О некоторых критериях проверки показательности

А. А. Зорина, Б. Ю. Лемешко[1]
Новосибирский государственный технический университет

Рассматриваются критерии проверки гипотезы о принадлежности выборки показательному закону распределения. Исследуются распределения статистик критериев, мощность критериев относительно различных конкурирующих гипотез. Опираясь на результаты исследований, даны рекомендации по применению критериев.

Ключевые слова: показательное распределение, мощность, критерий Лоренца, критерий Морана.

1. Введение

В задачах статистического анализа популярной моделью является показательный закон распределения вероятностей. Это можно объяснить не только тем, что эта модель проста и удобна в использовании, но и тем, что во многих задачах теории надёжности и анализа выживаемости она хорошо описывает случайные величины, связанные с данными типа времени жизни, заболеваний, смерти или временами отказов некоторых устройств и объектов. Гипотеза о принадлежности показательному закону времени наработки на отказ эквивалентна гипотезе о том, что наблюдаемый объект имеет постоянную интенсивность отказов.

Проверке гипотез о принадлежности выборки показательному закону посвящено большое количество работ, в которых авторами предлагаются различные статистические критерии. Обилие критериев обусловлено, с одной стороны, частым использованием модели показательного закона в приложениях. В определённой степени эта частота стимулирована открывающейся возможностью в дальнейшем искать решение задачи с опорой на аналитические методы. С другой стороны, множество имеющихся критериев свидетельствует об отсутствии некоторого безоговорочно предпочтительного критерия.

Данная работа посвящена исследованию свойств и мощности критериев Лоренца и Морана и дополняет результаты [1], способствующие подготовке рекомендаций, аналогичных [2,3].

2. Теоретическая часть

2.1. Проверяемая гипотеза и рассматриваемые критерии проверки

Обозначим показательное распределение случайной величины X как $Exp(\lambda)$, где $\lambda > 0$ – параметр масштаба распределения. Функции распределения вероятностей и плотности для показательного закона имеют соответственно вид:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = 1 - e^{-\lambda x},\ x \in R. \quad (1)$$

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}. \quad (2)$$

[1] Исследования выполнены при поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках государственной работы «Обеспечение проведения научных исследований» и проектной части государственного задания (проект № 1.1009.2017/ПЧ)

Статистической гипотезой называется любое утверждение о виде и свойствах распределения наблюдаемых в эксперименте случайных величин. Для проверки статистической гипотезы H_0 должно быть сформулировано правило, позволяющее по результатам наблюдений делать вывод об отклонении или принятии (не отклонении) проверяемой гипотезы. Правило, согласно которому проверяемая гипотеза H_0 принимается или отклоняется, представляет собой статистический критерий. Каждый критерий характеризуется доверительной областью для его статистики, т.е. подмножеством выборочного пространства, попадание в которое значение статистики критерия влечет за собой принятие гипотезы H_0. Дополнительная область, попадание в которую приводит к отклонению H_0 в пользу некоторой конкурирующей гипотезы H_1, называется критической областью.

При проверке гипотезы о принадлежности случайной величины показательному закону различают простую и сложную гипотезы. Простой гипотезой является утверждение $H_0 : X \in Exp(\lambda)$, где λ – известное значение параметра. А сложной гипотезой – утверждение $H_0 : F(x) \in \{F(x,\theta), \theta \in \Theta\}$, где Θ – область определения параметра θ.

Пусть $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ – выборка независимых наблюдений случайной величины X объёма *n*. Задачи проверки гипотез опираются на выборки случайных величин. Случайность самой выборки предполагает, что возможны и ошибки в результатах статистических выводов. С результатами проверки гипотез связывают ошибки двух видов. Ошибкой первого рода называется событие, состоящее в том, что гипотеза H_0 отвергается, когда она верна. Ошибкой второго рода состоит в том, что гипотеза H_0 принимается, когда верна конкурирующая гипотеза. Вероятность ошибки первого рода обозначают α, второго рода – β.

Мощностью критерия называется величина $1-\beta$, т.е. вероятность того, что при справедливой конкурирующей гипотезе H_1 гипотеза H_0 будет отклонена. Очевидно, что чем выше мощность используемого критерия при заданном значении α, тем лучше он различает гипотезы H_0 и H_1. Особенно важно, чтобы используемый критерий хорошо различал близкие альтернативы.

