519.24

Критерии согласия типа хи-квадрат при проверке нормальности

Б. Ю. ЛЕМЕШКО

Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск, Россия, e-mail: Lemeshko@ami.nstu.ru

Рассмотрено применение критерия χ^2 Пирсона для проверки гипотезы о принадлежности выборки нормальному закону. Построены таблицы процентных точек и модели предельных распределений статистики. Получены оценки мощности критериев χ^2 Пирсона и Никулина—Рао—Робсона относительно ряда конкурирующих гипотез. Приведены результаты сравнительного анализа мощности множества критериев нормальности.

Ключевые слова: *критерий Пирсона, критерий Никулина—Рао—Робсона, мощность критерия.*

The application of the chi-squared Pearson test in testing the hypothesis of normality has been considered. Tables of percentage points and approximations of the limiting statistic distributions have been obtained. The power of the Pearson and Nikulin—Rao—Robson chi-squared tests has been estimated for various pairs of competing hypotheses. The comparative analysis of normality tests in terms of power has been presented.

Key words: *Pearson test, Nikulin—Rao—Robson test, test power.*

Предпосылкой применения многих классических методов и критериев проверки статистических гипотез является предположение о принадлежности анализируемых случайных величин нормальному закону. Только при выполнении этого предположения обеспечивается корректность формирования статистического вывода с использованием соответствующего критерия.

Для проверки гипотезы о принадлежности выборки нормальному закону можно использовать три группы критериев. Особенности применения, достоинства и недостатки специальных критериев Шапиро—Уилка, Эппса—Палли, Фросини, Хегази—Грина, Шпигельхальтера, Гири и Дэвида—Хартли—Пирсона подробно обсуждаются в [1—4]. Вопросы применения непараметрических критериев согласия Колмогорова, Крамера—Мизеса—Смирнова, Андерсона—Дарлинга, Купера, Ватсона при проверке сложных гипотез наиболее полно изложены в [3, 5], в частности, при проверке нормальности отдельно рассмотрены в [4]. Критерий Колмогорова для проверки нормальности впервые был применен в [6], критерии Крамера—Мизеса—Смирнова и Андерсона—Дарлинга в этих же целях — в [7], Купера и Ватсона — в [8—10], критерии Жанга — в [11]. Некоторые недостатки последних отмечены в [4].

Для проверки гипотезы о принадлежности анализируемой выборки нормальному закону традиционно используют критерии согласия типа χ^2. Применение критерия χ^2 Пирсона при проверке сложных гипотез (в том числе при проверке нормальности) предусматривает оценивание неизвестных параметров закона по группированным данным, так как в случае вычисления оценок по негруппированной выборке распределения статистик критерия существенно отличаются от χ^2-распределений. Именно по этой причине был предложен ряд модифицированных критериев согласия типа χ^2, наиболее известный из них — критерий Никулина—Рао—Робсона [12—14].

Ниже показана возможность применения критерия χ^2 Пирсона для проверки нормальности с оцениванием параметров по негруппированным данным и методами статистического моделирования исследована мощность критериев типа χ^2 относительно некоторых конкурирующих законов. При исследовании распределений статистик количество испытаний методом Монте-Карло задавали 10^6, что обеспечивает погрешность оценивания функций распределения вероятностей порядка $\pm 10^{-3}$.

Критерий согласия χ^2 Пирсона. Процедура проверки гипотез с использованием критериев типа χ^2 предусматривает группирование исходной выборки $X_1, X_2, \ldots, X_n$ объемом n. Область определения случайной величины разбивают на k непересекающихся интервалов граничными точками

$$x_0 < x_1 < \ldots < x_{k-1} < x_k,$$

где x_0, x_k — нижняя и верхняя границы области определения случайной величины. В соответствии с заданным разбиением подсчитывают количество наблюдений n_i, попавших в i-й интервал, и вероятности попадания в интервал $P_i(\theta) = \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x,\theta)\,dx$, соответствующие теоретическому закону с функцией плотности $f(x, \theta)$, при этом $n = \sum\limits_{i=1}^{k} n_i$, $\sum\limits_{i=1}^{k} P_i(\theta) = 1$. В основе статистик, используемых в критериях согласия типа χ^2, лежит измерение отклонений n_i/n от $P_i(\theta)$.

