения соответствующих статистик $S_{\max}$ сходятся к некоторым предельным, модели которых могут быть найдены по результатам статистического моделирования.

2.1. k –выборочный критерий Смирнова (max)

В качестве $S_{i,j}$ в (2.17) в этом случае будет рассматриваться модификация статистики Смирнова (2.3), распределение которой всегда ближе к предельному распределению Колмогорова $K(S)$. Статистику $S_{\max}$ в этом случае будем обозначать как $S_{\max}^{Sm}$.

При равных объёмах сравниваемых выборок распределения статистики $S_{\max}^{Sm}$ (как и в двухвыборочном варианте) обладают существенной дискретностью (см. рис. 2.28) и отличаются от асимптотических (предельных) распределений (см. рис. 2.29). Если есть такая возможность, то предпочтительней в качестве n_i выбирать взаимно простые числа, тогда распределения $G(S|H_0)$ статистики $S_{\max}^{Sm}$ практически не будут отличаться от асимптотических.

Верхние критические значения для статистики $S_{\max}^{Sm}$, построенные по эмпирическим распределениям статистик, полученным методом Монте–Карло при количестве имитационных экспериментов $N=10^6$, представлены в таблице 2.20, а в таблице 2.21 приведены построенные модели асимптотических (предельных) распределений статистики $S_{\max}^{Sm}$ при числе сравниваемых выборок $k=3\div 11$.

Представленные в таблице 2.21 модели $B_{III}(\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)$ бета-распределения 3-го рода (2.13) с приведенными значениями параметров, позволяют по значениям статистики, вычисленным в соответствии с соотношением (2.17) с использованием в качестве $S_{i,j}$ статистики Смирнова (2.1) или её модификации (2.3), находить оценки p_{value} при соответствующем числе k сравниваемых выборок.

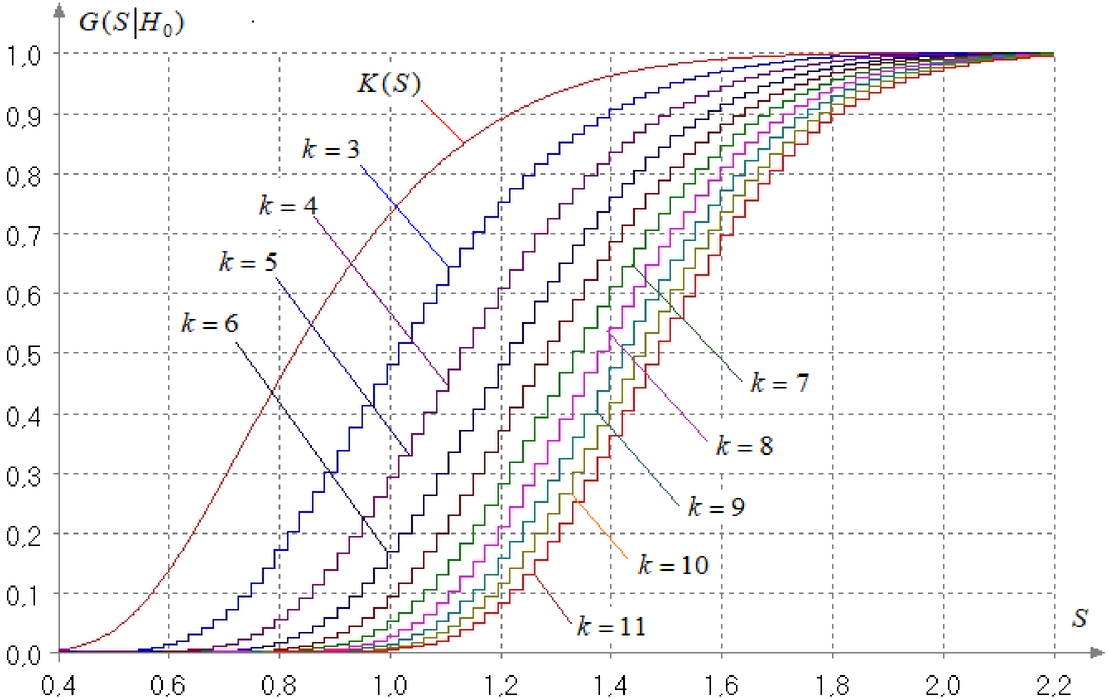


Рис. 2.28. Распределения статистики $S_{\max}^{Sm}$ k-выборочного критерия Смирнова при $n_i = 1000$, $i = \overline{1,k}$

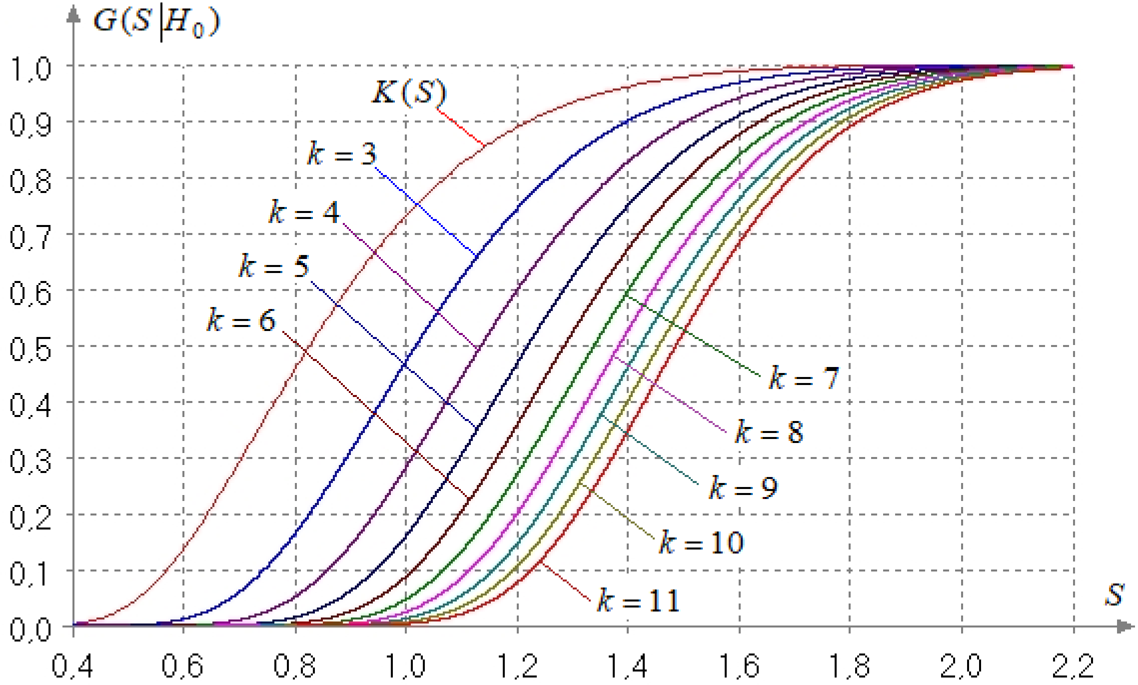


Рис. 2.29. Асимптотические распределения статистики $S_{\max}^{Sm}$ k -выборочного критерия Смирнова

Таблица 2.20

Верхние критические значения статистики $S_{\max}^{Sm}$ Смирнова

k	$1-\alpha$				
	0.75	0.90	0.95	0.975	0.99
2	1.0192	1.2238	1.3581	1.4802	1.6276
3	1.2059	1.4006	1.5266	1.6396	1.7782
4	1.3194	1.5070	1.6278	1.7372	1.8701
5	1.4002	1.5822	1.6997	1.8057	1.9329
6	1.4620	1.6396	1.7545	1.8573	1.9833
7	1.5127	1.6867	1.7989	1.9009	2.0245
8	1.5546	1.7264	1.8362	1.9362	2.0596
9	1.5911	1.7598	1.8682	1.9672	2.0879
10	1.6224	1.7893	1.8969	1.9940	2.1148
11	1.6506	1.8156	1.9217	2.0182	2.1371

Таблица 2.21

Модели предельных распределений статистики $S_{\max}^{Sm}$

k	Модель
2	$K(S)$
3	B_{III} (6.3274, 6.6162, 2.8238, 2.4073, 0.4100)
4	B_{III} (7.2729, 7.2061, 2.6170, 2.3775, 0.4740)
5	B_{III} (7.1318, 7.3365, 2.4813, 2.3353, 0.5630)
6	B_{III} (7.0755, 8.0449, 2.3163, 2.3818, 0.6320)
7	B_{III} (7.7347, 8.6845, 2.3492, 2.4479, 0.6675)
8	B_{III} (7.8162, 8.9073, 2.2688, 2.4161, 0.7120)
9	B_{III} (7.8436, 8.8805, 2.1696, 2.3309, 0.7500)
10	B_{III} (7.8756, 8.9051, 2.1977, 2.3280, 0.7900)
11	B_{III} (7.9122, 9.0411, 2.1173, 2.2860, 0.8200)

2.6.2. k –выборочный критерий Лемана–Розенблатта (max)

В качестве $S_{i,j}$ в статистике $S_{\max}^{LR}$ вида (2.17) в этом случае используется статистика (2.4) Лемана–Розенблатта. Зависимость распределений статистики при справедливости H_0 от числа выборок иллюстрирует рис. 2.30.