Для проверки принадлежности выборки показательному закону распределения используются ряд критериев, непосредственно построенных для этой цели. Такую гипотезу можно проверять с помощью аналогов критериев нормальности, адаптированных для показательного закона, а также с использованием различных критериев согласия [4, 5].

Некоторые критерии проверки показательности основаны на оценке порядковых статистик величины X – элементов $x_{(i)}$ вариационного ряда $x_{(1)} < x_{(2)} < \ldots < x_{(n)}$, построенного по выборке $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$.

2.2. Конкурирующие гипотезы, рассматриваемые при анализе мощности критериев

Для исследования мощности критериев рассматривалась принадлежность наблюдаемой случайной величины следующим конкурирующим гипотезам:

$$H_1 : F(x) = W(0.8,1,0), x \in [0,+\infty), \tag{3}$$

$$H_2 : F(x) = W(1.2,1,0), x \in [0,+\infty), \tag{4}$$

где $W(a,1,0)$ – распределение Вейбулла с параметром формы *a*;

$$H_3 : F(x) = \Gamma(0.5,1,0), x \in [0,+\infty), \tag{5}$$

$$H_4 : F(x) = \Gamma(1.2,1,0), x \in [0,+\infty), \tag{6}$$

где $\Gamma(a,1,0)$ – Гамма-распределение с параметром формы a.

В данной работе рассматриваемые критерии показательности исследовались методами статистического моделирования. При исследовании распределений статистик критериев количество экспериментов, осуществляемых при статистическом моделировании, принималось равным 1660000. Такое количество экспериментов позволяет, с одной стороны, проследить качественную картину, отражающую изменение распределений статистик в зависимости от различных факторов, с другой – обеспечить приемлемую точность получаемых оценок мощности и искомых вероятностей [6].

3. Критерии показательности

3.1. Критерий Лоренца

Критерий Лоренца (Л) [7, 8] описывает кривую Лоренца. Для положительной упорядоченной выборки размерности n статистика критерия имеет вид

$$L(p) = \sum_{i=1}^{[np]} x_{(i)} \Big/ n\bar{x} = \sum_{i=1}^{[np]} x_{(i)} \Big/ \sum_{i=1}^{n} x_i\,, \tag{7}$$

где $0 < p < 1$ и $[np]$ – целая часть от np (или наибольшее целое).

Критерий двусторонний, проверяемая гипотеза отклоняется при малых и больших значениях статистики (7). Зависимость функции распределения $G(L|H_0)$ статистики (7) от значения параметра p при $n=100$ показана на рис. 1, а зависимость от объёма выборки при $p=0.5$ – на рис.2.

Распределения статистики (7) критерия Лоренца зависят от объёма выборки, но не в такой степени как распределения статистики критерия Бартлетта–Морана, [6].

