Сибирский государственный университет
телекоммуникаций и информатики

ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

РОССИЙСКАЯ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ

МАТЕРИАЛЫ КОНФЕРЕНЦИИ

Новосибирск
2019

978-5-91434-048-0

СОДЕРЖАНИЕ

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

ИНФОРМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Подсекция НГТУ

К вопросу ранжирования множества критериев проверки отклонения от равномерного закона

П. Ю. Блинов, Б. Ю. Лемешко[1]

Проводится сравнительный анализ мощности критериев равномерности и критериев согласия при проверке гипотезы равномерности на интервале [0,1]. Приводится описание методов принятия решений в условиях неопределенности Вальда, Лапласа и Сэвиджа. Даются рекомендации по применению методов принятия решений, а также рекомендации по выбору оптимального критерия на основании результатов применения этих методов.

Ключевые слова: критерии равномерности, проверка гипотез, мощность критерия, методы принятия решений в условиях неопределенности.

1. Введение

В связи с наличием большого числа специальных критериев, предназначенных для проверки гипотезы о принадлежности анализируемой выборки равномерному закону, вопрос выбора наиболее предпочтительного критерия оказывается достаточно актуальным.

Выбор критерия может быть обусловлен различными факторами, например, аналитической простотой статистики, наличием предельного распределения для этой статистики или быстрой сходимостью к предельному распределению. Но более важным фактором является мощность критерия. Однако и оценки мощности критериев не всегда позволяют однозначно выбрать наиболее предпочтительный критерий, так как не редки ситуации, когда относительно одной рассматриваемой конкурирующей гипотезы критерий является наиболее мощным, а относительно другой – оказывается не эффективным. Именно в таких случаях применение методов принятия решений в условиях неопределенности позволяет сделать выбор в пользу одного конкретного критерия. Выбор же метода принятия решений делается, как правило, на основании «рисковых» предпочтений самого исследователя.

В работах [1,2] множество рассмотренных специальных критериев равномерности упорядочено по мощности относительно 3-х конкретных конкурирующих законов распределений. В процессе проведенных в [1, 2] исследований распределений статистик и мощности критериев количество имитационных экспериментов в методе Монте–Карло принималось равным 1 660 000. Полное описание самих критериев и конкурирующих законов представлено в [1].

2. Конкурирующие гипотезы при проверке равномерности

При анализе мощности критериев, используемых для проверки гипотезы вида H_0: $X \in Rav(0,1)$ о принадлежности наблюдаемой случайной величины равномерному закону, в качестве конкурирующих гипотез рассматривалась принадлежность выборок различным законам распределения вероятностей. Однако наиболее интересна способность критериев различать близкие конкурирующие гипотезы. Именно при анализе близких альтернатив удается выяснить тонкие моменты, характеризующие свойства критериев, выявить принципиальные недостатки или достоинства критериев.

[1] Исследования выполнены при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках государственной работы «Обеспечение проведения научных исследований» (№ 1.4574.2017/6.7) и проектной части государственного задания (№ 1.1009.2017/4.6).

Такого вида близкие конкурирующие гипотезы легко задаются семейством бета-распределений 1-го рода с функцией плотности

$$f(x)=\frac{1}{\theta_2 B(\theta_0,\theta_1)}\left(\frac{x-\theta_3}{\theta_2}\right)^{\theta_0-1}\left(1-\frac{x-\theta_3}{\theta_2}\right)^{\theta_1-1}, \qquad (1)$$

где $B(\theta_0,\theta_1)=\Gamma(\theta_0)\Gamma(\theta_1)/\Gamma(\theta_0+\theta_1)$ – бета-функция, $\theta_0,\theta_1\in(0,\infty)$ – параметры формы, $\theta_2\in(0,\infty)$ – масштабный параметр, $\theta_3\in(-\infty,\infty)$ – параметр сдвига, $x\in[0,\theta_2]$.

Если обозначить функцию бета-распределения 1-го рода при конкретных значениях параметров как $B_I(\theta_0,\theta_1,\theta_2,\theta_3)$, то три рассматриваемые далее достаточно близкие к H_0 конкурирующие гипотезы H_1, H_2, H_3 принимают следующий вид:

$$H_1 : F(x)=B_I(1.5,1.5,1,0),\ x\in[0,1];$$
$$H_2 : F(x)=B_I(0.8,1,1,0),\ x\in[0,1];$$
$$H_3 : F(x)=B_I(1.1,0.9,1,0),\ x\in[0,1].$$

Функции распределения вероятностей, соответствующие рассматриваемым гипотезам, приведены на рисунке 1.