Статистику критерия согласия χ^2 Пирсона вычисляют по формуле

$$X_n^2 = n\sum_{i=1}^{k}\frac{(n_i/n - P_i(\theta))^2}{P_i(\theta)}. \qquad (1)$$

При справедливости простой проверяемой гипотезы H_0 (когда известны все параметры теоретического закона) и $n \to \infty$ эта статистика подчиняется X_r^2-распределению с $r = k - 1$ степенями свободы. Плотность X_r^2-распределения описывается соотношением

$$g(s) = s^{r/2-1}\, e^{-s/2} / [2^{r/2}\,\Gamma(r/2)],$$

где $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция Эйлера.

Проверяемую гипотезу H_0 не отклоняют, если достигнутый уровень значимости превышает заданный уровень значимости α, т. е. выполняется неравенство

$$P\left\{X_n^2 > X_n^{2*}\right\} = \frac{1}{2^{r/2}\Gamma(r/2)}\int_{X_n^{2*}}^{\infty} s^{r/2-1}e^{-s/2}\,ds > \alpha,$$

где X_n^{2*} — статистика, вычисленная в соответствии с (1).

В случае проверки сложной гипотезы и справедливости H_0 при условии, что оценки параметров находятся в результате минимизации статистики X_n^2 по этой же выборке, эта статистика асимптотически подчиняется X_r^2-распределению с числом степеней свободы $r = k - m - 1$, где m — число оцененных параметров. Статистика X_n^2 имеет то же распределение, если в качестве метода оценивания выбирают метод максимального правдоподобия и оценки вычисляют по сгруппированным данным в результате максимизации по θ функции правдоподобия:

$$L(\theta) = \gamma\prod_{i=1}^{k} P_i^{n_i}(\theta), \qquad (2)$$

где γ — некоторая константа; $P_i(\theta) = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x,\theta)\,dx$ — зависящая от θ вероятность попадания наблюдения в i-й интервал. Это же справедливо для любых методов оценивания по группированным данным, приводящим к асимптотически эффективным оценкам.

При проверке согласия с нормальным законом и оценивании вектора параметров $\hat{\theta}^{\mathrm{T}} = (\hat{\mu}, \hat{\sigma})$ по группированной выборке минимизацией статистики X_n^2 или максимизацией по функции правдоподобия (2) вероятности попадания в интервал вычисляют в соответствии с соотношением

$$P_i(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{t_{i-1}}^{t_i} e^{-t^2/2}\,dx,$$

где $t_i = (x_i - \hat{\mu})/\hat{\sigma}$. Проверяемую гипотезу H_0 не отклоняют, если достигнутый уровень значимости $P\left\{X_n^2 > X_n^{2*}\right\}$, вычисляемый по соответствующему χ_r^2-распределению, превышает заданный уровень значимости α или если значение статистики X_n^{2*} меньше критического $\chi_{r,\alpha}^2$, определяемого из уравнения

$$\frac{1}{2^{r/2}\Gamma(r/2)}\int_{\chi_{r,\alpha}^2}^{\infty} s^{r/2-1}e^{-s/2}\,ds = \alpha.$$