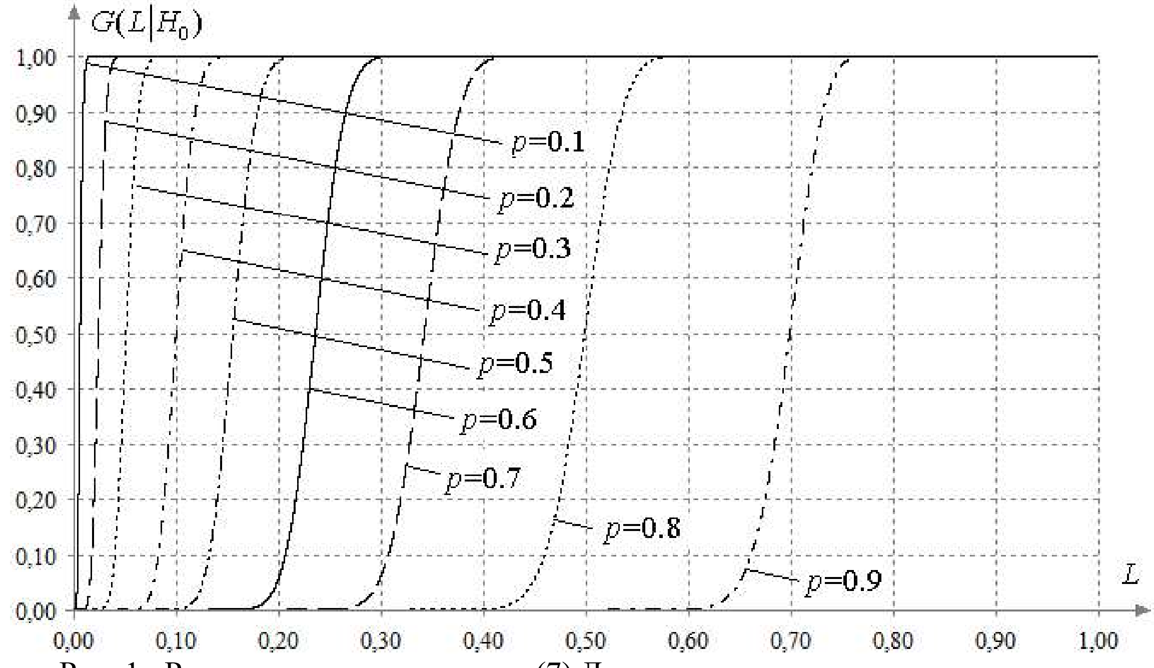

Рис. 1. Распределение статистики (7) Лоренца в зависимости от параметра p

Говорится, что статистика вида

$$L^* = \sqrt{n}\big(L - p - (1-p)\ln(1-p)\big), \tag{8}$$

где $p \in (0,1)$, с ростом параметра p приближается к нормальному закону.

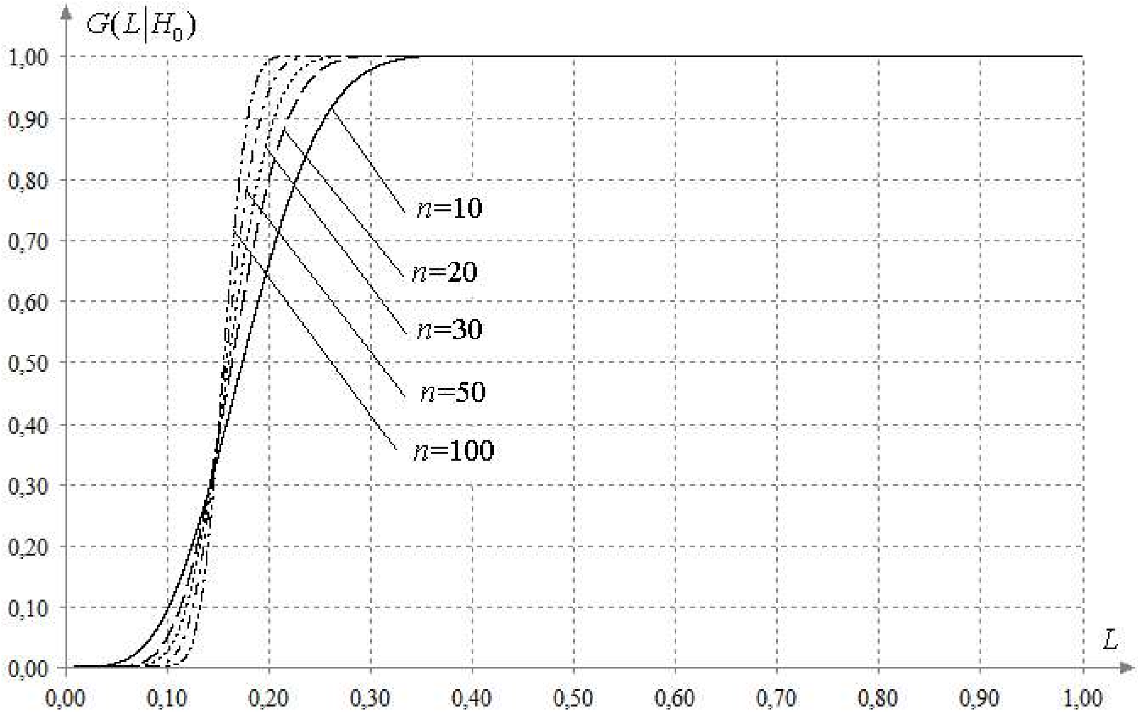

Рис. 2. Распределение статистики (7) Лоренца с параметром $p = 0.5$ в зависимости от n

3.1. Критерий Морана

Критерий Морана (М) [10] считается асимптотически наиболее мощным против конкурирующей гипотезы в виде гамма-распределения с параметром формы больше 1. Статистика критерия имеет вид

$$T_n = \left| \gamma + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ln \frac{x_i}{\bar{x}} \right|, \tag{9}$$

где γ – постоянная Эйлера. Критерий правосторонний, проверяемая гипотеза отклоняется при больших значениях статистики (9). Зависимость распределения $G(T_n |H_0)$ статистики (9) от объёма выборки показана на рис. 3.