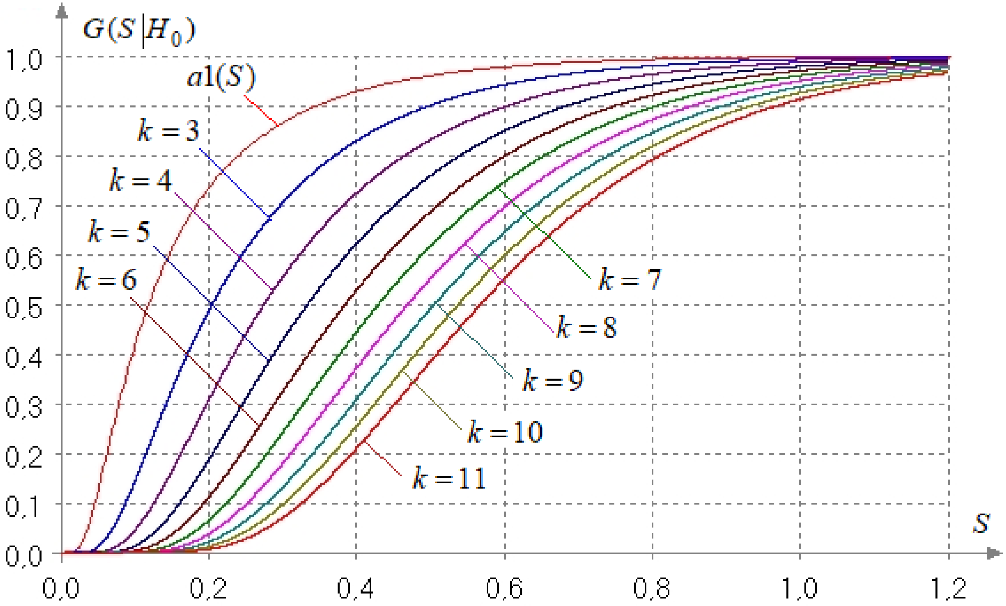


Рис. 2.30. Распределения статистики $S_{\max}^{LR}$ k -выборочного критерия Лемана–Розенблатта

Верхние критические значения для статистики $S_{\max}^{LR}$, построенные по результатам статистического моделирования при количестве имитационных экспериментов $N = 10^6$, представлены в таблице 2.24.

Построенные модели асимптотических (предельных) распределений статистики $S_{\max}^{LR}$ при числе сравниваемых выборок $k = 3 \div 11$ представлены в таблице 2.25.

Таблица 2.24

Верхние критические значения статистики $S_{\max}^{LR}$ Лемана–Розенблатта

k	$1-\alpha$				
	0.75	0.90	0.95	0.975	0.99
2	0.2094	0.3473	0.4614	0.5806	0.7435
3	0.3306	0.4995	0.6283	0.7581	0.9308
4	0.4206	0.6050	0.7413	0.8770	1.0550
5	0.4924	0.6856	0.8267	0.9653	1.1429
6	0.5521	0.7512	0.8959	1.0365	1.2175
7	0.6037	0.8072	0.9524	1.0947	1.2774
8	0.6481	0.8550	1.0015	1.1444	1.3298
9	0.6876	0.8976	1.0457	1.1902	1.3781
10	0.7237	0.9355	1.0858	1.2303	1.4171
11	0.7563	0.9703	1.1214	1.2655	1.4535

В данном случае наилучшими моделями оказались распределения Sb–Джонсона с плотностью

$$f(x)=\frac{\theta_1\theta_2}{\sqrt{2\pi}(x-\theta_3)(\theta_2+\theta_3-x)}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\theta_0-\theta_1\ln\frac{x-\theta_3}{\theta_2+\theta_3-x}\right]^2\right\}$$

при конкретных значениях параметров этого закона, обозначенного в таблице 2.25 как $Sb(\theta_0,\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4)$. Представленные модели позволяют по значениям статистики $S_{\max}^{LR}$ при соответствующем числе k сравниваемых выборок находить оценки p_{value}.

Таблица 2.25

Модели предельных распределений статистики $S_{\max}^{LR}$

k	Модель
2	$a1(t)$
3	Sb(3.2854, 1.2036, 3.0000, 0.0215)
4	Sb(2.5801, 1.2167, 2.2367, 0.0356)
5	Sb(3.1719, 1.4134, 3.1500, 0.0320)
6	Sb(2.9979, 1.4768, 2.9850, 0.0380)
7	Sb(3.2030, 1.5526, 3.4050, 0.0450)
8	Sb(3.2671, 1.6302, 3.5522, 0.0470)
9	Sb(3.4548, 1.7127, 3.8800, 0.0490)
10	Sb(3.4887, 1.7729, 3.9680, 0.0510)
11	Sb(3.4627, 1.8168, 3.9680, 0.0544)

2.6.3. k –выборочный критерий Андерсона–Дарлинга (max)

В статистике $S_{\max}^{AD}$ вида (2.17) качестве $S_{i,j}$ используется статистика (2.7) Андерсона–Дарлинга. Зависимость распределений статистики $S_{\max}^{AD}$ при справедливости H_0 от числа выборок иллюстрирует рис. 2.31.

Верхние критические значения для статистики $S_{\max}^{AD}$, построенные по результатам статистического моделирования при количестве имитационных экспериментов $N = 10^6$, представлены в таблице 2.28.

Для распределений $G(S_{\max}^{AD} \mid H_0)$ также построены модели асимптотических (предельных) распределений статистики $S_{\max}^{AD}$ для числа сравниваемых выборок $k = 3 \div 11$, которые представлены в таблице 2.29. В этом случае лучшими моделями оказались бета-распределения 3-го рода (2.13), которые в виде $\mathrm{B_{III}}(\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)$ с конкретными значениями параметров приведены в таблице 2.29 и могут использоваться для оценки p_{value} при k сравниваемых выборках.

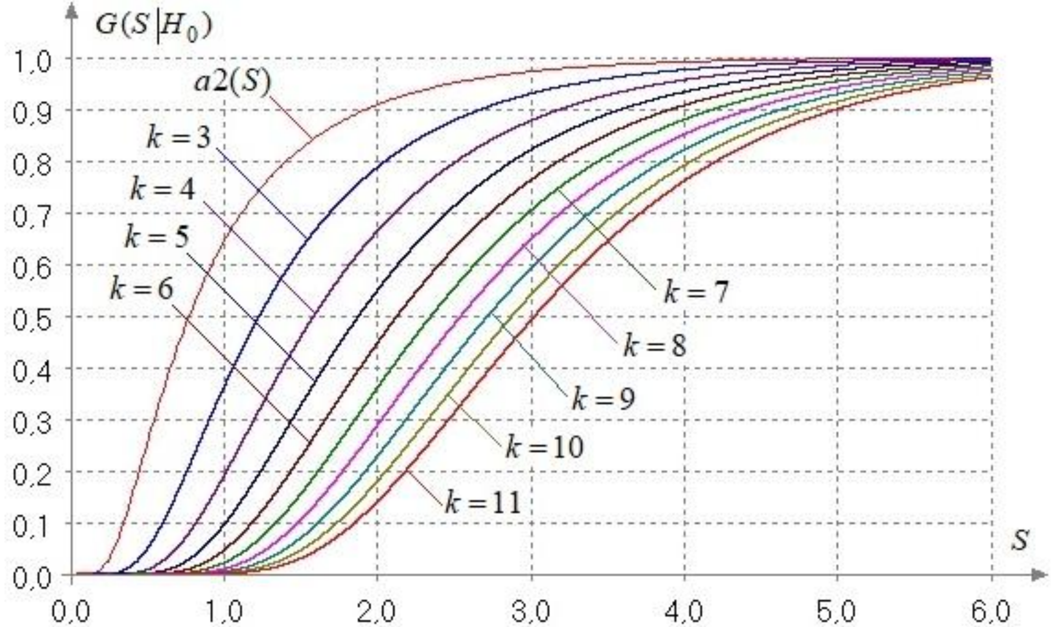


Рис. 2.31. Распределения статистики $S_{\max}^{AD}$ k-выборочного критерия Андерсона–Дарлинга

Т а б л и ц а 2.28

Верхние критические значения статистики $S_{\max}^{AD}$ Андерсона–Дарлинга

k	$1-\alpha$				
	0.75	0.90	0.95	0.975	0.99
2	1.2479	1.9330	2.4924	3.0775	3.8781
3	1.8535	2.6796	3.31215	3.95176	4.7924
4	2.2990	3.1966	3.8682	4.5368	5.4076
5	2.6514	3.5948	4.2877	4.9686	5.8472
6	2.9431	3.9187	4.6292	5.3175	6.2089
7	3.1943	4.1950	4.9097	5.6063	6.5118
8	3.4135	4.4292	5.1501	5.8531	6.7710
9	3.6094	4.6395	5.3660	6.0733	7.0076
10	3.7867	4.8270	5.5616	6.2720	7.2042
11	3.9466	4.9974	5.7384	6.4512	7.3837

Таблица 2.29

Модели предельных распределений статистики $S_{\max}^{AD}$

k	Модель
2	$a2(t)$
3	B_{III} (4.4325, 2.7425, 12.1134, 8.500, 0.1850)
4	B_{III} (5.2036, 3.2160, 10.7792, 10.000, 0.2320)
5	B_{III} (5.7527, 3.3017, 9.7365, 10.000, 0.3000)
6	B_{III} (5.5739, 3.4939, 7.7710, 10.000, 0.3750)
7	B_{III} (6.4892, 3.6656, 8.0529, 10.500, 0.3920)
8	B_{III} (6.3877, 3.8143, 7.3602, 10.800, 0.4800)
9	B_{III} (6.7910, 3.9858, 7.1280, 11.100, 0.5150)
10	B_{III} (6.7533, 4.2779, 6.6457, 11.700, 0.5800)
11	B_{III} (7.1745, 4.3469, 6.6161, 11.800, 0.6100)

2.7. Критерий однородности χ^2

Пусть имеется k выборок $x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in_i}$, $i = \overline{1,k}$, непрерывных случайных величин и $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$. Общая область, которой принадлежат выборки, разбивается на r интервалов (групп). Пусть η_{ij} – количество элементов i-й выборки, попавших в j-й интервал, тогда $n_i = \sum_{j=1}^{r} \eta_{ij}$.

