СБОРНИК **НАУЧНЫХ ТРУДОВ НГТУ. - 2000. - №** 4(21)**..** - С. 19-24
УДК 519.2

О ВЫБОРЕ ОПТИМАЛЬНОГО ЧИСЛА ИНТЕРВАЛОВ В КРИТЕРИЯХ СОГЛАСИЯ ТИПА χ^2 [1]

Б.Ю. ЛЕМЕШКО[♣], Е.В. ЧИМИТОВА[♥]

Выбор числа интервалов в критериях типа χ^2 рассматривается с позиций построения наиболее мощного критерия согласия в случае проверки близких альтернативных гипотез. Исследуется мощность критериев типа χ^2 в зависимости от числа интервалов группирования и объема выборки. Показывается возможность выбора оптимального числа интервалов.

Рекомендуемое в различных источниках количество интервалов группирования, используемое при вычислении оценок параметров, построении гистограмм, а также при проверке статистических гипотез с помощью критерия χ^2 Пирсона, колеблется в очень широких пределах. Большинство рекомендуемых формул для оценки числа интервалов k носит эмпирический характер и обычно дает завышенные величины. Практически все рекомендации по выбору числа интервалов исходят из того, чтобы при данном объеме выборки n как можно лучше приблизить плотность распределения ее непараметрической оценкой (гистограммой). В данной работе выбор оптимального числа интервалов k проводится с позиций построения наиболее мощного критерия согласия при близких альтернативных гипотезах.

При справедливости проверяемой гипотезы H_0 предельным распределением $G(X_n^2|H_0)$ стандартной статистики критерия согласия Пирсона $X_n^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i/n - P_i(\theta))^2}{P_i(\theta)}$, где n - объем выборки, n_i - количество наблюдений, попавших в интервал, $P_i(\theta)$ - вероятность попадания наблюдения в интервал, является χ_{k-1}^2-распределение. При оценивании в

---

[1] Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (№ 00-01-00913)

[♣] Профессор кафедры прикладной математики, д -р техн. наук

[♥] Аспирант кафедры прикладной математики

результате минимизации статистики X_n^2 по этой же выборке m параметров закона статистика подчиняется χ^2_{k-m-1}-распределению. При справедливой альтернативной гипотезе H_1 предельное распределение $G(X_n^2|H_1)$ представляет собой нецентральное χ^2-распределение с тем же числом степеней свободы и параметром нецентральности $\lambda(\theta)=\sum_{i=1}^{k}\frac{c_i^2(\theta)}{P_i}$, где $c_i(\theta)=\sqrt{n}\int\limits_{x_{i-1}(\theta)}^{x_i(\theta)}\left(f_1(x,\theta)-f_0(x,\theta)\right)dx$.

В [1] и последующих работах Никулиным предложено видоизменение стандартной статистики X_n^2, при котором предельным распределением статистики в независимости от числа оцениваемых параметров остается χ^2_{k-1}-распределение. Параметры наблюдаемого закона в этом случае должны оцениваться методом максимального правдоподобия по негруппированным данным.

Предложенная статистика: $Y_n^2(\theta)=X_n^2+n^{-1}\bar{a}^T(\theta)\Lambda(\theta)\bar{a}(\theta)$, где $\Lambda(\theta)=\left[J(\theta_l,\theta_j)-\sum_{i=1}^{k}\frac{w_{\theta_l i}w_{\theta_j i}}{p_i}\right]^{-1}_{m\times m}$, $a(\theta_l)=w_{\theta_l 1}n_1/p_1+\ldots+w_{\theta_l k}n_k/p_k$, $w_{\theta_l i}=-f_0\left[x_i(\theta),\theta\right]\frac{\partial x_i(\theta)}{\partial\theta_l}+f_0\left[x_{i-1}(\theta),\theta\right]\frac{\partial x_{i-1}(\theta)}{\partial\theta_l}$, $J(\theta_l,\theta_j)$ – элементы информационной матрицы Фишера, при верной альтернативе имеет в качестве предельного $G(Y_n^2\mid H_1)$ нецентральное χ^2_{k-1}-распределение с параметром нецентральности $\lambda(\theta)=\sum_{i=1}^{k}\frac{c_i^2(\theta)}{p_i}+\bar{d}^T(\theta)\Lambda(\theta)\bar{d}(\theta)$, где $d(\theta_l)=w_{\theta_l 1}c_1(\theta)/p_1+\ldots+w_{\theta_l k}c_k(\theta)/p_k$.

