Сибирский государственный университет
телекоммуникаций и информатики

ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

РОССИЙСКАЯ
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКАЯ
КОНФЕРЕНЦИЯ

МАТЕРИАЛЫ КОНФЕРЕНЦИИ

Новосибирск
2018

ISBN 978-5-91434-042-8

СОДЕРЖАНИЕ

Секция 1
ИНФОРМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
Подсекция 1.1. НГТУ

Бауэр Д.В., Гультяева Т.А. Разработка программной системы электронного голосования на децентрализованной платформе. 6

Блинов П.Ю., Лемешко Б.Ю. Свойства критериев экспоненциальности Дешпанде. 10

Гриф А.М. Экологический 3D-мониторинг качества воздуха города Новосибирска на основе данных спутниковой навигации, мобильных экометрических станций и метода конечных элементов. 17

Зорина А.А., Лемешко Б.Ю. О критериях проверки показательности Аткинсона. 26

Кобылянский В.Г., Михед К.А. Исследование динамических характеристик виртуального прибора ColorLearn среды LabVIEW. 31

Кочнев А.В., Волкова В.М. Идентификация сообществ, формируемых системой горизонтального премирования методами кластеризации в графах. 35

Лемешко Б.Ю., Белоцерковец В.Н. О свойствах и мощности критериев нормальности Лина–Мудхолкара и Васичека. 40

Лемешко Б.Ю., Веретельникова И.В. О применении и мощности k-выборочных критериев однородности законов. 48

Лемешко Б.Ю., Новикова А.Ю. О критериях Миллера и Лайарда и мощности критериев однородности дисперсий. 60

Морозов Ю.В., Спектор А.А. Выравнивание амплитуд импульсов шагов человека при классификации сейсмических сигналов. 70

Осинцева Е.А., Чимитова Е.В. Построение оптимальных планов эксперимента на основе винеровской деградационной модели. 75

Патрушев И.И., Персова М.Г., Соловейчик Ю.Г. Исследование численного метода трёхмерного моделирования процесса многофазной фильтрации. 85

Поверин Д.В., Постовалов С.Н. Оценивание вероятности обнаружения новых ассоциаций при комбинировании результатов полногеномного анализа ассоциаций. 93

Попов А.А., Бобоев Ш.А. Сравнение разреженных решений, получаемых разбиением выборки на части на основе внешних критериев качества моделей в методе LS–SVM. 102

Попов А.А., Холдонов А.А. Построение деревьев регрессии при разбиении области действия факторов на нечеткие партиции. 110

Попов А.А., Холкин В.В. Построение робастных и разреженных решений по методу опорных векторов с функцией потерь Йохана Сайкинса. 117

Сергеева С.А., Чимитова Е.В. Построение обратной гауссовской деградационной модели с фиксированным и случайным эффектами. 123

Соснин И.В., Гультяева Т.А. Применение NLP-библиотек для решения задач классификации текстов. 135

Толстобров И.А., Ступаков И.М. Вычисление сингулярных интегралов для базисных функций высокого порядка в методе граничных элементов с применением рекуррентных соотношений. 139

Филоненко П.А., Постовалов С.Н. Выбор статистического критерия однородности распределений с помощью правила Сэвиджа для принятия решений в условиях риска и неопределенности. 144

Черникова О.С., Долгов А.А. Применение адаптивного сигма-точечного фильтра Калмана при исследовании непрерывно-дискретных систем. 150

Чубич В.М., Прокофьева А.Э. Активная параметрическая идентификация одной динамической системы с использованием робастного оценивания. 159

УДК 519.24

О критериях Миллера и Лайарда и мощности критериев однородности дисперсий

Б. Ю. Лемешко, А. Ю. Новикова[1]
Новосибирский государственный технический университет

Методами статистического моделирования исследованы распределения статистик критериев однородности дисперсий. Приводятся результаты сравнительного анализа мощности критериев по отношению к конкурирующим гипотезам, делаются выводы о предпочтительности использования тех или иных критериев. Реализована возможность применения и исследования распределений статистик критериев, в условиях нарушения стандартных предположений. Полученные результаты должны способствовать корректному применению критериев в приложениях.

Ключевые слова: проверка гипотезы, статистическое моделирование, мощность критерия.

1. Введение

Критерии проверки гипотез об однородности используются во многих приложениях. При этом речь может идти о проверке гипотез об однородности законов распределения, соответствующих анализируемым выборкам, или об однородности математических ожиданий, или об однородности дисперсий.

Применение классических критериев проверки однородности дисперсий связано с выполнением основного предположения о принадлежности наблюдаемых случайных величин (погрешностей измерений) нормальному закону распределения. При этом давно известно, что параметрические критерии однородности дисперсий чрезвычайно чувствительны к малейшим отклонениям наблюдаемых случайных величин от нормального закона. При нарушении данного предположения условные распределения статистик критериев при справедливости проверяемой гипотезы, как правило, сильно изменяются. Так как погрешности измерительных приборов или наблюдаемые в различных приложениях величины далеко не всегда подчиняются нормальному закону, то применение классических результатов в таких условиях может приводить к неверным выводам.