При вычислении оценок максимального правдоподобия (ОМП) по негруппированным данным эта же статистика распределена как сумма независимых слагаемых $\chi_{k-m-1}^2 + \sum_{j=1}^{m}\lambda_j\xi_j^2$, где $\xi_1, \dots, \xi_m$ — стандартные нормальные случайные величины, независимые одна от другой и от χ_{k-m-1}^2; $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ — некоторые числа между 0 и 1 [15], представляющие корни уравнения

$$\left|(1-\lambda)\,\mathbf{J}(\theta) - \mathbf{J}_r(\theta)\right| = 0.$$

Здесь $\mathbf{J}(\theta)$ — информационная матрица Фишера по негруппированным наблюдениям с элементами

$$J(\theta_l, \theta_j) = \int \frac{\partial f(x,\theta)}{\partial\theta_l}\frac{\partial f(x,\theta)}{\partial\theta_j} f(x,\theta)\,dx;$$

$\mathbf{J}_r(\theta)$ — информационная матрица по группированным наблюдениям,

$$\mathbf{J}_r(\theta) = \sum_{i=1}^{k}\nabla P_i(\theta)\nabla^{\mathrm{T}}P_i(\theta)/P_i(\theta).$$

Другими словами, распределение статистики (1) при использовании ОМП по негруппированным данным неизвестно и зависит, в частности, от способа группирования [16].

При проверке нормальности с оцениванием по выборке ОМП параметров μ, σ по негруппированным данным можно воспользоваться приведенными табл. 1, 2 асимптотически оптимального группирования (АОГ). При этом минимизируются потери в информации Фишера о параметрах закона, связанные с группированием [3], а критерий χ^2 Пирсона имеет максимальную мощность относительно очень близких конкурирующих гипотез [3].

В табл. 1 граничные точки интервалов t_i, $i = \overline{1, (k-1)}$ приведены в виде, инвариантном относительно параметров μ, σ нормального закона. При вычислении статистики (1) границы x_i, разделяющие интервалы при данном k, находят по значениям t_i, взятым из соответствующей строки таблицы: $x_i = \hat{\sigma}t_i + \hat{\mu}_i$, где $\hat{\mu}$, $\hat{\sigma}$ — ОМП параметров, найденные по данной выборке. Затем подсчитывают число наблюдений n_i, попавших в каждый интервал. Вероятности попадания в интервал при вычислении значения статистики (1) берут из соответствующей строки табл. 2.

Таблица 1

Оптимальные граничные точки интервалов группирования при проверке простых и сложных гипотез по критериям типа χ^2 (при оценивании μ,σ) и соответствующие значения относительной асимптотической информации A

k	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	t_8	t_9	t_{10}	t_{11}	t_{12}	t_{13}	t_{14}	A
3	–1,1106	1,1106	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	0,4065
4	–1,3834	0,0	1,3834	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	0,5527
5	–1,6961	–0,6894	0,6894	1,6961	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	0,6826
6	–1,8817	–0,9970	0,0	0,9970	1,8817	–	–	–	–	–	–	–	–	–	0,7557
7	–2,0600	–1,2647	–0,4918	0,4918	1,2647	2,0600	–	–	–	–	–	–	–	–	0,8103
8	–2,1954	–1,4552	–0,7863	0,0	0,7863	1,4552	2,1954	–	–	–	–	–	–	–	0,8474
9	–2,3188	–1,6218	–1,0223	–0,3828	0,3828	1,0223	1,6218	2,3188	–	–	–	–	–	–	0,8753
10	–2,4225	–1,7578	–1,2046	–0,6497	0,0	0,6497	1,2046	1,7578	2,4225	–	–	–	–	–	0,8960
11	–2,5167	–1,8784	–1,3602	–0,8621	–0,3143	0,3143	0,8621	1,3602	1,8784	2,5167	–	–	–	–	0,9121
12	–2,5993	–1,9028	–1,4914	–1,0331	–0,5334	0,0	0,5334	1,0331	1,4914	1,9028	2,5993	–	–	–	0,9247
13	–2,6746	–2,0762	–1,6068	–1,1784	–0,7465	–0,2669	0,2669	0,7465	1,1784	1,6068	2,0762	2,6746	–	–	0,9348
14	–2,7436	–2,1609	–1,7092	–1,3042	–0,9065	–0,4818	0,0	0,4818	0,9065	1,3042	1,7092	2,1609	2,7436	–	0,9430
15	–2,8069	–2,2378	–1,8011	–1,4150	–1,0435	–0,6590	–0,2325	0,2325	0,6590	1,0435	1,4150	1,8011	2,2378	2,8069	0,9498