Нормализованная модификация статистики

$$T_n^* = \sqrt{n} T_n \Big/ \sqrt{\frac{\pi^2}{6} - 1} \tag{10}$$

сходится к стандартному полунормальному закону. Сходимость распределения $G(T_n^* |H_0)$ статистики (10) к полунормальному закону показана на рис 4. Отклонением распределения статистики (10) от стандартного полунормального закона можно пренебречь при объёмах выборок $n > 50$.

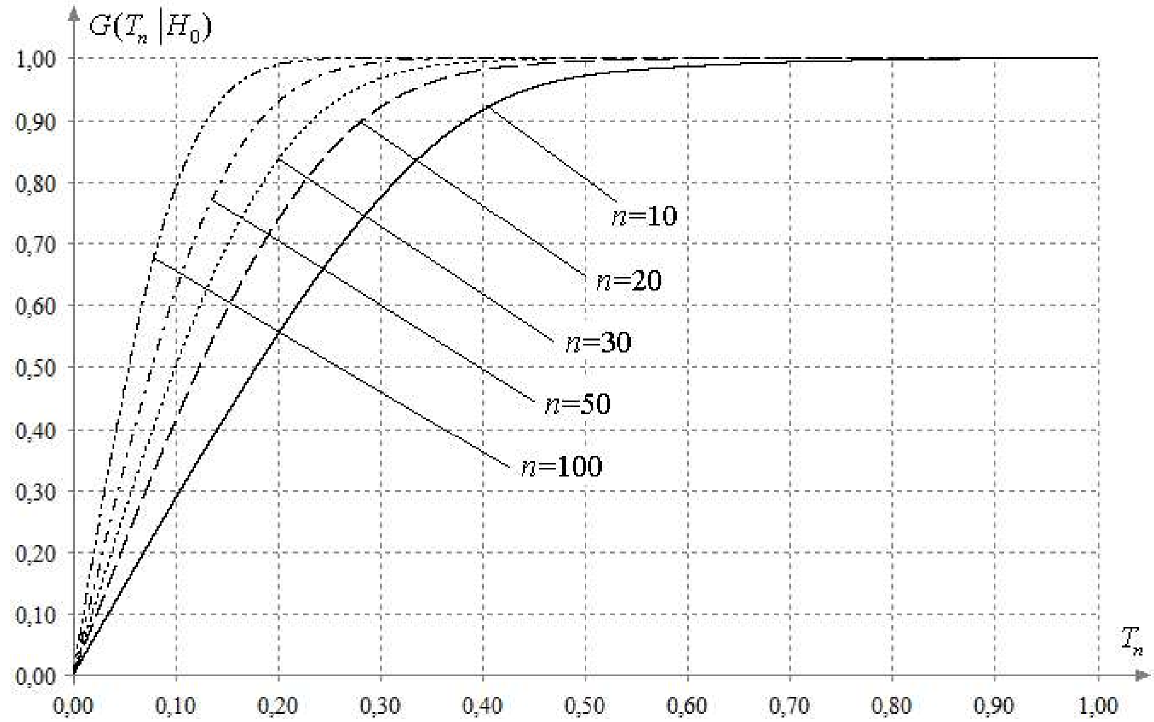

Рис. 5. Распределение статистики (9) критерия Морана в зависимости от n

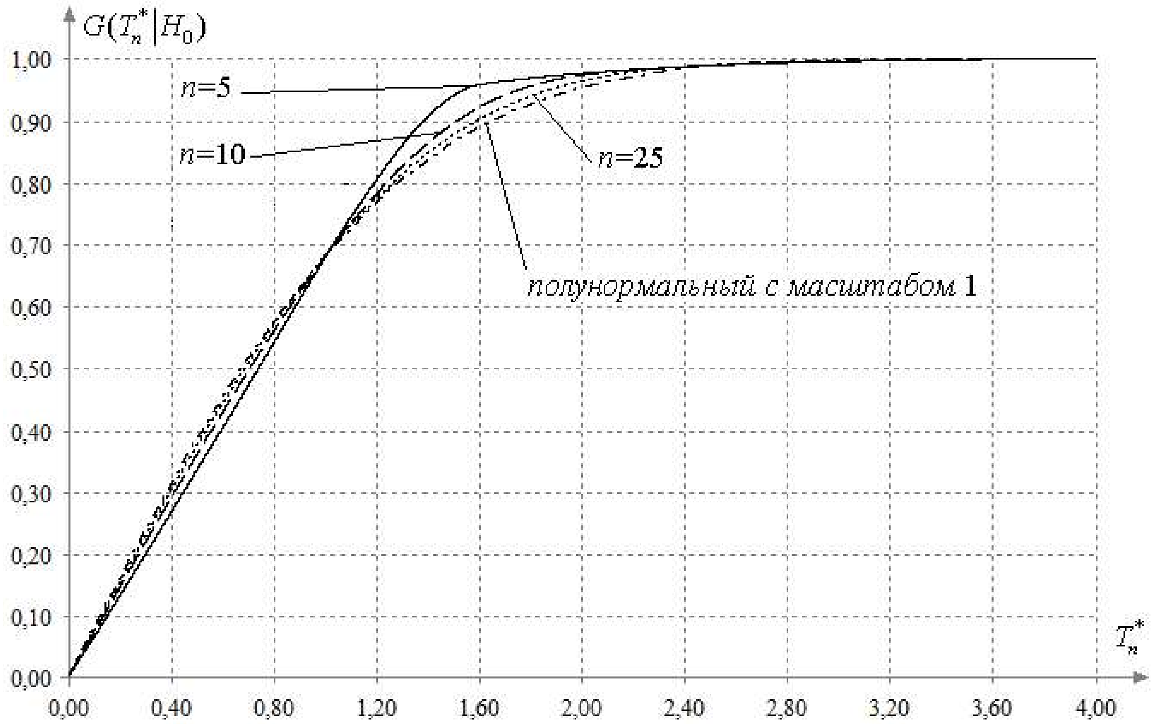

Рис. 4. Сходимость распределения статистики (10) к стандартному полунормальному закону

4. Исследование мощности некоторых критериев

В ходе работы был проведен анализ мощности двух рассматриваемых критериев в сравнении с некоторыми известными критериями показательности, такими как критерий Андерсона–Дарлинга (АД), Кокса–Оукса (КО), Эппса–Палли (ЭП) и Холландера–Прошана (ХП).

Оценки мощности критериев при проверке гипотезы H_0 относительно конкурирующих гипотез H_1 и H_2 при объёме выборки $n = 25$ представлены в табл. 1, а относительно конкурирующих гипотез H_3 и H_4 – в табл. 2.