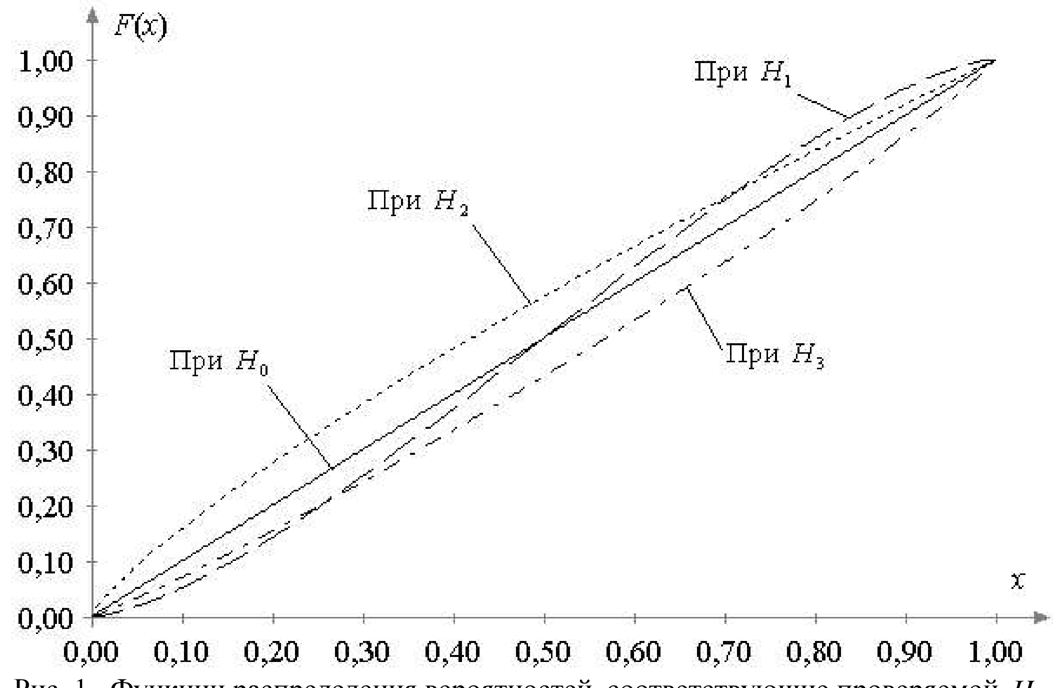

Рис. 1. Функции распределения вероятностей, соответствующие проверяемой H_0 и конкурирующим гипотезам H_1-H_3

3. Методы принятия решений в условиях неопределенности

Следуя [3], процесс принятия решения в условиях неопределённости на основании полученных в [1, 2] оценок мощности критериев относительно конкурирующих гипотез H_1, H_2, H_3 можно представить следующим образом.

Пусть L – некоторая матрица размерности $m\times n$, элементы которой являются показателями полезности, соответствующей стратегии x_i и состоянию среды S_j

$$L_{ij}=U(x_i,S_j),\ i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,m}.$$

$x_i \setminus S_j$	S_1	S_2	$\cdots$	S_m
x_1	L_{11}	L_{12}	$\cdots$	L_{1m}
x_2	L_{21}	L_{22}	$\cdots$	L_{2m}
…	…	…	…	…
x_n	L_{n1}	L_{n2}	$\cdots$	L_{nm}

По критерию Вальда решающее правило в условиях нашей задачи принимает следующий вид:

$$\max_{x_i} \min_{s_j} U(x_i, S_j). \tag{2}$$

Это решающее правило оптимизирует ожидаемую полезность в предположении, что среда находится в самом невыгодном для наблюдателя состоянии. Иными словами, по этому методу выбирают стратегию, которая дает гарантированный выигрыш при наихудшем варианте состояния среды.

По критерию Лапласа решающее правило принимает следующий вид:

$$\max_{x_i} \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} U(x_i, S_j). \tag{3}$$

Согласно этому правилу выбирается стратегия с максимальной средней полезностью.

В таблице 1 приведен пример, поясняющий использование решающих правил Вальда и Лапласа на фрагменте с оценками мощности 5-ти критериев равномерности относительно конкурирующих гипотез H_1, H_2, H_3. В качестве полезностей $U\left(x_i, S_j\right)$, соответствующих состояниям среды S_j, рассматриваются оценки мощности критериев относительно H_j.