Наши исследования показали, что как $G(Y_n^2|H_0)$, так и $G(Y_n^2|H_1)$ слабо зависят от выбранного способа группирования и хорошо согласуются с соответствующими χ^2-распределениями. При этом критерий со статистикой Никулина при фиксированных числе интервалов k и варианте группирования всегда мощнее критерия χ^2 Пирсона.

Зная предельные распределения статистики $G(S \mid H_0)$ и $G(S \mid H_1)$, для любого заданного уровня значимости α можно оценить мощность соответствующего критерия, рассматривая её как функцию от числа интервалов k при заданном объеме выборки n. Исследование мощности критериев Пирсона и Никулина, как функции от n и k, проводилось как аналитически, так и методами статистического моделирования. В качестве примера на рисунках 1 - 4 приведены функции мощности рассматриваемых критериев в случае близких конкурирующих гипотез (H_0 - нормальный закон, H_1 - логистический) при уровне значимости $\alpha = 0.1$. На рис. 1 представлены функции мощности для случая равновероятного группирования и проверки простой гипотезы. На рис. 2, то же, но при проверке сложной гипотезы. Как видим, с ростом k мощность падает. При проверке простой гипотезы функция мощности критерия Пирсона для $n > 100$ принимает максимальное значение при $k = 4$, и при дальнейшем увеличении объема выборки это оптимальное число интервалов не изменяется. В случае проверки сложной гипотезы и оценивании по выборке параметров гипотетического распределения функция мощности критерия Пирсона принимает наибольшее значение при минимально возможном числе интервалов $k = 4$ и далее монотонно убывает с ростом k (рис. 2).

На рис. 3 отражены функции мощности критерия χ^2 Пирсона для вышеприведенной пары альтернатив при проверке простой гипотезы в случае применения асимптотически оптимального группирования [2]. Здесь функции мощности представляют собой более интересную картину с провалами при $k = 4$ и $k = 6$. Эти провалы свидетельствуют о том, что при таких комбинациях граничных точек, не смотря на минимальные потери в информации Фишера, две рассматриваемые конкурирующие гипотезы плохо различаются. При дальнейшем росте k происходит увеличение мощности критерия.

Функция мощности критерия типа χ^2 Никулина, как следует из рис. 4, на области значений k, содержащей максимальное значение мощности, является выпуклой вверх функцией.

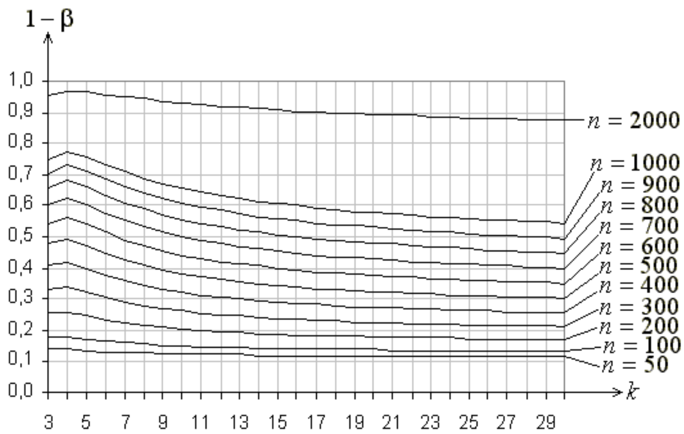

Рис. 1. Функции мощности критерия χ^2 Пирсона при проверке простой гипотезы при равновероятном группировании

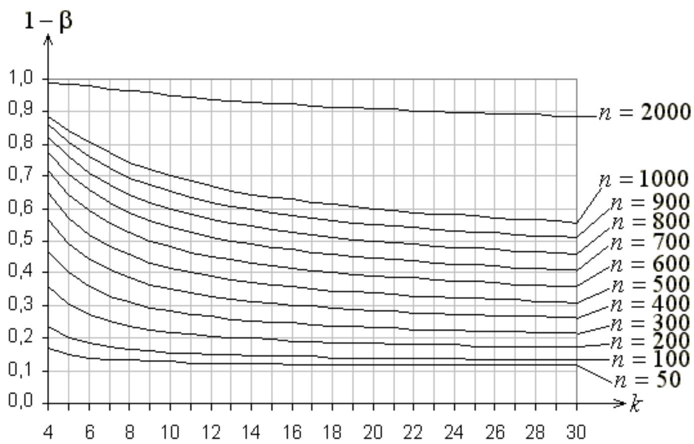

Рис. 2. Функции мощности критерия χ^2 Пирсона при проверке сложной гипотезы при равновероятном группировании