Статистика критерия однородности χ^2 имеет вид

$$\chi^2 = n \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{r} \frac{(\eta_{ij} - \nu_j n_i / n)^2}{\nu_j n_i} = n \left(\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{r} \frac{\eta_{ij}^{\;2}}{\nu_j n_i} - 1 \right), \tag{2.19}$$

где $\nu_j = \sum_{l=1}^{k} \eta_{lj}$ – общее число элементов всех выборок, попавших j-й интервал.

Асимптотическим распределением статистики (2.19) является χ^2-распределение с числом степеней свободы $(k-1)(r-1)$.

2.8. Примеры применения

Рассмотрим применение рассмотренных в разделе критериев проверки однородности законов на примере анализа 3-х нижеприведенных выборок, каждой объёмом в 40 наблюдений.

0.321	0.359	-0.341	1.016	0.207	1.115	1.163	0.900	-0.629	-0.524
-0.528	-0.177	1.213	-0.158	-2.002	0.632	-1.211	0.834	-0.591	-1.975
-2.680	-1.042	-0.872	0.118	-1.282	0.766	0.582	0.323	0.291	1.387
-0.481	-1.366	0.351	0.292	0.550	0.207	0.389	1.259	-0.461	-0.283

0.890	-0.700	0.825	1.212	1.046	0.260	0.473	0.481	0.417	1.825
1.841	2.154	-0.101	1.093	-1.099	0.334	1.089	0.876	2.304	1.126
-1.134	2.405	0.755	-1.014	2.459	1.135	0.626	1.283	0.645	1.100
2.212	0.135	0.173	-0.243	-1.203	-0.017	0.259	0.702	1.531	0.289

0.390	0.346	1.108	0.352	0.837	1.748	-1.264	-0.952	0.455	-0.072
-0.054	-0.157	0.517	1.928	-1.158	-1.063	-0.540	-0.076	0.310	-0.237
-1.109	0.732	2.395	0.310	0.936	0.407	-0.327	1.264	-0.025	-0.007
0.164	0.396	-1.130	1.197	-0.221	-1.586	-0.933	-0.676	-0.443	-0.101

Эмпирические распределения, соответствующие данным выборкам, представлены на рис. 2.32

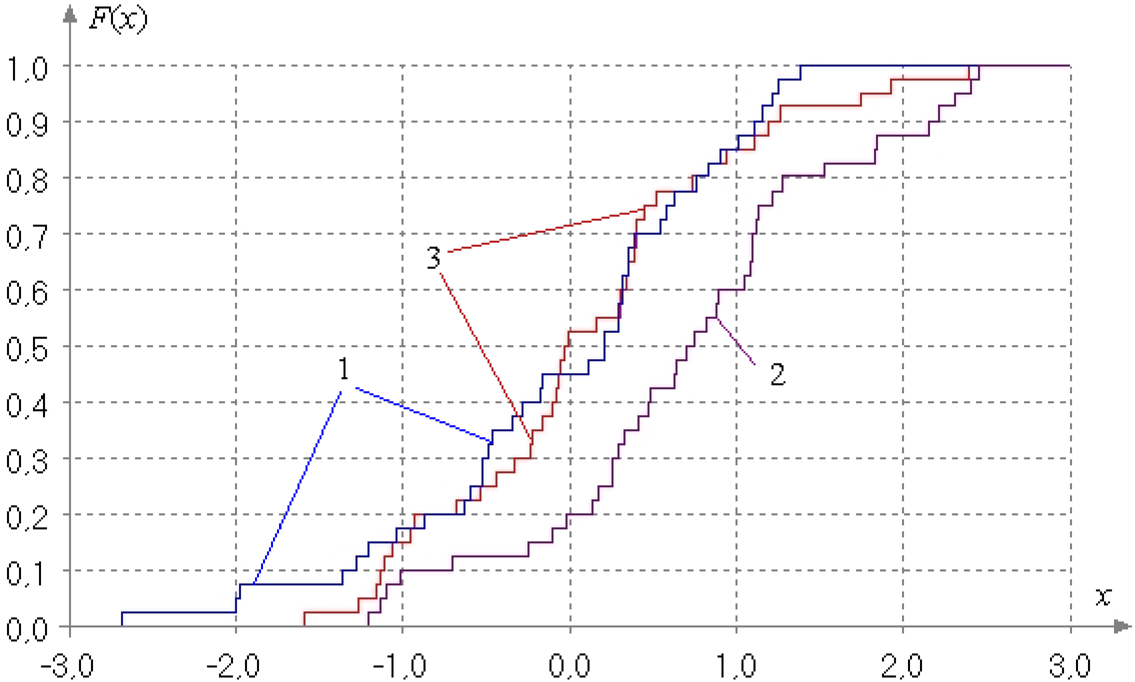


Рис. 2.32. Эмпирические распределения, соответствующие выборкам

Проверим гипотезу об однородности 1-й и 2-й выборок.

В таблице 2.35 приведены результаты проверки: значения статистик критериев и достигнутые уровни значимости p_{value}.

Оценки p_{value} вычислялись по значению статистики в соответствии с распределением $a2(t)$ для критерия Андерсона–Дарлинга, в соответствии с распределением $a1(t)$ для критерия Лемана–Розенблатта, в соответствии с распределением $K(t)$ для критерия Смирнова, в соответствии с бета-распределением 3-го рода из таблицы 2.8 при $k = 2$ для k-выборочного критерия Андерсона–Дарлинга. Распределения статистик (2.12), (2.13) и (2.14) критериев Жанга и оценки p_{value} находились в результате моделирования.

По приведенным оценкам p_{value} очевидно, что гипотеза об однородности по всем критериям должна быть отклонена.

Таблица 2.35

Результаты проверки однородности 1-й и 2-й выборок

Критерий	Статистика	p_{value}
Андерсона–Дарлинга	5.19801	0.002314
k-выборочный Андерсона–Дарлинга	5.66112	0.003260
Лемана–Розенблатта	0.9650	0.002973
Смирнова	1.56525	0.014893
Смирнова модифицированный	1.61386	0.010933
Жанга Z_A	2.99412	0.0007
Жанга Z_C	2.87333	0.0008
Жанга Z_K	5.58723	0.0150
χ^2, $r = 10$	16.3254	0.06039
χ^2, $r = 8$	13.3293	0.06448

В таблице 2.36 приведены результаты проверки гипотезы об однородности 1-й и 3-й выборок.

Здесь оценки p_{value} по всем критериям очень высокие, поэтому проверяемая гипотеза об однородности не должна отклоняться.

Таблица 2.36

Результаты проверки однородности 1-й и 3-й выборок

Критерий	Статистика	p_{value}
Андерсона–Дарлинга	0.49354	0.753415
k -выборочный Андерсона–Дарлинга	-0.68252	0.767770
Лемана–Розенблатта	0.0500	0.876281
Смирнова	0.447214	0.989261
Смирнова модифицированный	0.495824	0.966553
Жанга Z_A	3.1998	0.332
Жанга Z_C	3.07077	0.384
Жанга Z_K	1.7732	0.531
χ^2, $r = 10$	11.6508	0.23372
χ^2, $r = 8$	4.0000	0.7798

В таблице 2.37 показаны результаты проверки гипотезы об однородности трёх рассматриваемых выборок по k-выборочному критерию Андерсона–Дарлинга, по критериям Жанга и по критериям со статистиками $S_{\max}^{Sm}$, $S_{\max}^{LR}$, $S_{\max}^{AD}$.

Таблица 2.37

Результаты проверки однородности 3-х выборок

Критерий	Статистика	p_{value}
k-выборочный Андерсона–Дарлинга	4.73219	0.0028
Жанга Z_{A}	3.02845	0.0016
Жанга Z_C	2.92222	0.0017
Жанга Z_{K}	7.00231	0.0218
max Андерсона–Дарлинга	5.19801	0.0064
max Лемана–Розенблатта	0.9650	0.0094
max Смирнова модифицированный	1.72566	0.0144
χ^2, $r=10$	25.556	0.1104
χ^2, $r=8$	19.200	0.1574

В этом случае оценка p_{value}:

– для критерия Андерсона–Дарлинга вычислялась в соответствии с бета-распределением 3-го рода из таблицы 2.8 при $k=3$;
– для критериев Жанга – на основании статистического моделирования, проведенного в интерактивном режиме, при числе имитационных экспериментов $N=10^6$;
– для критерия со статистикой $S_{\max}^{Sm}$ оценка p_{value} при $k=3$ вычислялась в соответствии с бета-распределением 3-го рода из таблицы 2.21;
– для критерия со статистикой $S_{\max}^{LR}$ – в соответствии с распределением Sb-Джонсона из таблицы 2.25;
– для критерия со статистикой $S_{\max}^{AD}$ – в соответствии с бета-распределением 3-го рода из таблицы 2.29.

Заметим, что критерии Андерсона–Дарлинга $S_{\max}^{AD}$ и Лемана–Розенблатта $S_{\max}^{LR}$ зафиксировали максимальное отклонении между 1-й и 2-й выборками, а критерий Смирнова $S_{\max}^{Sm}$ – между 2-й и 3-й. Общий результат показывает, что проверяемая гипотеза об однородности 3-х выборок должна быть отклонена.