Таблица 1. Пример использования правил Вальда и Лапласа

Критерии равномерности	H_1	H_2	H_3	Вальд	Лаплас
Шермана	0.215	0.204	0.154	0.154	0.191
Ченга-Спиринга	0.722	0.168	0.106	0.106	0.332
Янга	0.115	0.108	0.104	0.104	0.109
Фросини	0.384	0.603	0.522	0.384	0.503
Дудевича–ван дер Мюлена	0.790	0.327	0.275	0.275	0.464

В столбце «Вальд» для каждого критерия равномерности получена минимальная мощность относительно трех конкурирующих гипотез, в столбце «Лаплас» – средняя мощность. Оценки мощности критериев равномерности взяты из [1, стр. 159-161] и дублируются далее в таблице 3. В данном случае как по методу Вальда (2), так и по методу Лапласа (3) оптимальным оказывается выбор критерия равномерности Фросини [4].

Правило Сэвиджа основано на минимизации «сожалений». «Сожаление» – это величина, равная изменению полезности результата при данном состоянии среды относительно возможного наилучшего состояния. Данный метод несколько сложнее предыдущих, поскольку для принятия решения необходимо построить промежуточную матрицу сожалений.

Решающее правило можно интерпретировать следующим образом:

$$\min_{x_i} \max_{s_j} U_c(x_i, S_j), \tag{4}$$

где элементы матрицы сожалений $U_c(x_i, S_j) = \max_{x_i} U(x_i, S_j) - U(x_i, S_j)$.

Рассмотрим работу этого правила на примере с данными из таблицы 1. Сначала необходимо определить максимальную мощность относительно каждой конкурирующей гипотезы.

Гипотеза	H_1	H_2	H_3
Максимальная мощность	0.790	0.603	0.522

Затем строим матрицу сожалений (см. таблицу 2) и находим максимальное сожаление относительно каждого критерия равномерности. Среди максимальных сожалений выбирается наименьшее, которое соответствует оптимальной стратегии.

Таблица 2. Матрица сожалений

Критерии равномерности	H_1	H_2	H_3	Максимальное сожаление
Шермана	0.575	0.399	0.368	0.575
Ченга-Спиринга	0.068	0.435	0.416	0.435
Янга	0.675	0.495	0.418	0.675
Фросини	0.406	0.000	0.000	0.406
Дудевича–ван дер Мюлена	0.000	0.276	0.247	0.276
Максимальная мощность	0.790	0.603	0.522	

По правилу Сэвиджа (4) оптимальной стратегией является выбор критерия Дудевича-ван дер Мюлена.

4. Ранжирование критериев в соответствии с правилами принятия решений в условиях неопределенности

В таблице 3 приведены оценки мощности сравниваемых критериев относительно конкурирующих гипотез H_1, H_2, H_3, полученные в [1] при объеме выборок $n = 100$ и $\alpha = 0.1$.

Таблица 3. Оценки мощности критериев при проверке равномерности

Критерий	H_1	H_2	H_3	Критерий	H_1	H_2	H_3
Шермана	0.215	0.204	0.154	Модификация энтропийного критерия 1	0.789	0.328	0.275
Кимбелла	0.279	0.201	0.165	Модификация энтропийного критерия 2	0.883	0.266	0.267
Морана 1	0.279	0.201	0.165	Кресси 1	0.187	0.314	0.218
Морана 2	0.187	0.193	0.143	Кресси 2	0.820	0.217	0.226
Ченга-Спиринга	0.722	0.168	0.106	Пардо	0.408	0.463	0.291
Хегази-Грина T_1	0.322	0.610	0.522	Шварца	0.583	0.226	0.206
Хегази-Грина T_2	0.308	0.602	0.508	Андерсона–Дарлинга	0.505	0.648	0.526
Хегази-Грина T_1^*	0.443	0.595	0.520	Модификация критерия Андерсона-Дарлинга	0.730	0.585	0.519
Хегази-Грина T_2^*	0.409	0.585	0.506	Колмогорова	0.322	0.542	0.450
Янга	0.115	0.108	0.104	Купера	0.736	0.364	0.254
Фросини	0.384	0.603	0.522	Ватсона	0.779	0.356	0.257
Гринвуда	0.279	0.201	0.165	Крамера–Мизеса–Смирнова	0.358	0.595	0.507
Гринвуда–Кэсенберри–Миллера	0.290	0.244	0.186	Жанга Z_A	0.850	0.574	0.459
Неймана–Бартона N_2	0.837	0.597	0.447	Жанга Z_C	0.819	0.606	0.463
Неймана–Бартона N_3	0.766	0.577	0.416	Жанга Z_K	0.617	0.590	0.438
Неймана–Бартона N_4	0.739	0.557	0.381	χ^2 Пирсона	0.593	0.448	0.374
Дудевича–ван дер Мюлена	0.790	0.327	0.275				