Таблица 2

Оптимальные вероятности (частоты) при проверке простых и сложных гипотез по критериям типа χ^2 (при оценивании μ, σ) и соответствующие значения относительной асимптотической информации A

k	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9	P_{10}	P_{11}	P_{12}	P_{13}	P_{14}	P_{15}	A
3	0,1334	0,7332	0,1334	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	0,4065
4	0,0833	0,4167	0,4167	0,0833	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	0,5527
5	0,0449	0,2004	0,5094	0,2004	0,0449	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	0,6826
6	0,0299	0,1295	0,3406	0,3406	0,1295	0,0299	–	–	–	–	–	–	–	–	–	0,7557
7	0,0197	0,0833	0,2084	0,3772	0,2084	0,0833	0,0197	–	–	–	–	–	–	–	–	0,8103
8	0,0141	0,0587	0,1431	0,2841	0,2841	0,1431	0,0587	0,0141	–	–	–	–	–	–	–	0,8474
9	0,0102	0,0422	0,1009	0,1976	0,2982	0,1976	0,1009	0,0422	0,0102	–	–	–	–	–	–	0,8753
10	0,0077	0,0317	0,0748	0,1438	0,2420	0,2420	0,1438	0,0748	0,0317	0,0077	–	–	–	–	–	0,8960
11	0,0059	0,0243	0,0567	0,1074	0,1823	0,2468	0,1823	0,1074	0,0567	0,0243	0,0059	–	–	–	–	0,9121
12	0,0047	0,0190	0,0442	0,0829	0,1392	0,2100	0,2100	0,1392	0,0829	0,0442	0,0190	0,0047	–	–	–	0,9247
13	0,0037	0,0152	0,0352	0,0652	0,1085	0,1670	0,2104	0,1670	0,1085	0,0652	0,0352	0,0152	0,0037	–	–	0,9348
14	0,0030	0,0124	0,0283	0,0524	0,0862	0,1327	0,1850	0,1850	0,1327	0,0862	0,0524	0,0283	0,0124	0,0030	–	0,9430
15	0,0025	0,0101	0,0232	0,0427	0,0698	0,1066	0,1532	0,1838	0,1532	0,1066	0,0698	0,0427	0,0232	0,0101	0,0025	0,9498

Для случая использования АОГ в критерии χ^2 Пирсона полученные процентные точки $\tilde{\chi}^2_{k,\alpha}$ распределений статистики (1) и построенные в данной работе модели предельных распределений представлены в табл. 3, где B_{III} $(\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)$ — бета-распределение III рода с указанными параметрами и плотностью

$$f(x) = \frac{\theta_2^{\theta_0}}{\theta_3 B(\theta_0,\theta_1)} \frac{\left[(x-\theta_4)/\theta_3\right]^{\theta_0-1}\left[1-(x-\theta_4)/\theta_3\right]^{\theta_1-1}}{\left[1+(\theta_2-1)(x-\theta_4)/\theta_3\right]^{\theta_0+\theta_1}}.$$

Для принятия решения о результатах проверки гипотезы H_0 значение статистики X_n^{2*} сравнивают с критическим значением $\tilde{\chi}^2_{k,\alpha}$, взятым из соответствующей строки табл. 3, или же достигнутый уровень значимости $P\left\{X_n^2 > X_n^{2*}\right\}$, определяемый в соответствии с моделью предельного закона, указанной в этой же строке таблицы, сравнивают с заданным уровнем значимости α.