В данной работе основное внимание уделено исследованию свойств двух многовыборочных критериев однородности дисперсий, не вошедших в ранее подготовленное руководство [1]: критериям Миллера [2] и Лайарда [3].

2. Критерии проверки гипотез об однородности дисперсий

В критериях проверки однородности дисперсий проверяемая гипотеза о постоянстве дисперсий k выборок имеет вид

$$H_0\colon \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \ldots = \sigma_k^2, \tag{1}$$

а конкурирующая с ней гипотеза

$$H_1\colon \sigma_{i_1}^2 \neq \sigma_{i_2}^2, \tag{2}$$

[1] Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках государственной работы «Обеспечение проведения научных исследований» (№ 1.4574.2017/6.7) и проектной части государственного задания (№ 1.1009.2017/4.6)..

где неравенство выполняется, хотя бы для одной пары индексов i_1, i_2.

Для проверки гипотез строятся статистические критерии. В процессе проверки на основании вычисляемого по анализируемым выборкам значения статистики критерия проверяемая гипотеза принимается или отклоняется. С проверкой статистических гипотез связывают ошибки двух видов. Ошибка первого рода заключается в том, что гипотеза H_0 отвергается, когда она верна. Вероятность такой ошибки (уровень значимости), как правило, обозначают α. Ошибка второго рода связана с тем, что гипотеза H_0 не отклоняется при справедливости некоторой конкурирующей гипотезы H_1. Вероятность ошибки второго рода обозначают β. При заданной конкурирующей гипотезе H_1 можно говорить о мощности критерия $1-\beta$ относительно этой гипотезы при заданном уровне значимости α.

Очевидно, что чем выше мощность критерия, тем лучше он различает гипотезы H_0 и H_1, тем он предпочтительней.

При исследовании распределений статистик и оценке мощности критериев в условиях ограниченных объемах выборок аналитические методы, как правило, не приносят результата, в связи с чем приходится опираться на компьютерные технологии методы статистического моделирования. В данном случае также при исследовании распределений статистик рассматриваемых критериев и оценке мощности критериев относительно различных конкурирующих гипотез использовались методика статистического моделирования [4] и развиваемая на базе [5] программная система ISW (Интервальная статистика под Windows) [6]. При этом объем моделируемых выборок исследуемых статистик составлял величину $N = 10^6$. При таких N разность между истинным законом распределения статистики и смоделированным эмпирическим по модулю не превышает величины 10^{-3}.

Исследования распределений статистик проводились не только при нормальном, но и других различных наблюдаемых законах, в частности в случае принадлежности моделируемых выборок семейству с плотностью

$$De(\theta_2) = f(x; \theta_0, \theta_1, \theta_2) = \frac{\theta_2}{2\theta_1 \Gamma(1/\theta_2)} \exp\left(-\left(\frac{|x-\theta_0|}{\theta_1}\right)^{\theta_2}\right) \tag{3}$$

при различных значениях параметра формы θ_2. Это семейство может быть хорошей моделью для законов распределения погрешностей различных измерительных систем. Распределение $\mathrm{De}(\theta_2)$ включает в качестве частных случаев распределение Лапласа $(\theta_2 = 1)$ и нормальное $(\theta_2 = 2)$. Семейство (3) позволяет задавать различные симметричные законы распределения, в той или иной мере отличающиеся от нормального: чем меньше значение параметра формы θ_2, тем «тяжелее» хвосты распределения $\mathrm{De}(\theta_2)$, чем больше параметр, тем хвосты «легче».

В данном разделе кратко рассматривается многовыборочные критерии дисперсии, исследованных в данной работе.

Критерий Миллера. Миллер [2] предложил критерий однородности дисперсий, базирующийся на F-преобразовании Фишера для выборочных дисперсий. Лайард [3] обобщил двухвыборочный критерий Миллера на случай k выборок.