По оценкам мощности, представленным в таблице 3, в соответствии с правилами принятия решений в условиях неопределённости Вальда, Лапласа и Сэвиджа был проведен поиск оптимального критерия. Полученные результаты представлены в таблице 4, в которой критерии равномерности проранжированы по соответствующему правилу: по убыванию (2) и (3) в правилах Вальда и Лапласа и увеличению (4) по правилу Сэвиджа.

Таблица 4. Ранжирование критериев равномерности

№ п/п	По критерию Вальда	(2)	По критерию Лапласа	(3)	По критерию Сэвиджа	(4)
1	Модификация критерия Андерсона-Дарлинга	0.519	Жанга Z_C	0.629	Жанга Z_C	0.064
2	Андерсона–Дарлинга	0.505	Жанга Z_A	0.628	Жанга Z_A	0.074
3	Жанга Z_C	0.463	Неймана–Бартона N_2	0.627	Неймана–Бартона N_2	0.079
4	Жанга Z_A	0.459	Модификация критерия Андерсона-Дарлинга	0.611	Неймана–Бартона N_3	0.117
5	Жанга Z_K	0.438	Неймана–Бартона N_3	0.586	Неймана–Бартона N_4	0.145
6	Неймана–Бартона N_2	0.447	Андерсона–Дарлинга	0.560	Модификация критерия Андерсона-Дарлинга	0.153
7	Хегази-Грина T_1^*	0.443	Неймана–Бартона N_4	0.559	Жанга Z_K	0.266
8	Неймана–Бартона N_3	0.416	Жанга Z_K	0.548	Купера	0.284
9	Хегази-Грина T_2^*	0.409	Хегази-Грина T_1^*	0.519	χ^2 Пирсона	0.290
10	Фросини	0.384	Фросини	0.503	Ватсона	0.292
11	Неймана–Бартона N_4	0.381	Хегази-Грина T_2^*	0.500	Дудевича–ван дер Мюлена	0.321
12	χ^2 Пирсона	0.374	Крамера–Мизеса–Смирнова	0.487	Модификация энтропийного критерия 1	0.321
13	Крамера–Мизеса–Смирнова	0.358	Хегази-Грина T_1	0.485	Андерсона–Дарлинга	0.378
14	Хегази-Грина T_1	0.322	Хегази-Грина T_2	0.473	Модификация энтропийного критерия 2	0.382
15	Колмогорова	0.322	χ^2 Пирсона	0.472	Шварца	0.422
16	Хегази-Грина T_2	0.308	Модификация энтропийного критерия 2	0.472	Кресси 2	0.431
17	Пардо	0.291	Дудевича–ван дер Мюлена	0.464	Хегази-Грина T_1^*	0.44
18	Дудевича–ван дер Мюлена	0.275	Модификация энтропийного критерия 1	0.464	Хегази-Грина T_2^*	0.474
19	Модификация энтропийного критерия 1	0.275	Ватсона	0.464	Пардо	0.475
20	Модификация энтропийного критерия 2	0.266	Купера	0.451	Ченга-Спиринга	0.480
21	Ватсона	0.257	Колмогорова	0.438	Фросини	0.499
22	Купера	0.254	Кресси 2	0.421	Крамера–Мизеса–Смирнова	0.525
23	Кресси 2	0.217	Пардо	0.387	Колмогорова	0.561
24	Шварца	0.206	Шварца	0.338	Хегази-Грина T_1	0.561
25	Кресси 1	0.187	Ченга-Спиринга	0.332	Хегази-Грина T_2	0.575
26	Гринвуда–Кэсенберри–Миллера	0.186	Кресси 1	0.240	Гринвуда–Кэсенберри–Миллера	0.593
27	Гринвуда	0.165	Гринвуда–Кэсенберри–Миллера	0.240	Гринвуда	0.604
28	Кимбелла	0.165	Гринвуда	0.215	Кимбелла	0.604
29	Морана 1	0.165	Кимбелла	0.215	Морана 1	0.604
30	Шермана	0.154	Морана 1	0.215	Шермана	0.668
31	Морана 2	0.143	Шермана	0.191	Кресси 1	0.696
32	Ченга-Спиринга	0.106	Морана 2	0.174	Морана 2	0.696
33	Янга	0.104	Янга	0.109	Янга	0.768