Таблица 1. Оценки мощности критериев относительно H_1 и H_2

Критерий	α									
	H_1					H_2				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
Андерсона–Дарлинга	0.475	0.407	0.312	0.238	0.164	0.309	0.230	0.134	0.074	0.031
Кокса–Оукса	0.511	0.436	0.328	0.242	0.158	0.350	0.271	0.169	0.102	0.051
Холландера–Прошана	0.440	0.365	0.262	0.184	0.113	0.315	0.240	0.148	0.089	0.044
Эппса–Палли	0.460	0.384	0.279	0.199	0.125	0.335	0.258	0.161	0.097	0.048
Лоренца (0.5)	0.454	0.378	0.273	0.194	0.121	0.319	0.243	0.149	0.089	0.045
Морана	0.490	0.435	0.356	0.287	0.205	0.354	0.255	0.126	0.047	0.005

Таблица 2. Оценки мощности критериев относительно H_3 и H_4

Критерий	α									
	H_3					H_4				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
Андерсона–Дарлинга	0.878	0.845	0.786	0.723	0.637	0.201	0.139	0.072	0.036	0.013
Кокса–Оукса	0.903	0.872	0.811	0.744	0.650	0.221	0.158	0.089	0.049	0.022
Эппса–Палли	0.791	0.734	0.632	0.533	0.414	0.209	0.149	0.082	0.045	0.020
Холландера–Прошана	0.829	0.783	0.701	0.616	0.511	0.203	0.144	0.079	0.043	0.019
Лоренца (0.5)	0.819	0.771	0.685	0.598	0.491	0.203	0.144	0.079	0.043	0.019
Морана	0.911	0.891	0.855	0.815	0.749	0.231	0.153	0.066	0.022	0.002