Статистика k-выборочного критерия Миллера имеет вид

$$M = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i \left(\overline{U}_{i\bullet} - \overline{U}_{\bullet\bullet}\right)^2 \Big/ (k-1)}{\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} \left(U_{ij} - \overline{U}_{i\bullet}\right)^2 \Big/ (n-k)}, \tag{4}$$

где

$$U_{ij} = n_i \ln S_i^2 - (n_i - 1)\ln S_{i(j)}^2;$$

$$S_i^2 = \frac{1}{n_i - 1}\sum_{j=1}^{n_i}\left(x_{ij} - \bar{x}_i\right)^2; \bar{x}_i = \frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}; S_{i(j)}^2 = \frac{1}{n_i - 2}\sum_{l \neq j}\left(x_{il} - \bar{x}_{i(j)}\right)^2;$$

$$\bar{x}_{i(j)} = \frac{1}{n_i - 1}\sum_{l \neq j} x_{il}; \overline{U}_{i\cdot} = \frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i} U_{ij}; \quad \overline{U}_{\cdot\cdot} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} U_{ij}; \quad n = \sum_{i=1}^{k} n_i .$$

При справедливости проверяемой гипотезы H_0 об однородности дисперсий и выполнении предположений о принадлежности выборок нормальным законам статистика (4) должна подчиняться F-распределению Фишера с числами степеней свободы ($k-1$) и ($n-k$). Проверяемая гипотеза отклоняется при больших значениях статистик.

Отметим, что при малых объёмах выборок распределение $G(M_n|H_0)$ статистики (4) Миллера заметно отличается от соответствующего F-распределения. На рис. 1 показано отклонение реального распределения $G(M_n|H_0)$ от F-распределения для $k=4$ при объёмах сравниваемых выборок $n_i = 10$. Реально отклонением распределения $G(M_n|H_0)$ статистики от распределения Фишера с ($k-1$) и ($n-k$) степенями свободы можно пренебречь при $n_i > 40 \div 50$.

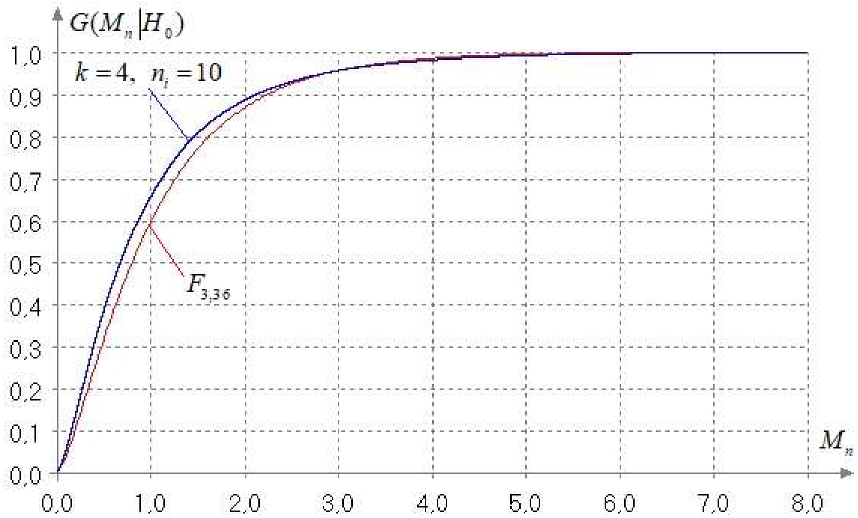

Рис. 1. Отклонение распределения статистики (4) от $F_{k-1,\, n-k}$ - распределения

Распределения статистики (4) чувствительны к нарушению предположения о нормальности анализируемых выборок.

Критерий Лайарда. Лайард [3] представил критерий со статистикой, в которой используется функция эксцесса нескольких выборок для проверки однородности дисперсий.

Статистика критерия Лайарда определяется выражением

$$L = \sum_{i=1}^{k}(n_i - 1)\frac{\left(\ln S_i^2 - T\right)^2}{\delta^2}, \tag{5}$$

где

$$T = \left[\sum_{i=1}^{k}(n_i - 1)\ln S_i^2\right] \Big/ (n-k); \quad n = \sum_{i=1}^{k} n_i; \quad \delta^2 = 2 + \gamma\left[1 - k/n\right];$$

$$\gamma = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i^2\left[\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij} - \bar{x}_i)^4 \Big/ \left(\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij} - \bar{x}_i)^2\right)^2\right] - 3. \tag{6}$$

Здесь γ – взвешенное среднее коэффициентов эксцесса k выборок.

Автор критерия далее предпочёл использовать в статистике (5) несколько другую оценку коэффициента эксцесса:

$$\hat{\gamma} = n\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij}-\overline{x}_i)^4 \Bigg/ \left[\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij}-\overline{x}_i)^2\right]^2 - 3 . \qquad (7)$$

Проверяемая гипотеза отклоняется при больших значениях статистики (5), которая при справедливости проверяемой гипотезы об однородности дисперсий и выполнении предположения о принадлежности выборок нормальным законам асимптотически подчиняется χ^2_{k-1}-распределению. Однако необходимо отметить, что сходимость распределения статистики $G(L_n|H_0)$ к χ^2_{k-1}-распределению достаточно медленная. Реально отклонением $G(L_n|H_0)$ от χ^2_{k-1}-распределения, например, при $k=2$ можно пренебречь лишь при $n_i > 300$ (см. рис. 2).