Можно обратить внимание на существенную зависимость результатов проверки по критерию однородности χ^2 от выбираемого числа интервалов r.

В данном случае результаты проверки были достаточно предсказуемы, так как 1-я и 3-я выборки были смоделированы в соответствии со стандартным нормальным законом, а полученные значения псевдослучайных величин округлены до 3-х значащих цифр после десятичной точки. В то время как 2-я выборка получена в соответствии с нормальным законом с параметром сдвига 0.5 и стандартным отклонением 1.1.

2.8. Сравнительный анализ мощности критериев

В случае k выборок относительно изменения параметра сдвига порядок предпочтения критериев имеет вид [136]:

$$S_{\max}^{AD} \succ \text{Андерсона–Дарлинга} \succ S_{\max}^{LR} \succ S_{\max}^{Sm} \succ \text{Жанга } Z_C \succ \text{Жанга } Z_{\text{А}} \succ \text{Жанга } Z_{\text{К}} \succ \chi^2 .$$

Относительно изменения параметра масштаба –

$$\text{Жанга } Z_C \succ \text{Жанга } Z_{\text{А}} \succ \text{Жанга } Z_{\text{К}} \succ \text{Андерсона–Дарлинга} \succ \chi^2 \succ S_{\max}^{AD} \succ S_{\max}^{Sm} \succ S_{\max}^{LR} .$$

При этом критерии Жанга со статистиками $Z_{\text{А}}$ и Z_C практически эквивалентны по мощности, а критерий Андерсона–Дарлинга заметно уступает критериям Жанга.

Относительно ситуации, когда три выборки принадлежат нормальному закону, а четвёртая – логистическому, критерии располагаются по мощности в следующем порядке:

$$\text{Жанга } Z_{\text{А}} \succ \text{Жанга } Z_C \succ \text{Жанга } Z_{\text{К}} \succ \chi^2 \succ \text{Андерсона–Дарлинга} \succ S_{\max}^{Sm} \succ S_{\max}^{AD} \succ S_{\max}^{LR} .$$

КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ ОДНОРОДНОСТИ СРЕДНИХ

К критериям проверки гипотез об однородности математических ожиданий (об однородности средних) прибегают при контроле средств измерений, при статистическом анализе результатов экспериментов, при статистическом управлении качеством для проверки наличия возмущения в ходе процесса.

В общем случае проверяемая гипотеза о равенстве математических ожиданий, соответствующих k выборкам, имеет вид

$$H_0:\ \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_k$$

при конкурирующей гипотезе

$$H_1:\ \mu_{i_1} \neq \mu_{i_2},$$

где неравенство выполняется хотя бы для одной пары индексов i_1, i_2.

Для проверки гипотезы H_0 может использоваться ряд параметрических критериев: сравнения двух выборочных средних при известных дисперсиях; сравнения двух выборочных средних при неизвестных, но равных дисперсиях (критерий Стьюдента); сравнения двух выборочных средних при неизвестных и неравных дисперсиях; F-критерий.

В этих же целях применяется целая совокупность непараметрических критериев: критерий Уилкоксона, критерий Манна–Уитни, критерий Краскела–Уаллиса, критерий Ван дер Вардена, Критерий Фишера–Йэйтса–Терри–Гёфдинга, k - выборочный критерий Ван дер Вардена.

Основным предположением, обусловливающим возможность применения параметрических критериев, является принадлежность анализируемых выборок нормальному закону. Непараметрические критерии свободны от этого требования.

Параметрические критерии однородности средних устойчивы к нарушению предположения о нормальности. Лишь асимметричность законов распределения или наличие “тяжелых хвостов” приводит к существенному изменению предельных распределений параметрических критериев.

С устойчивостью критерия связана причина того, что параметрические критерии, как правило, имеют незначительное преимущество в мощности перед непараметрическими критериями однородности средних.

КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ ОДНОРОДНОСТИ ДИСПЕРСИЙ

Применение классических критериев проверки однородности дисперсий всегда сопряжено с вопросом: насколько полученные выводы корректны в данной конкретной ситуации?

Одним из основных предположений при построении этих критериев является принадлежность наблюдаемых случайных величин (погрешностей измерений) нормальному закону распределения.

При этом давно известно, что параметрические критерии однородности дисперсий чрезвычайно чувствительны к малейшим отклонениям наблюдаемых случайных величин от нормального закона. При нарушении данного предположения условные распределения статистик критериев при справедливости проверяемой гипотезы, как правило, сильно изменяются.

В критериях проверки однородности дисперсий проверяемая гипотеза о постоянстве дисперсий k выборок имеет вид

$$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \ldots = \sigma_k^2 ,$$

а конкурирующая с ней гипотеза

$$H_1: \sigma_{i_1}^2 \neq \sigma_{i_2}^2 ,$$

где неравенство выполняется, по крайней мере, для одной пары индексов i_1, i_2 .

Для проверки однородности дисперсий могут использоваться классические параметрические критерии Бартлетта, Кокрена, Фишера, Хартли, Левене, Неймана–Пирсона (критерия отношения правдоподобия), О`Брайена, Линка, Ньюмана, Блиса–Кокрена–Тьюки, Кадуэлла–Лесли–Брауна, Z–критерий Оверолла–Вудворда и его модификация, Миллера, Лайарда.

Непараметрические (ранговые) критерии: Ансари–Бредли, Муда, Сижела–Тьюки, Кейпена, Клотца, k-выборочный критерий Флайне–Киллина.

В случае анализа двух выборок и выполнении стандартного предположения о нормальности наибольшей и одинаковой мощностью относительно тех же конкурирующих гипотез обладают критерии Фишера, Бартлетта, Кокрена, Хартли, Неймана–Пирсона и Z–критерий Оверолла–Вудворда.

Далее в порядке убывания мощности следует группа устойчивых критериев О`Брайена, модифицированный Z-критерий, Левене.

Наименее перспективна для применения группа параметрических критериев Ньюмана, Блисса–Кокрена–Тьюки, Кадуэлла–Лесли–Брауна, Линка, которая уступает в мощности даже непараметрическим критериям, имея перед последними некоторое преимущество в мощности лишь при очень малых объёмах выборок.

Среди непараметрических критериев наибольшей мощностью обладает критерий Клотца, затем идёт критерий Флайне–Киллина, потом критерий Муда, который уже заметно уступает критериям Фишера, Бартлетта, Кокрена, Хартли, Неймана–Пирсона, Z–критерию Оверолла–Вудворда, О`Брайена, модифицированному Z-критерию и Левене.

В случае нарушения стандартного предположения и принадлежности двух выборок законам с более легкими хвостами, чем у нормального закона, вышеуказанный порядок предпочтительности сохраняется.

При симметричных законах с более тяжелыми хвостами по сравнению с нормальным законом (в случае двух выборок) критерии упорядочиваются следующим образом:

Флайне–Киллина $\succ$ Клотца $\succ$ Муда $\succ$ Левене $\succ$ Сижела–Тьюки ~ Ансари–Бредли $\succ$ Лайарда $\succ$ О'Брайена $\succ$ Миллера $\succ$ Модифицированный Z–критерий $\succ$ ***группа критериев*** *(Бартлетта, Кокрена, Хартли, Фишера, Неймана–Пирсона, Z–критерий Оверолла–Вудворда) $\succ$ Ньюмана $\succ$* ***группа критериев*** *(Блисса–Кокрена–Тьюки, Кадуэлла–Лесли–Брауна, Линка)*

Если анализируется большее число выборок, то при выполнении стандартного предположения или в случае принадлежности выборок законам с более лёгкими хвостами по сравнению с нормальным законом критерии по убыванию мощности располагаются в следующем порядке:

Кокрена $\succ$ О'Брайена $\succ$ Z–критерий Оверолла–Вудворда $\succ$ Модифицированный Z–критерий $\succ$ ***группа критериев*** *(Бартлетта, Неймана–Пирсона) $\succ$ Хартли $\succ$ Миллера $\succ$ Лайарда $\succ$ Левене $\succ$ Флайне–Киллина $\succ$ Блисса–Кокрена–Тьюки $\succ$ Кадуэлла–Лесли–Брауна.*

Надо отметить, что при симметричных законах с более лёгкими хвостами критерий Левене уступает в мощности критерию Флайне–Киллина.

При симметричных законах с более тяжелыми хвостами ситуация меняется:

Флайне–Киллина $\succ$ Левене $\succ$ О'Брайена $\succ$ Лайарда $\succ$ Модифицированный Z–критерий $\succ$ Миллера $\succ$ ***группа критериев*** *(Бартлетта, Неймана–Пирсона) $\succ$ Z–критерий Оверолла–Вудворда $\succ$ Хартли $\succ$ Кокрена $\succ$ Кадуэлла–Лесли–Брауна $\succ$ Блисса–Кокрена–Тьюки.*

Основной недостаток параметрических критериев связан с тем, что классические результаты обеспечивают корректность применения данных критериев лишь при выполнении предположения о принадлежности анализируемых выборок нормальным законам, так как только для этой ситуации известны распределения статистик рассмотренных параметрических критериев или таблицы процентных точек. Этот недостаток можно преодолеть, используя компьютерные технологии для исследования распределений статистик и оценки p_{value}.

Непараметрические критерии также не свободны от недостатков.

Во-первых, при их использовании, как правило, предполагается равенство средних.