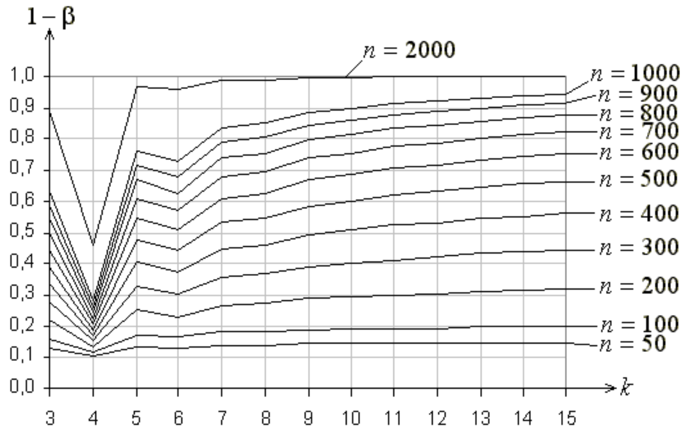

Рис. 3. Функции мощности критерия χ^2 Пирсона при проверке простой гипотезы при асимптотически оптимальном группировании

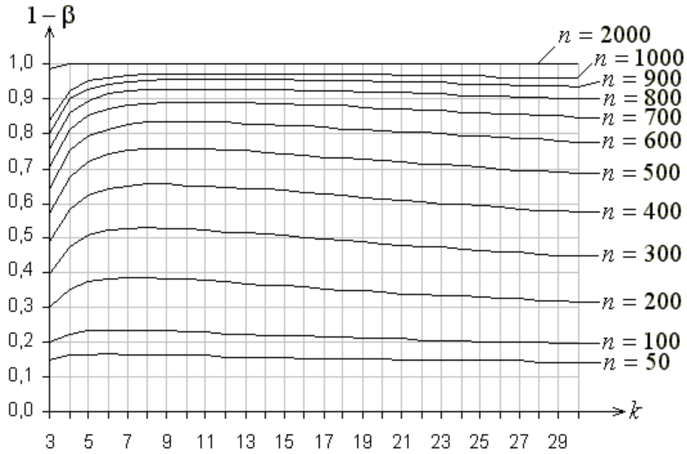

Рис. 4. Функции мощности критерия типа χ^2 Никулина при проверке сложной гипотезы при равновероятном группировании

Статистическое моделирование распределений статистик, которое проводилось нами в целях контроля результатов, полностью подтверждает аналитические расчеты, проиллюстрированные на приводимых рисунках.

Исследование различных *близких* пар конкурирующих гипотез показало, что, в отличие от устоявшихся представлений, мощность критерия χ^2 Пирсона оказывается максимальной, если выборку разбивать на минимально возможное число интервалов группирования. С ростом числа интервалов мощность критерия падает (в полном соответствии с работой [3]). Этот факт ускользает от большинства исследователей, использующих данный критерий, и не упоминается в рекомендациях различного уровня. В некоторых ситуациях, то есть при конкретных парах конкурирующих гипотез, функции мощности критериев χ^2 Пирсона и отношения правдоподобия оказываются выпуклыми вверх по k, и существует “оптимальное” значение числа интервалов. Однако это “оптимальное” значение обычно достаточно мало отличается от минимально возможного и незначительно изменяется в сторону увеличения при значительном росте объема выборки n. Прослеживается зависимость “оптимальной” величины k не только от объёма выборки, пары конкурирующих гипотез, но и от способа группирования. Следовательно, сочетание асимптотически оптимального группирования и “оптимальной” величины k обеспечивает наилучшие возможности критериев χ^2 Пирсона и отношения правдоподобия по распознаванию близких альтернатив.

В случае критерия Никулина “оптимальное” число интервалов k обычно существует и оно также существенно меньше значений, рекомендуемых любыми действующими регламентирующими документами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Никулин М.С. О критерии хи-квадрат для непрерывных распределений // Теория вероятностей и её применение. 1973. Т.XVIII. № 3. – С.675-676.
2. Денисов В.И., Лемешко Б.Ю., Цой Е.Б. Оптимальное группирование, оценка параметров и планирование регрессионных экспериментов: В 2 ч. / Новосиб. гос. техн. ун-т. - Новосибирск, 1993. – 346 с.
3. Чибисов Д.М., Гванцеладзе Л.Г. О критериях согласия, основанных на группированных данных // III советско-японский симпозиум по теории вероятностей. Ташкент: изд-во “Фан”, 1975. – С. 183-185.