Заметим также, что для вычисления статистики (5) предпочтительней использовать оценку (7), так как в случае применения оценки (6) сходимость $G(L_n|H_0)$ к χ^2_{k-1}-распределению несколько хуже.

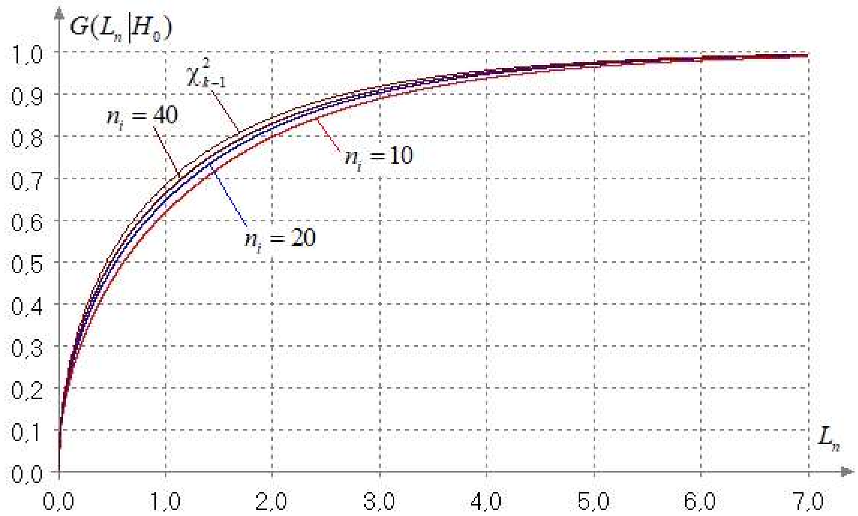

Рис. 2. Сходимость распределения статистики (5) к χ^2_{k-1}- распределению

3. Сравнительный анализ мощности критериев

В процессе исследования распределений статистик (4) и (5) и оценивания мощности критериев однородности дисперсий были зафиксированы некоторые особенности, которые могут влиять на формирование выводов при использовании соответствующих критериев.

Настоящая работа дополняет исследования [7, 8, 9, 10, 11, 12] , где был проведен сравнительный анализ мощности и исследованы свойства ряда параметрических (Бартлетта, Кокрена, Фишера, Хартли, Левене) и непараметрических (Ансари–Бредли, Муда, Сижела–Тьюки, Кейпена, Клотца) критериев, в том числе в условиях нарушения стандартных предположений.

В данном случае также методами статистического моделирования (для вероятностей ошибок первого рода $\alpha = 0.1$) мощность рассматриваемых критериев однородности средних для случая 2-х выборок исследовалась относительно трёх конкурирующих гипотез:

H_1: $\sigma_2 = 1.1\sigma_1$; H_2: $\sigma_2 = 1.2\sigma_1$; H_3: $\sigma_2 = 1.5\sigma_1$;

С учетом предшествующих работ в таблицах 1-3 рассматриваемые критерии упорядочены по убыванию мощности относительно конкурирующих гипотез H_1, H_2, H_3.

Таблица 1. Оценки мощности критериев относительно конкурирующей гипотезы $H_1: \sigma_2 = 1.1\sigma_1$

Критерий	Объем выборки				
	$n=10$	$n=20$	$n=40$	$n=60$	$n=100$
Бартлетта, Кокрена, Хартли, Фишера, Неймана–Пирсона, Z–критерий Оверолла–Вудворда	0.112	0.128	0.157	0.188	0.246
Лайарда	0.110	0.125	0.155	0.185	0.243
Миллера	0.110	0.125	0.154	0.185	0.243
Модифицированный Z–критерий, О'Брайена	0.109	0.125	0.154	0.184	0.243
Клотца	0.109	0.123	0.151	0.181	0.236
Левене	0.110	0.123	0.150	0.176	0.228
Флайне–Киллина	0.108	0.121	0.147	0.172	0.223
Муда	0.108	0.120	0.143	0.166	0.212
Ньюмана	0.111	0.123	0.143	0.159	0.186
Ансари–Бредли	0.109	0.125	0.138	0.154	0.190
Сижела–Тьюки	0.107	0.120	0.137	0.154	0.190
Блисса–Кокрена–Тьюки, Кадуэлла–Лесли–Брауна, Линка	0.111	0.119	0.133	0.141	0.154

Таблица 2. Оценки мощности критериев относительно конкурирующей гипотезы $H_2: \sigma_2 = 1.2\sigma_1$