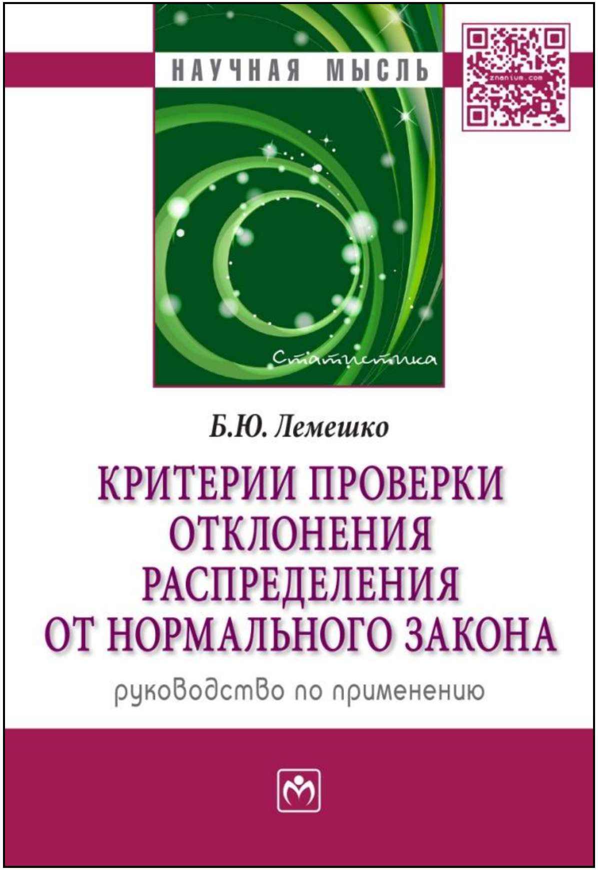
Во-вторых, корректность их применения обеспечивается в случае принадлежности анализируемых выборок закону распределения вероятностей одного и того же вида. По существу, при справедливости проверяемой гипотезы о равенстве дисперсий, соответствующих двум выборкам, распределение статистики известно для случая однородности законов этих выборок. Выполнение этих условий несколько сужает область корректного использования непараметрических критериев.

В-третьих, непараметрические критерии обладают заметно меньшей мощностью по сравнению с параметрическими.

Действие параметрических критериев при необходимости можно распространить на ситуации, когда выборки описываются законами, отличающимися от нормального, воспользовавшись методикой компьютерного моделирования для исследования распределений статистик и построения для этих распределений моделей или таблиц процентных точек. Из рассмотренных критериев в наибольшей степени на эту роль подходит критерий Кокрена.

1. **Лемешко Б. Ю. Непараметрические критерии согласия. Руководство по применению: Монография. – М.: ИНФРА-М, 2014. – 163 с**.

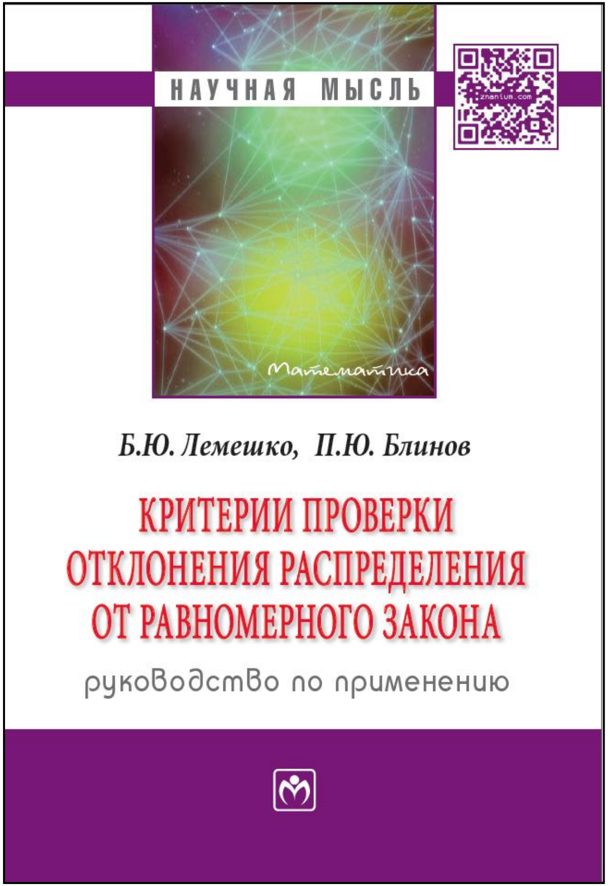
DOI: 10.12737/11873



2. **Лемешко Б. Ю. Критерии проверки отклонения распределения от нормального закона. Руководство по применению: Монография. – М.: ИНФРА-М, 2015. – 160 с**. – (Научная мысль).

DOI: 10.12737/6086

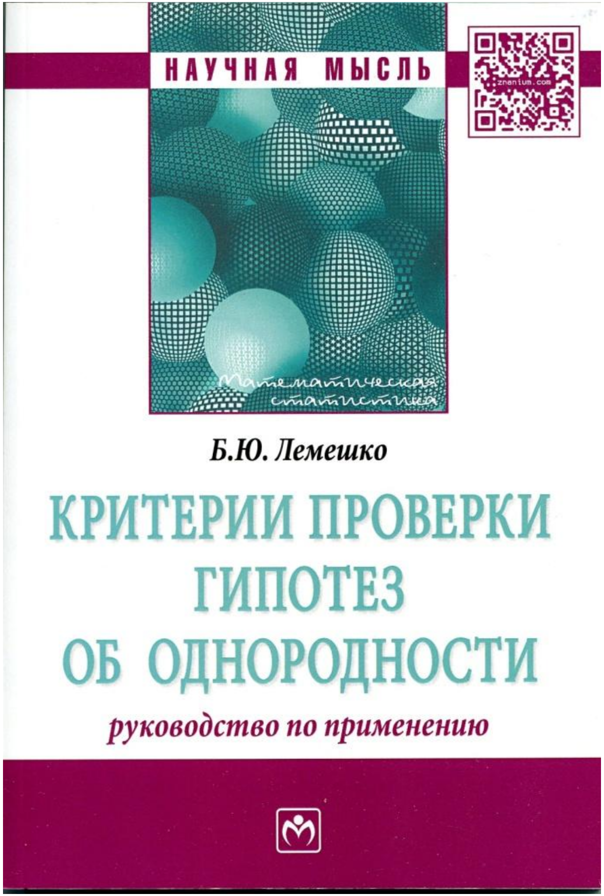
Показаны достоинства и недостатки 16 специальных критериев, ориентированных только на проверку нормальности (**в ISW их более 25**), а также применение для проверки нормальности непараметрических критериев согласия и критериев типа хи-квадрат.
Приводятся результаты сравнительного анализа критериев.



3. **Лемешко Б. Ю., Блинов П. Ю. Критерии проверки отклонения распределения от равномерного закона. Руководство по применению: Монография. – М.: ИНФРА-М, 2015. – 183 с**. – (Научная мысль).

DOI: 10.12737/11304

Показаны достоинства и недостатки 17 специальных критериев, ориентированных только на проверку равномерности (**в ISW их около 25**), а также применение для проверки равномерности непараметрических критериев согласия и критериев типа хи-квадрат.
Приводятся результаты сравнительного анализа критериев.



4. **Лемешко Б. Ю. Критерии проверки гипотез ободнородности. Руководство по применению: Монография. – М.: ИНФРА-М, 2017. – 207 с**.

DOI: 10.12737/22368

Рассмотрено применение двухвыборочных критериев однородности законов распределения Смирнова, Леманга–Розенблатта, Андрсона–Дарлинга–Петита, *k*-выборочного критерия Андерсона–Дарлинга. Для последнего приводятся модели предельных распределений статистики для различных *k*. В расширенном издании (**2019 год**) рассмотрено также применение 3-х критериев однородности Жанга и предложены новые *k*-выборочные критерии на основе двухвыборочных с построенными моделями предельных распределений статистик.

Приведены результаты сравнительного анализа 9 параметрических и непараметрических критериев однородности средних.

Приведены результаты сравнительного анализа 19 (**21 в издании 2019 г**.) параметрических и непараметрических критериев однородности дисперсий.

В ISW реализуется корректное применение параметрических критериев в условиях нарушения стандартного предположения о нормальности.