5. Заключение

Исходя из результатов, представленных в таблице 4, можно сделать вывод, что на основании рассмотренных правил принятия решений в условиях неопределённости наиболее предпочтительно применение критериев равномерности Неймана-Бартона N_2 [5, 6], критериев согласия Жанга со статистиками Z_A и Z_C [7-10], Андерсона-Дарлинга и модификации критерия Андерсона-Дарлинга [11].

Эти же правила подчеркивают малую эффективность использования критериев равномерности, основанных на интервальных статистиках (критериев Янга, Шермана, Морана, Гринвуда).

Ранжирование сравниваемых критериев по мощности с использованием правил принятия решения в условиях неопределённости было предложено в исследованиях и публикациях авторов работы [12].

Литература

1. *Лемешко Б.Ю., Блинов П.Ю.* Критерии проверки отклонения распределения от равномерного закона. Руководство по применению. – М.: НИЦ ИНФРА-М. 2015. –183 с.
2. *Блинов П.Ю., Лемешко Б.Ю.* О мощности модификации критерия проверки равномерности Андерсона-Дарлинга= The power of modified Anderson-Darling test for uniformity testing// Обработка информации и математическое моделирование: материалы Рос. науч.-техн. конф. *Новосибирск. 21–22 апр. 2016 г. – Новосибирск: СибГУТИ. 2016. –С. 18–26
3. *Лемешко Б.Ю.* Теория игр и исследование операций. Конспект лекций. Издательство НГТУ. 2013. –133 с.
4. *Frosini B.V.* On the distribution and power of a goodness-of-fit statistic with parametric and nonparametric application. “Goodness-of-fit”/Ed. By Reverz P., Sarkadi K., Sen P.K.// Amdstedam-Oxford-New York: North-Holland. Publ. Comp., 1987. P.133-154.
5. *Neyman J.* “Smooth” tests for goodness-of-fit // Scandinavisk Aktuarietidskrift. 1937. V.20. – P. 149-199.
6. *Кобзарь А. И.* Прикладная математическая статистика. Для инженеров и научных работников. М: ФИЗМАТЛИТ. 2006. – 816 с.
7. *Zhang J.* Powerful goodness-of-fit and multi-sample tests. Toronto: PhD Thesis. York University. 2001.
8. *Zhang J.* Powerful goodness-of-fit tests based on the likelihood ratio // Journal of the Royal Statistical Society: Series B. 2002. V. 64. № 2. – P.281-294.
9. *Zhang J., Wu Y.* Likelihood-ratio tests for normality // Computational Statistics & Data Analysis. 2005. V. 49. No. 3. – P.709-721.
10. *Zhang J.* Powerful Two-Sample Tests Based on the Likelihood Ratio // Technometrics. 2006. V. 48. No. 1. – P.95-103.
11. *Rahman M., Pearson L.M., Heien H.C.* A Modifed Anderson-Darling Test for Uniformity// Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society. Second Series. Vol 29. – P.11-16.
12. *Philonenko P., Postovalov S.* The new robust two-sample test for randomly right-censored data // Journal of Statistical Computation and Simulation, 2019. DOI: 10.1080/00949655.2019.1578769

Блинов Павел Юрьевич

Аспирант кафедры теоретической и прикладной информатики НГТУ (630073, Новосибирск, просп. Карла Маркса, 20), e-mail: `blindizer@ya.ru`.

Лемешко Борис Юрьевич

Д.т.н., профессор, г.н.с. кафедры теоретической и прикладной информатики НГТУ (630073, Новосибирск, просп. Карла Маркса, 20), e-mail: `lemeshko@ami.nstu.ru`.

The ranking question of tests for checking deviation from uniform distribution

P. Yu. Blinov, B. Yu. Lemeshko

The power comparison analysis of uniformity tests and goodness-of-fit tests under testing of uniformity hypothesis on unit interval [0,1] are carried out. The description of decision-making models of Wald, Laplace and Savage under conditions of uncertainty are provided. We provide recommendations for using models of decision making and also recommendations about choice of optimal test based on results of research.

Keywords: uniformity tests, testing hypothesis, power of test, decision-making models under conditions of uncertainty.