Критерий	Объем выборки				
	$n=10$	$n=20$	$n=40$	$n=60$	$n=100$
Бартлетта, Кокрена, Хартли, Фишера, Неймана–Пирсона, Z–критерий Оверолла–Вудворда	0.144	0.199	0.304	0.401	0.564
Лайарда	0.139	0.193	0.295	0.391	0.557
Миллера	0.137	0.191	0.294	0.391	0.557
Модифицированный Z–критерий, О'Брайена	0.134	0.188	0.292	0.389	0.555
Клотца	0.133	0.183	0.280	0.376	0.540
Левене	0.135	0.184	0.276	0.363	0.515
Флайне–Киллина	0.131	0.177	0.266	0.351	0.503
Муда	0.130	0.172	0.253	0.331	0.470
Ньюмана	0.140	0.183	0.251	0.304	0.386
Ансари–Бредли	0.133	0.171	0.232	0.290	0.405
Сижела–Тьюки	0.128	0.166	0.228	0.290	0.405
Блисса–Кокрена–Тьюки, Кадуэлла–Лесли–Брауна, Линка	0.139	0.171	0.216	0.246	0.289

По своим асимптотическим свойствам и мощности критерий Лайарда очень близок критерию Миллера и несколько превосходит последний по мощности лишь при малых объёмах выборок.

При анализе мощности критериев в случае, когда число выборок больше двух, в качестве конкурирующих гипотез рассматривались ситуации, когда $k-1$ выборка принадлежала закону с некоторым $\sigma = \sigma_1$, а одна из выборок, например, с номером k принадлежала закону с отличающимся значением σ (H_1: $\sigma_k = 1.1\sigma_1$; H_2: $\sigma_k = 1.2\sigma_1$; H_3: $\sigma_k = 1.5\sigma_1$).

Таблица 3. Оценки мощности критериев относительно конкурирующей гипотезы H_3: $\sigma_2 = 1.5\sigma_1$

Критерий	Объем выборки				
	$n=10$	$n=20$	$n=40$	$n=60$	$n=100$
Бартлетта, Кокрена, Хартли, Фишера, Неймана–Пирсона, Z–критерий Оверолла–Вудворда	0.312	0.532	0.806	0.926	0.991
Лайарда	0.289	0.503	0.787	0.918	0.990
Миллера	0.281	0.500	0.786	0.918	0.990
О'Брайена	0.266	0.490	0.783	0.917	0.990
Модифицированный Z–критерий	0.265	0.489	0.781	0.916	0.990
Клотца	0.258	0.463	0.754	0.900	0.987
Левене	0.269	0.471	0.746	0.888	0.981
Флайне–Киллина	0.249	0.442	0.719	0.870	0.977
Муда	0.243	0.424	0.688	0.842	0.964
Ньюмана	0.296	0.473	0.682	0.796	0.901
Ансари–Бредли	0.242	0.392	0.616	0.768	0.926
Сижела–Тьюки	0.231	0.384	0.613	0.768	0.926
Блисса–Кокрена–Тьюки, Кадуэлла–Лесли–Брауна, Линка	0.285	0.425	0.584	0.674	0.776

Результаты сравнительного анализа мощности критериев относительно конкурирующих гипотез H_1, H_2, H_3 при $k = 3$ и $k = 5$ представлены в таблицах 4-6.

Можно заметить, что в случае числа выборок больше двух критерий Лайарда теряет свое преимущество перед критерием Миллера.

Таблица 4. Оценки мощности многовыборочных критериев однородности дисперсий относительно конкурирующей гипотезы H_1: $\sigma_2 = 1.1\sigma_1$, $n_i = 100$, $i = \overline{1,k}$

Критерий	α					
	0.1	0.05	0.01	0.1	0.05	0.01
	$k = 3$			$k = 5$		
Кокрена	0.250	0.161	0.056	0.241	0.156	0.056
О'Брайена	0.243	0.153	0.051	0.230	0.144	0.048
Z–критерий Оверолла–Вудворда	0.243	0.153	0.051	0.227	0.141	0.046
Неймана–Пирсона, Бартлетта	0.242	0.152	0.049	0.224	0.138	0.044
Модифицированный Z–критерий	0.240	0.150	0.048	0.223	0.137	0.044
Хартли	0.239	0.148	0.046	0.219	0.133	0.040
Миллера	0.237	0.146	0.045	0.216	0.129	0.038
Лайарда	0.236	0.146	0.044	0.215	0.128	0.037
Левене	0.225	0.139	0.043	0.209	0.127	0.039
Флайне–Киллина	0.222	0.137	0.042	0.206	0.124	0.038
Кадуэлла–Лесли–Брауна	0.149	0.083	0.021	0.139	0.075	0.018
Блисса–Кокрена–Тьюки	0.147	0.082	0.021	0.136	0.075	0.019

Таблица 5. Оценки мощности многовыборочных критериев однородности дисперсий относительно конкурирующей гипотезы H_2 : $\sigma_2 = 1.2\sigma_1$, $n_i = 100$, $i = \overline{1,k}$