References

1. *Лемешко Б. Ю.* Об ошибках, совершаемых при использовании непараметрических критериев согласия / Б. Ю. Лемешко // Измер. техника. 2004. – № 2. – С. 15–20.
2. *Lemeshko B. Yu*. Errors when using nonparametric fitting criteria / B. Yu. Lemeshko // Measurement Techniques. – 2004. – Vol. 47, №. 2. – P. 134–142.
3. *Kolmogoroff A. N.* Sulla determinazione empirica di una legge di distribuzione / A. N. Kolmogoroff // G. Ist. Ital. attuar. – 1933. – Vol. 4. – № 1. – P. 83–91.
4. *Большев Л. Н.* Асимптотические пирсоновские преобразования / Л. Н. Большев // Теория вероятностей и ее применение. – 1963. – Т. 8, № 2. – С. 129–155.
5. *Большев Л. Н.* Теория вероятностей и математическая статистика : избр. тр. / Л. Н. Большев ; под ред. Ю. В. Прохорова. – М. : Наука, 1987. – 286 с.
6. *Большев Л. Н.* Таблицы математической статистики / Л. Н. Большев, Н. В. Смирнов. – М. : Наука, 1983. – 416 с.
7. *Anderson T. W.* A test of goodness of fit / T. W. Anderson, D. A. Darling // J. Amer. Stist. Assoc. – 1954. – Vol. 29. – P. 765–769.
8. *Anderson T. W.* Asymptotic theory of certain “Goodness of fit” criteria based on stochastic processes / T. W. Anderson, D. A. Darling // AMS. – 1952. – Vol. 23. – P. 193–212.
9. *Kuiper N.H.* Tests concerning random points on a circle / N. H. Kuiper // Proc. Konikl. Nederl. Akad. Van Wettenschappen. – 1960. Series A – V. 63. – P.38-47.
10. *Stephens M. A.* EDF statistics for goodness of fit and some comparisons / M. A. Stephens // J. Am. Statist. Assoc. – 1974. – Vol. 69. – No. 347. – P. 730–737.
11. *Лемешко Б. Ю.* О применении и мощности непараметрических критериев согласия Купера, Ватсона и Жанга / Б. Ю. Лемешко, А. А. Горбунова // Измерительная техника. – 2013. – № 5. – С. 3-9.
12. *Watson G. S.* Goodness-of-fit tests on a circle. I. / G. S. Watson // Biometrika. – 1961. – V. 48. – No. 1-2. – P.109-114.
13. *Watson G. S.* Goodness-of-fit tests on a circle. II. / G. S. Watson // *Biometrika*. – 1962. – V. 49. – No. 1-2. – P.57- 63.
14. *Zhang J.* Powerful goodness-of-fit and multi-sample tests / J. Zhang // PhD Thesis. York University, Toronto. 2001. – 113 p. URL: http://www.collectionscanada.gc.ca/obj/s4/f2/dsk3/ftp05/NQ66371.pdf (дата обращения 28.01.2013).
15. *Zhang J.* Powerful goodness-of-fit tests based on the likelihood ratio / J. Zhang // Journal of the Royal Statistical Society: Series B. – 2002. – V. 64. – № 2. – P.281-294.

16. *Zhang J.* Likelihood-ratio tests for normality / J. Zhang, Yu. Wub // Computational Statistics & Data Analysis. –. V. 49. – No. 3. – P.709-721.
17. *Kac M.* On tests of normality and other tests of goodness of fit based on distance methods / M. Kac, J. Kiefer, J. Wolfowitz // Ann. Math. Stat. – 1955. – Vol. 26. – P. 189–211.
18. *Никулин М. С.* О критерии хи-квадрат для непрерывных распределений / М. С. Никулин // Теория вероятностей и ее применение. – 1973. – Т. 18. – № 3. – С.675-676.
19. *Никулин М. С.* Критерий хи-квадрат для непрерывных распределений с параметрами сдвига и масштаба / М. С. Никулин // Теория вероятностей и ее применение. – 1973. – Т. 18. – № 3. – С.583-591.
20. *Rao K.C.* A chi-squared statistic for goodness-of-fit tests within the exponential family / K. C. Rao, D. S. Robson // Comm. Statist. – 1974. – V. 3. – № 12. – P.1139-1153.
21. *Ansari A. R.* Rank-tests for dispersions / A. R. Ansari, R. A. Bradley // AMS. – 1960. – Vol. 31, № 4. – P. 1174–1189.
22. *Bartlett M. S.* Properties of sufficiency of statistical tests / M. S. Bartlett // Proc. Roy. Soc. – 1937. – A 160. – P. 268–287.
23. *Behrens W. U.* Ein Beitrag Zur Fehlerberechnung bei wenigen Beobachtungen // Landw. Jb., 1929. B. 68, – S. 807-837.
24. *Bliss C.I., Cochran W.G., Tukey J.W.* A rejection criterion based upon the range // Biometrika. 1956. Vol. 43. No. 3/4. – P. 418-422.
25. *Brown M. B.* Robust Tests for Equality of Variances / M. B. Brown, A. B. Forsythe // J. Amer. Statist. Assoc. – 1974. – Vol. 69. – P. 364–367.
26. *Capon J.* Asymptotic efficiency of certain locally most powerful rank tests / J. Capon // AMS. – 1961. – Vol. 32, № 1. – P. 88–100.
27. *Chen S., Pokojovy M.* Modern and classical *k*-sample omnibus tests // Wiley Online Library, 2017. DOI: 10.1002/wics.1418
28. *Cochran W. G.* The distribution of the largest of a set of estimated variances as a fraction of their total / W. G. Cochran // Annals of Eugenics. – 1941. – Vol. 11. – P. 47–52.
29. *Conover W. J.* Several k-sample Kolmogorov-Smirnov tests // The Annals of Mathematical Statistics. – 1965. – Vol. 36, No. 3. – P.1019-1026.
30. *Conover W. J.* Practical Nonparametric Statistics / W. J. Conover. – 3d ed. – Wiley, 1999. – 584 p.
31. *Conover W.J., Johnson M.E., Johnson M.M.* A comparative study of tests for homogeneity of variances, with applications to the outer continental shelf bidding data // Technometrics. – 1981. – Vol. 23, No. 4. – P. 351-361.

32. *Cox M.G.* The evaluation of key comparison data // Metrologia.2002. Vol. 39. No. 6. – P.589-585. DOI: 10.1088/0026-1394/39/6/10
33. *Cox M.G.* The evaluation of key comparison data: determining the largest consistent subset // Metrologia. 2007. Vol. 44. No. 3. – P.187-200. DOI: 10.1088/0026-1394/44/3/005
34. *Fisher R. A.* The fiducial argument in statistical inference // Annals of Eugenics, Lond., 1935. Vol. **6**, No. 4. – P. 391-398.
35. *Fisher R. A.* The asymptotic approach to Behrens's integral, with further tables for the *d* test of significance // Annals of Eugenics, Lond., 1941. Vol. **11**. – P. 141-172.
36. *Fisher R.A., Yates F.* Statistical tables for biological, agricultural and medical research. London & Edinburgh: Oliver and Boyd, 1948.
37. *Fligner M.A., Killeen T.J.* Distribution-Free Two-Sample Tests for Scale // Journal of American Statistical Association. 1976. Vol. 71. No. 353. – P.210-213.
38. *Gorbunova A. A.* Classical tests of variances homogeneity for non-normal distributions / A. A. Gorbunova, S. B. Lemeshko, B. Yu. Lemeshko // Proceedings Third International Conference on Accelerated Life Testing, Reliability-based Analysis and Design. 19-21 May 2010. – Clermont-Ferrand, France. – P. 117–124.
39. *Gorbunova A.A., Lemeshko B.Yu.* Application of Variance Homogeneity Tests Under Violation of Normality Assumption // Proceedings of the International Workshop "Applied Methods of Statistical Analysis. Simulations and Statistical Inference" – AMSA'2011, Novosibirsk, Russia, 20-22 September, 2011. P. 28-36.
40. *Gorbunova A.A., Lemeshko B.Yu*. Application of Parametric Homogeneity of Variances Tests under Violation of Classical Assumption // Proceedings, 2nd Stochastic Modeling Techniques and Data Analysis International Conference. 5 - 8 June 2012, Chania, Crete, Greece. P.253-260. (http://www.smtda.net/images/1_SMTDA2012_Proceedings_D-J_119-338.pdf)
41. *Hartley H. O.* The maximum F-ratio as a short-cut test of heterogeneity of variance / H. O. Hartley // Biometrika. – 1950. – Vol. 37. – P. 308–312.
42. *Hines W.* Increased power with modified forms of the Levene (Med) test for heterogeneity of variance / W. Hines, R. Hines // Biometrics. – 2000. – Vol. 56. – P. 451–454.
43. *Hoeffding W.* Optimum non-parametric test // Proc.11 th Berkeley Symp., 1950. – P.83-82.
44. *Hollander M.* Non-parametric Statistical Methods / M. Hollander, D. A. Wolfe. – 2nd ed. – New York : Wiley, 1999.

45. *Kiefer J.* K-Sample Analogues of the Kolmogorov-Smirnov and Cramer-v. Mises Tests // Annals of Mathematical Statistics**,** 1959. Vol. 30. No. 2. – P. 420-447.
46. *Klotz J.* Nonparametric tests for scale / J. Klotz // AMS. – 1962. – Vol. 33. – P. 498–512.
47. *Kruskal W. H.* Use of ranks in one-criterion variance analysis / W. H. Kruskal, W. A. Wallis // J. Amer. Statist. Assoc. – 1952. – Vol. 47. – P. 583–621.
48. *Kruskal W. H.* Use of ranks in one-criterion variance analysis / W. H. Kruskal, W. A. Wallis // J. Amer. Statist. Assoc. – 1953. – Vol. 48. – P. 907–911.
49. *Laubsher N. F.* Exact critical Values for Mood`s distribution-free test statistic for dispersion and its normal approximation / N. F. Laubsher, F. E. Steffens, E. M. De Lange // Technometrics. – 1968. – Vol. 10, № 3. – P. 497–508.
50. *Layard M.W.J.* Robust large-sample tests for homogeneity of variances // Journal of the American Statistical Association. – 1973. – Vol. 68. – P. 195–198.
51. *Lee H.B., Katz G.S., Restori A.F.* A Monte Carlo Study of Seven Homogeneity of Variance Tests // Journal of Mathematics and Statistics. 2010. Vol. 6, No. 3. P. 359-366.
52. *Lehman S.* Exact and approximate distributions for the Wilcoxon statistic with ties // Journal of the American Statistical Association. 1961. Vol. 56. – P. 293-988.
53. *Lehmann E. L.* Consistency and unbiasedness of certain nonparametric tests / E. L. Lehmann // Ann. Math. Statist. – 1951. – Vol. 22, № 1. – P. 165–179.
54. *Lemeshko B. Y.* Application of Homogeneity Tests: Problems and Solution / B. Y. Lemeshko, I. V. Veretelnikova, S. B. Lemeshko, A. Y. Novikova // In: Rykov V., Singpurwalla N., Zubkov A. (eds) Analytical and Computational Methods in Probability Theory. ACMPT 2017. Lecture Notes in Computer Science. : monograph. - Cham : Springer, 2017. - 10684. - P. 461-475.
55. *Lemeshko B.* Bartlett and Cochran tests in measurements with probability laws different from normal / B. Lemeshko, E. Mirkin // Measurement Techniques. – 2004. – Vol. 47, № 10. – P. 960–968.
56. *Lemeshko B. Yu.* Distribution models for nonparametric tests for fit in verifying complicated hypotheses and maximum-likelihood estimators. P. 1 / B. Yu. Lemeshko, S. B. Lemeshko // Measurement Techniques. – 2009. – Vol. 52, № 6. – P. 555–565.
57. *Lemeshko B. Yu.* Models for statistical distributions in nonparametric fitting tests on composite hypotheses based on maximum-likelihood estimators. P. II / B. Yu. Lemeshko, S. B. Lemeshko // Measurement Techniques. – 2009. – Vol. 52, № 8. – P. 799–812.