По мощности относительно рассмотренных конкурирующих гипотез все критерии можно упорядочить следующим образом:

– относительно гипотезы H_1 → КО $\succ$ М $\succ$ АД $\succ$ ЭП $\succ$ Л05 $\succ$ ХП;
– относительно гипотезы H_2 → КО $\succ$ М $\succ$ ЭП $\succ$ Л05 $\succ$ ХП $\succ$ АД;
– относительно гипотезы H_3 → М $\succ$ КО $\succ$ АД $\succ$ ХП $\succ$ Л05 $\succ$ ЭП;
– относительно гипотезы H_4 → М $\succ$ КО $\succ$ ЭП $\succ$ Л05 $\succ$ ХП $\succ$ АД.

Можно обратить внимание, что критерий Морана всегда предпочтительнее критерия Лоренца. В то же время при малых задаваемых уровнях значимости α ситуация может меняться на противоположную.

5. Заключение

Методами статистического моделирования исследованы распределения статистик некоторых критериев показательности. Проведен сравнительный анализ мощности критериев относительно некоторых конкурирующих гипотез, что позволяет судить о предпочтительности применения тех или иных критериев. Отмечены недостатки некоторых критериев.

Показано, что среди рассмотренных критериев нельзя однозначно выбрать критерий, обладающий наибольшей мощностью относительно всех рассмотренных альтернатив.

Литература

1. *Рогожников А. П.* Исследование свойств некоторых критериев проверки статистических гипотез и обеспечение корректности их применения методами компьютерного моделирования : диссертация / канд. тех. наук. НГТУ, Новосибирск, 2012.
2. *Лемешко Б. Ю*. Критерии проверки отклонения распределения от нормального закона. Руководство по применению. М.: ИНФРА-М, 2015. 160 с.
3. *Лемешко Б. Ю., Блинов П. Ю.* Критерии проверки отклонения распределения от равномерного закона. Руководство по применению. М.: ИНФРА-М, 2015. 183 с.
4. *Лемешко Б. Ю*. Непараметрические критерии согласия: Руководство по применению. М.: ИНФРА-М, 2014. 163 с.
5. *Денисов В. И., Лемешко Б. Ю., Постовалов С.Н.* Прикладная статистика. Правила проверки согласия опытного распределения с теоретическим. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 1998. Часть I. Критерии типа χ^2. 126 с.
6. *Лемешко Б. Ю., Постовалов С. Н.* Компьютерные технологии анализа данных и исследования статистических закономерностей. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2004. 119 с.
7. *Ascher S.* A survey of tests for exponentiality // Communications in Statistics – Theory and Methods. 1990. Vol. 19. P. 1811-1825.
8. *Osborne J. A., Severini A. S.* The Lorenz Curve for Model Assessment in Exponential Order Statistic Models // Journal of Statistical Computation and Simulation. 2002. Vol. 72. P. 87-97.
9. *Кобзарь А. И.* Прикладная математическая статистика. Для инженеров и научных работников. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. 816 с.
10. *Чирина А. В.* Асимптотическая эффективность и локальная оптимальность по Бахадуру критерия экспоненциальности, основанного на статистике Морана / Вероятность и статистика. 5, Зап. научн. сем. ПОМИ, **294**, ПОМИ, СПб. 2002. С. 245–25.

Лемешко Борис Юрьевич

д.т.н., профессор, г.н.с. кафедры теоретической и прикладной информатики НГТУ (630073, Новосибирск, просп. Карла Маркса, 20),e-mail: lemeshko@ami.nstu.ru.

Зорина Александра Алексеевна

магистрант кафедры теоретической и прикладной информатики НГТУ (630073, Новосибирск, просп. Карла Маркса, 20), e-mail: programm13@gmail.com.

About some tests of exponentiality

A. A. Zorina, B. Yu. Lemeshko

The exponential tests are considered. Distributions of the test statistics, power of tests under different competing hypotheses are studied. We provide recommendations for using tests based on results of studies.

Keywords: exponential distribution, test, test statistic, test power.