Критерий	α					
	0.1	0.05	0.01	0.1	0.05	0.01
	$k = 3$			$k = 5$		
Кокрена	0.609	0.494	0.286	0.624	0.515	0.316
О'Брайена	0.583	0.461	0.247	0.575	0.460	0.258
Z–критерий Оверолла–Вудворда	0.583	0.461	0.246	0.565	0.445	0.241
Неймана–Пирсона	0.580	0.457	0.240	0.557	0.434	0.228
Бартлетта	0.577	0.459	0.237	0.557	0.434	0.227
Модифицированный Z–критерий	0.574	0.449	0.232	0.554	0.433	0.228
Хартли	0.568	0.443	0.217	0.545	0.418	0.204
Миллера	0.565	0.436	0.213	0.530	0.400	0.189
Лайарда	0.564	0.433	0.207	0.527	0.395	0.181
Левене	0.530	0.409	0.200	0.513	0.390	0.197
Флайне–Киллина	0.518	0.395	0.191	0.498	0.378	0.187
Блисса–Кокрена–Тьюки	0.359	0.187	0.068	0.262	0.170	0.061
Кадуэлла–Лесли–Брауна	0.280	0.180	0.061	0.253	0.158	0.052

Таблица 6. Оценки мощности многовыборочных критериев однородности дисперсий относительно конкурирующей гипотезы H_3 : $\sigma_2 = 1.5\sigma_1$, $n_i = 100$, $i = \overline{1,k}$

Критерий	α					
	0.1	0.05	0.01	0.1	0.05	0.01
	$k = 3$			$k = 5$		
Кокрена	0.997	0.994	0.974	0.998	0.997	0.987
О'Брайена	0.996	0.990	0.961	0.997	0.994	0.976
Z–критерий Оверолла–Вудворда	0.996	0.991	0.964	0.997	0.993	0.974
Неймана–Пирсона, Бартлетта	0.996	0.990	0.962	0.996	0.992	0.970
Модифицированный Z–критерий	0.995	0.989	0.955	0.996	0.991	0.967
Хартли	0.995	0.988	0.947	0.995	0.989	0.955
Миллера	0.995	0.987	0.946	0.994	0.987	0.949
Лайарда	0.994	0.987	0.941	0.994	0.986	0.942
Левене	0.990	0.979	0.926	0.991	0.982	0.944
Флайне–Киллина	0.987	0.973	0.909	0.988	0.977	0.928
Блисса–Кокрена–Тьюки	0.820	0.728	0.501	0.829	0.742	0.524
Кадуэлла–Лесли–Брауна	0.795	0.691	0.444	0.783	0.675	0.432

4. Мощность критериев при нарушении предположения о нормальности

В условиях нарушения стандартного предположения о нормальности мощность критериев исследовалась в ситуации принадлежности выборок обобщённому нормальному закону с плотностью (3) при различных значениях параметра формы θ_2. Далее в тексте, таблицах обозначение $\mathrm{De}(\theta_2)$ соответствует распределению вида (3) при соответствующем значении параметра формы θ_2.

В таблицах 7 - 9 приведены оценки мощности критериев относительно конкурирующих гипотез H_2 и H_3, полученные в случае принадлежности выборок обобщенному нормальному закону (3) с различными значениями параметра формы при объемах выборок $n_i = 100$, $i = \overline{1..k}$. В таблицах значения α указаны в %, оценки мощности в виде $(1-\beta)*1000$.

Для критериев использованы следующие обозначения: Б – Бартлетта, К – Кокрена, Х – Хартли, Ф – Фишера, НП – Неймана–Пирсона, Z – Z–критерий Оверолла–Вудворда, ZM – модифицированный Z–критерий, Лд – Лайарда, Мр – Миллера, ОБ – О'Брайена, Кл – Клотца, Л – Левене, ФК – Флайне-Киллина, М – Муда, СТ –Сижела–Тьюки, АБ – Ансари–Бредли, Н – Ньюман, БКТ – Блисса–Кокрена–Тьюки, КЛБ – Кадуэлла–Лесли–Брауна, ЛИ –Линка.

Таблица 7. Мощность критериев относительно конкурирующей гипотезы H_2 в случае принадлежности выборок семейству распределений (3) с различными значениями параметра формы θ_2 при $k = 2$, $n_i = 100$, $i = \overline{1,k}$