58. *Lemeshko B. Yu.* Power and robustness of criteria used to verify the homogeneity of means / B. Yu. Lemeshko, S. B. Lemeshko // Measurement Techniques. – 2008. – Vol. 51, № 9. – P. 950–959.
59. *Lemeshko B. Yu.* Statistical distribution convergence and homogeneity test power for Smirnov and Lehmann–Rosenblatt tests / B. Yu. Lemeshko, S. B. Lemeshko // Measurement Techniques – 2005. – Vol. 48, № 12. – P. 1159–1166.
60. *Lemeshko B.Yu.* Application and power of criteria for testing the homogeneity of variances. Part I. Parametric criteria / B. Yu. Lemeshko, S. B. Lemeshko, A. A. Gorbunova // Measurement Techniques. – 2010. – Vol. 53, № 3. – P. 237–246.
61. *Lemeshko B.Yu., Lemeshko S.B., and A.A. Gorbunova*. Application and power of criteria for testing the homogeneity of variances. Part II. Nonparametric criteria // Measurement Techniques, Vol. 53, No. 5, 2010. P.476-486. DOI: 10.1007/s11018-010-9530-x
62. *Lemeshko B.Y., Sataeva T.S.* Application and Power of Parametric Criteria for Testing the Homogeneity of Variances. Part III // Measurement Techniques, 2017. Vol. 60. No. 1. – P. 7-14. DOI: 10.1007/s11018-017-1141-3
63. *Lemeshko B.Y., Sataeva T.S.* Application and Power of Parametric Criteria for Testing the Homogeneity of Variances. Part IV // Measurement Techniques, 2017. Vol. 60. No. 5. – P. 425-431. DOI: 10.1007/s11018-017-1213-4
64. *Lemeshko B.Yu., Sataeva T.S.* On the Properties and Application of Tests for Homogeneity of Variances in the Problems of Metrology and Control // Advances in Intelligent Systems and Computing, Vol. 543, 2017. – P. 784-798. DOI: 10.1007/978-3-319-48923-0_84
65. *Lemeshko B.Yu., Gorbunova A.A., Lemeshko S.B., Rogozhnikov A.P.* Application of Nonparametric Goodness-of-fit tests for Composite Hypotheses in Case of Unknown Distributions of Statistics // Proceedings of the International Workshop "Applied Methods of Statistical Analysis. Applications in Survival Analysis, Reliability and Quality Control" – AMSA'2013, Novosibirsk, Russia, 25-27 September, 2013. P. 8-24.
66. *Lemeshko B.Yu., Lemeshko S.B., Rogozhnikov A.P.* Real-Time Studying of Statistic Distributions of Non-Parametric Goodness-of-Fit Tests when Testing Complex Hypotheses // Proceedings of the International Workshop "Applied Methods of Statistical Analysis. Simulations and Statistical Inference" – AMSA'2011, Novosibirsk, Russia, 20-22 September, 2011. P. 19-27.
67. *Leslie R.T., Brown B.M.* Use of range in testing heterogeneity of variance // Biometrika. 1966. Vol. 53. No.1/2. – P. 221-227.
68. *Levene H.* Robust tests for equality of variances // Contributions to Probability and Statistics: Essays in Honor of Harold Hotelling. – 1960. – P. 278-292.

69. *Levene* Test for Equality of Variances [Электронный ресурс] // e-Handbook of Statistical Methods. – Режим доступа : http://www.itl.nist.gov/div898/handbook/ eda/section3/eda35a.htm. –Загл. с экрана.
70. *Lim T.-S., Loh W.-Y.* A comparison of tests of equality of variances // Computational Statistics & Data Analysis. 1996. Vol. 22, No. 5. P. 287-301.
71. *Link R.F.* The sampling distribution of the ratio of two ranges from independent samples // The annals of mathematical statistics. 1950. Vol. 21, No. 1. – P. 112-116.
72. *Mann H. B.* On a test of whether one of two random variables is stochastically larger than the other / H. B. Mann, D. R. Whitney // Ann. Math. Statist. – 1947. – Vol. 18. – P. 50–60.
73. *Miller R.G.* Jackknifing variances // The Annals of Mathematical Statistics – 1968. – Vol. 39. – P. 567–582.
74. *Milton R. C.* An extended table of critical values for the Mann –Whitney (Wilcoxon) two-sample statistic / R. C. Milton // J. Amer. Statist. Ass. – 1964. – Vol. 59. – P. 925–934.
75. *Mood A.* On the asymptotic efficiency of certain nonparametric tests / A. Mood // AMS. – 1954. – Vol. 25. No. 3. – P. 514–522.
76. *Neel J. H.* A Monte Carlo Study of Levene`s Test of Homogeneity of Variance: Empirical Frequencies of Type I Error in Normal Distributions Paper : presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association Convention / J. H. Neel, W. M. Stallings. – Chicago, Illinois, 1974. – April.
77. *Newman D.* The distribution of range in samples from a normal population, expressed in terms of an independent estimate of standard deviation // Biometrika. 1939. Vol. 31. No.1/2. – P. 20-30.
78. *Pettitt A.N.* A two-sample Anderson-Darling rank statistic // Biometrika. 1976. Vol. 63. No.1. P. 161-168.
79. *Rosenblatt M.* Limit theorems associated with variants of the von Mises statistic / M. Rosenblatt // Ann. Math. Statist. – 1952. – Vol. 23. – P. 617–623.
80. *Sataeva T. S., Lemeshko B.Yu.* About properties and power of classical tests of homogeneity of variances // Proceedings 2016 11th International Forum on Strategic Technology (IFOST), June 1-3, 2016, Novosibirsk, Russia. Part 1. – P. 350-354. DOI: 10.1109/IFOST.2016.7884125
81. *Scheffe H.* On Solutions of the Behrens-Fisher Problem, Based on the t-Distribution // The Annals of Mathematical Statistics. 1943. Vol. 14, No. 1. – P. 35-44.
82. *Scheffe H.* Practical Solutions of the Behrens-Fisher Problem // Journal of the American Statistical Association. 1970. Vol. 65. No. 332. – P. 1501-1508.

83. *Scholz F.W., Stephens M.A.* K-Sample Anderson–Darling Tests // Journal of the American Statistical Association. 1987. Vol. 82. No. 399. – P. 918-924.
84. *Siegel S.* A nonparametric sum of rank procedure for relative spread in unpaired samples / S. Siegel, J. W. Tukey // JASA. – 1960. – Vol. 55, № 291. – P. 429–445.
85. *Sukhatme B. V.* On certain Two-sample nonparametric tests for variances / B. V. Sukhatme // AMS. – 1957. – Vol. 28, № 1. – P. 188–194.
86. *Terry M.E.* Some rank order test which are most powerful against specific parametric alternatives // The Annals of Mathematical Statistics. 1952. Vol. 23. – P.346-366.
87. *O'Brien R.G.* Robust techniques for testing heterogeneity of variance effects in factorial designs // Psychometrika. 1978. Vol. 43, No. 3. P. 327-342.
88. *Overall J.E., Woodward J.A.* A simple test for heterogeneity of variance in complex factorial design // Psychometrika. 1974. Vol. 39. No. 3. – P. 311-318.
89. *Overall J.E., Woodward J.A.* A robust and powerful test for heterogeneity of variance // University of Texas Medical Branch Psychometric Laboratory. 1976.
90. *Parra-Frutos I.* The behaviour of the modified Levene's test when data are not normally distributed // Computational Statistics. – 2009. – Vol. 24. – P. 671–693.
91. *Welch B. L.* The Significance of the Difference Between Two Means when the Population Variances are Unequal // Biometrika. 1938. Vol. 29, No. 3/4. – P. 350-362.
92. *Welch B. L.* The generalization of "Student's" problem when several different population variances are involved // Biometrika. 1947. Vol. 34, No. 1/2. – P. 28-35.
93. *Wilcoxon F.* Individual comparisons by ranking methods / F. Wilcoxon // Biometrics Bulletin. – 1945. – № 1. – P. 80–83.
94. *Zhang J.* Powerful goodness-of-fit and multi-sample tests / J. Zhang // PhD Thesis. York University, Toronto. 2001. – 113 p. URL: http://www.collectionscanada.gc.ca/obj/s4/f2/dsk3/ftp05/NQ66371.pdf (дата обращения 28.01.2013).
95. *Zhang J.* Powerful Two-Sample Tests Based on the Likelihood Ratio / J. Zhang // Technometrics. – 2006. – V. 48. – No. 1. – P.95-103. DOI 10.1198/004017005000000328
96. *Zhang J., Wu Y.* k-Sample tests based on the likelihood ratio // Computational Statistics & Data Analysis. – 2007. – V. 51. – No. 9. – P. 4682-4691.
97. *Большев Л. Н.* Таблицы математической статистики / Л. Н. Большев, Н. В. Смирнов. – М. : Наука, 1983. – 416 с.

98. *Боровков А. А.* К задаче о двух выборках / А. А. Боровков // Изв. АН СССР, Сер. матем. – 1962. – Т. 26. – С. 605–624.
99. *Ван дер Варден Б.Л.* Математическая статистика. – М.: Иностранная литература, 1960. – 435 с.
100. *Гаек Я., Шидак З.* Теория ранговых критериев. – Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1971. – 376 с.
101. *Закс Л.* Статистическое оценивание / Л. Закс. – М. : Статистика, 1976. – 598 с.
102. *Кобзарь А. И.* Прикладная математическая статистика. Для инженеров и научных работников / А. И. Кобзарь. – М. : Физматлит, 2006. – 816 с.
103. *Королюк В. С.* Асимптотический анализ распределений максимальных уклонений в схеме Бернулли // Теория вероятностей и ее применения. – 1959. – Т.4. – С. 369-397.
104. Крамер Г. Математические методы статистики. – М.: Мир, 1975. – 648 с.
105. *Лемешко Б.Ю.* О задаче идентификации закона распределения случайной составляющей погрешности измерений // Метрология. 2004. № 7. С. 8-17.
106. *Лемешко Б.Ю.* Непараметрические критерии согласия. Руководство по применению. М.: ИНФРА-М, 2014. 163 с. DOI: 10.12737/11873
107. *Лемешко Б.Ю.* Критерии проверки отклонения распределения от нормального закона. Руководство по применению. М.: ИНФРА-М, 2015. 160 с. (Научная мысль). DOI: 10.12737/6086
108. *Лемешко Б.Ю., Блинов П.Ю.* Критерии проверки отклонения распределения от равномерного закона. Руководство по применению. М.: ИНФРА-М, 2015. 183 с. (Научная мысль). DOI: 10.12737/11304
109. *Лемешко Б. Ю.* Статистический анализ одномерных наблюдений случайных величин : программная система / Б. Ю. Лемешко. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 1995. – 125 с.
110. *Лемешко Б. Ю.* Модели распределений статистик непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез с использованием оценок максимального правдоподобия. Ч. I / Б. Ю. Лемешко, С. Б. Лемешко // Измерительная техника. – 2009. – № 6. – С. 3–11.
111. *Лемешко Б. Ю.* Модели распределений статистик непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез с использованием оценок максимального правдоподобия. Ч. II / Б. Ю. Лемешко, С. Б. Лемешко // Измерительная техника. – 2009. – № 8. – С. 17–26.
112. *Лемешко Б. Ю.* О сходимости распределений статистик и мощности критериев однородности Смирнова и Лемана–Розенблатта / Б. Ю. Лемешко, С. Б. Лемешко // Измерительная техника. – 2005. – № 12. – С. 9–14.

113. *Лемешко Б.Ю.* О применении критериев проверки однородности законов распределения / Б.Ю. Лемешко, С.Б. Лемешко, И.В. Веретельникова // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2017. – № 41. – С. 24-31.
114. *Лемешко Б. Ю.* Об устойчивости и мощности критериев проверки однородности средних / Б. Ю. Лемешко, С. Б. Лемешко // Измерительная техника. – 2008. – № 9. – С. 23–28.
115. *Лемешко Б. Ю.* О применении и мощности критериев проверки однородности дисперсий. Ч. I. Параметрические критерии / Б. Ю. Лемешко, С. Б. Лемешко, А. А. Горбунова // Измерительная техника. – 2010. – № 3. – С. 10–16.
116. *Лемешко Б. Ю.* О применении и мощности критериев проверки однородности дисперсий. Ч. II. Непараметрические критерии / Б. Ю. Лемешко, С. Б. Лемешко, А. А. Горбунова // Измерительная техника. – 2010. – № 5. – С. 11–18.
117. *Лемешко Б.Ю., Сатаева Т.С.* Применение и мощность параметрических критериев проверки однородности дисперсий. Ч. 4 // Измерительная техника. – 2017. – № 5. – С. 12-17.
118. *Лемешко Б.Ю., Сатаева Т.С.* Применение и мощность параметрических критериев проверки однородности дисперсий. Ч. 4 // Измерительная техника. – 2017. – № 5. – С. 12-17.
119. *Лемешко Б.Ю., Лемешко С.Б., Постовалов С.Н., Чимитова Е.В.* Статистический анализ данных, моделирование и исследование вероятностных закономерностей. Компьютерный подход: Монография. Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2011. 888 с.
120. *Лемешко Б. Ю.* Исследование критериев проверки гипотез, используемых в задачах управления качеством / Б. Ю. Лемешко, С. Б. Лемешко, Е. П. Миркин // АПЭП-2004. Актуальные проблемы электронного приборостроения : материалы VII междунар. конф. – Новосибирск, 2004. – Т. 6. – С. 269–272.
121. *Лемешко Б. Ю.* Критерии Бартлетта и Кокрена в измерительных задачах при вероятностных законах, отличающихся от нормального / Б. Ю. Лемешко, Е. П. Миркин // Измерительная техника. – 2004. – № 10. – С. 10–16.
122. *Лемешко Б. Ю.* Корреляционный анализ наблюдений многомерных случайных величин при нарушении предположений о нормальности / Б. Ю. Лемешко, С. С. Помадин // Сибирский журнал индустриальной математики. 2002. – Т. 5, № 3. – С. 115–130.
123. *Лемешко Б. Ю.* Проверка гипотез о математических ожиданиях и дисперсиях в задачах метрологии и контроля качества при вероятностных законах, отличающихся от нормального / Б. Ю. Лемешко, С. С. Помадин // Метрология, 2004. – № 3. – С. 3–15.

124. *Лемешко Б. Ю.* Исследование распределений статистик, используемых для проверки гипотез о равенстве дисперсий при законах ошибок, отличных от нормального / Б. Ю. Лемешко, В. М. Пономаренко // Науч. вест. НГТУ. – 2006. – № 2(23). – С. 21–33.
125. *Лемешко Б. Ю.* Компьютерные технологии анализа данных и исследования статистических закономерностей : учеб. пособие / Б. Ю. Лемешко, С. Н. Постовалов. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2004. – 120 с.
126. *Лемешко Б. Ю.* Компьютерные технологии анализа данных и исследования статистических закономерностей : метод. указания к выполнению лаб. работ / Б. Ю. Лемешко, С. Н. Постовалов, С. Б. Лемешко. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2007. – 71 с.
127. *Макаров А.А., Симонова Г.И.* Исследование мощности двухвыборочного критерия Андерсена–Дарлинга в случае засорения одной из выборок. // Статистические методы оценивания и проверки гипотез. Межвуз. сб. науч. тр. № 20, Перм. ун-т. – Пермь, 2007 – с. 40-52.
128. *Миттаг Х.-Й.* Статистические методы обеспечения качества / Х.-Й. Миттаг, Х. Ринне. – М. : Машиностроение. 1995. – 600 с.
129. *Орлов А. И.* О проверке однородности двух независимых выборок / А. И. Орлов // Завод. лаб. – 2003. – Т. 69, №. 1. – С. 55–60.
130. *Постовалов С.Н.* Применение компьютерного моделирования для расширения прикладных возможностей классических методов проверки статистических гипотез. Диссертация на соискание ученой степени доктора технических наук. Новосибирск. 2013. 298 с.
131. Программная система статистического анализа одномерных случайных величин – ISW. URL: http://ami.nstu.ru/~headrd/ISW.htm (дата обращения 12.07.2016)
132. Р 50.1.033–2001. Рекомендации по стандартизации. Прикладная статистика. Правила проверки согласия опытного распределения с теоретическим. Ч. I. Критерии типа хи-квадрат. – М. : Изд-во стандартов, 2002. – 87 с.
133. Р 50.1.037–2002. Рекомендации по стандартизации. Прикладная статистика. Правила проверки согласия опытного распределения с теоретическим. Ч. II. Непараметрические критерии. – М. : Изд-во стандартов, 2002. – 64 с.
134. *Смирнов Н. В.* Вероятности больших значений непараметрических односторонних критериев согласия / Н. В. Смирнов // Тр. матем. ин-та АН СССР. – 1961. – Т. 64. – С. 185–210.
135. *Смирнов Н. В.* Оценка расхождения между эмпирическими кривыми распределения в двух независимых выборках / Н. В. Смирнов // Бюл. МГУ, Серия А. – 1939. – Т. 2, № 2. – С. 3–14.

136. *Лемешко Б. Ю.* Мощность *k*-выборочных критериев проверки однородности законов / Б. Ю. Лемешко, И. В. Веретельникова // Измерительная техника. 2018. № 7. – С. 3-7.

Спасибо за внимание!

Борис Юрьевич Лемешко

Новосибирский государственный технический университет

e-mail: Lemeshko@ami.nstu.ru

https://ami.nstu.ru/~headrd/

Текущая версия программной системы ISW.

Доступна по адресу: https://ami.nstu.ru/~headrd/