Критерий	$De(0.5)$			$De(0.5)$			$De(2)$			$De(3)$			$De(4)$			$De(5)$		
	α																	
	10	05	01	10	05	01	10	05	01	10	05	01	10	05	01	10	05	01
Б, К, Х, Ф, НП, Z	162	091	022	317	213	078	**564**	**438**	**218**	**689**	**570**	**326**	754	644	**398**	791	689	446
Мр	167	097	028	309	207	075	557	429	207	687	566	321	755	645	397	793	691	450
Лд	179	106	031	322	218	079	557	428	205	681	557	307	745	630	375	783	674	423
ZM	167	096	024	310	206	073	555	427	205	685	564	319	752	642	395	790	688	446
ОБ	176	103	029	322	216	078	555	427	205	680	556	306	745	630	374	782	674	420
Кл	224	139	044	346	237	090	540	412	196	673	549	302	**760**	**649**	394	**820**	**720**	**472**
Л	215	132	040	**356**	**245**	**093**	515	388	180	588	460	232	627	500	264	649	524	283
ФК	**232**	**145**	**045**	344	234	088	503	376	173	604	477	244	669	544	300	713	593	344
М	222	138	043	324	218	081	468	344	152	558	431	214	618	492	261	659	536	298
СТ, АБ	213	131	041	296	196	070	405	287	119	470	348	157	513	388	184	542	416	204
Н	144	080	020	224	141	047	386	276	116	527	405	200	638	517	288	720	608	370
БКТ, КЛБ, ЛИ	128	069	016	173	101	028	289	190	068	417	299	127	540	415	203	650	527	292

Таблица 8. Мощность критериев относительно конкурирующей гипотезы H_3 в случае принадлежности выборок семейству распределений (3) с различными значениями параметра формы θ_2 при $k = 2$, $n_i = 100$, $i = \overline{1,k}$

Критерий	$De(0.5)$			$De(0.5)$			$De(2)$			$De(3)$			$De(4)$			$De(5)$		
	α																	
	10	05	01	10	05	01	10	05	01	10	05	01	10	05	01	10	05	01
Б, К, Х, Ф, НП, Z	388	266	095	827	734	501	**991**	**980**	**924**	**999**	**997**	**985**	**1.00**	**999**	**995**	**1.00**	**1.00**	**998**
Мр	392	282	120	800	700	459	990	977	910	999	997	983	1.00	999	994	1.00	1.00	997
Лд	445	328	146	830	737	498	990	977	906	999	996	978	1.00	999	992	1.00	1.00	996
ZM	400	283	107	804	699	447	990	976	906	999	997	982	1.00	999	994	1.00	1.00	997
ОБ	430	310	129	828	730	482	990	976	903	999	996	977	1.00	999	992	1.00	1.00	996
Кл	611	486	254	869	788	565	987	971	892	998	995	974	1.00	999	992	1.00	1.00	997
Л	579	452	226	**882**	**805**	**585**	981	960	866	993	984	934	996	991	957	998	993	967
ФК	**634**	**508**	**272**	864	782	557	977	952	847	994	985	936	998	993	966	999	996	979
М	606	480	252	837	746	516	964	931	802	988	974	908	995	987	948	997	992	965
СТ, АБ	574	448	228	787	684	444	926	869	693	963	929	802	976	953	854	983	964	882
Н	299	198	070	589	473	262	901	840	667	981	963	887	997	992	967	999	998	990
БКТ, КЛБ, ЛИ	233	145	045	432	312	132	776	671	430	938	890	729	987	973	904	998	995	974

Таблица 9. Мощность критериев относительно конкурирующей гипотезы H_2 в случае принадлежности выборок семейству распределений (3) с различными значениями параметра формы θ_2 при $k=5$, $n_i=100$, $i=\overline{1,k}$

Критерий	$De(0.5)$			$De(0.5)$			$De(2)$			$De(3)$			$De(4)$			$De(5)$		
	α																	
	10	05	01	10	05	01	10	05	01	10	05	01	10	05	01	10	05	01
К	134	070	015	306	208	081	**624**	**515**	**316**	**767**	**680**	**480**	**834**	**762**	**581**	**869**	**807**	**643**
ОБ	160	092	026	314	214	086	575	460	258	709	605	391	778	684	478	815	731	533
Z	141	074	016	297	197	073	565	445	241	702	592	371	772	673	457	811	722	512
ZM	148	081	019	289	190	070	554	433	228	697	587	364	770	672	454	810	721	514
Б, НП	142	075	016	293	192	070	557	434	227	695	581	355	766	664	439	806	713	495
X	140	074	016	281	180	061	545	418	204	685	565	324	758	649	405	799	699	459
Мр	146	081	021	272	174	058	530	400	189	676	554	314	752	642	401	795	695	461
Лд	155	086	021	283	180	058	527	395	181	665	539	293	739	623	372	781	674	426
Л	197	119	036	**340**	**234**	**095**	513	390	197	591	471	260	633	516	298	657	542	323
ФК	**212**	**128**	**039**	322	217	082	498	378	187	617	499	283	693	582	363	742	641	423
БКТ	114	059	013	148	083	021	262	170	061	413	301	136	569	454	248	704	601	384
КЛБ	119	062	013	153	085	021	253	158	052	380	263	105	514	386	183	638	513	280

В таблицах критерии упорядочены по убыванию мощности, которую они имеют в случае нормального закона (см. при $\mathrm{De}(\theta_2)$). Как можно видеть, порядок предпочтения критериев меняется в зависимости от тяжести хвостов. Рассмотренные в работе критерии Миллера и Лайарда близки по мощности, они уступают лишь группе критериев, эквивалентных в условиях стандартного предположения о нормальности.

4. Заключение

Методами статистического моделирования исследованы распределения статистик критериев однородности дисперсий. Проведен сравнительный анализ мощности критериев относительно некоторых конкурирующих гипотез, что позволяет судить о предпочтительности применения тех или иных критериев.

В рамках развиваемой программной системы ISW [12] реализован интерактивный режим исследования распределений статистик, позволяющий оценивать достигнутый уровень значимости p_{value} в ситуации нарушения стандартных предположений или в случае неизвестного распределения статистики, задаваемого лишь таблицей процентных точек. Это делает формируемый статистический вывод о результатах проверки гипотезы более информативным и более обоснованным.

Литература

1. *Лемешко Б.Ю.* Критерии проверки гипотез об однородности. Руководство по применению : монография / Б.Ю. Лемешко. – М. : ИНФРА-М, 2017. – 208 с. DOI: 10.12737/22368
2. Miller R.G. Jackknifing variances // The Annals of Mathematical Statistics – 1968. – Vol. 39. – P. 567–582.
3. *Layard M.W.J.* Robust large-sample tests for homogeneity of variances // Journal of the American Statistical Association. – 1973. – Vol. 68. – P. 195–198.
4. *Лемешко Б.Ю., Лемешко С.Б., Постовалов С.Н., Чимитова Е.В.* Статистический анализ данных, моделирование и исследование вероятностных закономерностей. Компьютерный подход: Монография. Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2011. 888 с.

5. *Лемешко Б. Ю.* Статистический анализ одномерных наблюдений случайных величин : программная система / Б. Ю. Лемешко. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 1995. – 125 с.
6. Программная система статистического анализа одномерных случайных величин – ISW. URL: http://ami.nstu.ru/~headrd/ISW.htm (дата обращения 12.07.2016)
7. *Lemeshko B.* Bartlett and Cochran tests in measurements with probability laws different from normal / B. Lemeshko, E. Mirkin // Measurement Techniques. – 2004. – Vol. 47, № 10. – P. 960–968.
8. *Lemeshko B.Yu.* Application and power of criteria for testing the homogeneity of variances. Part I. Parametric criteria / B. Yu. Lemeshko, S. B. Lemeshko, A. A. Gorbunova // Measurement Techniques. – 2010. – Vol. 53, № 3. – P. 237–246.
9. *Lemeshko B.Yu., Lemeshko S.B., and A.A. Gorbunova.* Application and power of criteria for testing the homogeneity of variances. Part II. Nonparametric criteria // Measurement Techniques, Vol. 53, No. 5, 2010. P.476-486. DOI: 10.1007/s11018-010-9530-x
10. *Lemeshko B.Y.,* Sataeva *T.S.* Application and Power of Parametric Criteria for Testing the Homogeneity of Variances. Part III // Measurement Techniques, 2017. Vol. 60. No. 1. – P. 7-14. DOI: 10.1007/s11018-017-1141-3
11. *Lemeshko B.Y.,* Sataeva *T.S.* Application and Power of Parametric Criteria for Testing the Homogeneity of Variances. Part IV // Measurement Techniques, 2017. Vol. 60. No. 5. – P. 425-431. DOI: 10.1007/s11018-017-1213-4
12. *Lemeshko B.Yu.,* Sataeva *T.S.* On the Properties and Application of Tests for Homogeneity of Variances in the Problems of Metrology and Control // Advances in Intelligent Systems and Computing, Vol. 543, 2017. – P. 784-798. DOI: 10.1007/978-3-319-48923-0_84

Лемешко Борис Юрьевич
Д.т.н., профессор, г.н.с. кафедры теоретической и прикладной информатики НГТУ (630073, Новосибирск, просп. Карла Маркса, 20), e-mail: lemeshko@ami.nstu.ru.

Новикова Алена Юрьевна
Магистрант кафедры теоретической и прикладной информатики НГТУ (630073, Новосибирск, просп. Карла Маркса, 20), e-mail: alena.shestakova.92@inbox.ru.

On the Miller and Lyard tests and the power of the criteria for the homogeneity of variances

A. Yu. Novikova, B. Yu. Lemeshko

Novosibirsk State Technical University

The methods of statistical modeling to are used investigate the distribution uniformity of statistics criteria of variances. The result of the criteria averages of the power of criteria with respect to the competing hypotheses are given, conclusions about the use of preference for certain criteria are made. The possibility of the use of statistics and research criteria distributions in a violation of the standard assumptions is presented. The results should contribute to the correct application of the criteria in the applications.

Keywords: checking a hypothesis, statistical modeling, power of the test.