Таблица 3

Процентные точки $\tilde{\chi}^2_{k,\alpha}$ для статистики критерия Пирсона при оценивании параметров μ, σ

k	$p = 1 - \alpha$					Модель предельного распределения
	0,85	0,9	0,95	0,975	0,99	
4	2,74	3,37	4,48	5,66	7,26	B_{III} (1,2463; 3,8690; 4,6352; 19,20; 0,005)
5	4,18	5,00	6,39	7,77	9,59	B_{III} (1,7377; 3,8338; 5,5721; 26,00; 0,005)
6	5,61	6,54	8,09	9,61	11,62	B_{III} (2,1007; 4,1518; 4,1369; 26,00; 0,005)
7	6,95	7,98	9,67	11,31	13,43	B_{III} (2,5019; 4,6186; 3,4966; 28,00; 0,005)
8	8,28	9,40	11,21	12,95	15,22	B_{III} (2,9487; 5,8348; 3,1706; 34,50; 0,005)
9	9,56	10,76	12,69	14,53	16,87	B_{III} (3,5145; 6,3582; 3,2450; 39,00; 0,005)
10	10,84	12,11	14,16	16,12	18,58	B_{III} (3,9756; 6,7972; 3,0692; 41,50; 0,005)
11	12,08	13,42	15,55	17,59	20,19	B_{III} (4,4971; 6,9597; 3,0145; 43,00; 0,005)
12	13,34	14,74	16,98	19,10	21,77	B_{III} (5,1055; 7,0049; 3,1130; 45,00; 0,005)
13	14,56	16,01	18,34	20,53	23,30	B_{III} (5,7809; 7,0217; 3,2658; 47,00; 0,005)
14	15,78	17,29	19,68	21,96	24,81	B_{III} (6,6673; 6,9116; 3,5932; 49,00; 0,005)
15	16,98	18,54	21,04	23,40	26,37	B_{III} (7,0919; 7,2961; 3,4314; 51,50; 0,005)

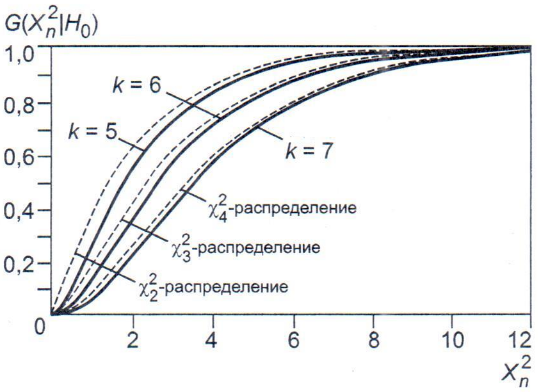

Рис. 1. Распределения статистики (1) при оценках максимального правдоподобия параметров нормального закона по негруппированным данным и соответствующие χ^2_{k-m-1}-распределения

Отличие реальных распределений $G(X_n^2|H_0)$ статистики (1) от соответствующих χ^2_{k-m-1}-распределений при справедливости гипотезы H_0 показано на рис. 1.

Для проверки нормальности с вычислением по негруппированной выборке ОМП только параметра μ или σ требуемые таблицы АОГ, процентные точки и модели предельных распределений можно найти в [4].

В табл. 1, 2 приведены значения относительной асимптотической информации Фишера

$$A = \det \mathbf{J}_r / \det \mathbf{J}.$$

При АОГ относительно вектора параметров и $k = 15$ интервалах в группированной выборке сохраняется около 95 % информации. Дальнейшее увеличение числа k интервалов существенного значения не имеет, его следует выбирать, исходя из следующих соображений. При оптимальном группировании вероятности попадания в интервалы в общем случае не равны (обычно минимальны вероятности попадания в крайние интервалы), поэтому k желательно выбирать из условия $nP_i(\theta) \ge 5...10$ для любого интервала. По меньшей мере, при выборе k следует придерживаться рекомендации $\min_i\left\{nP_i(\theta) \middle| i=\overline{1,k}\right\} > 1$. При выполнении этого условия в случае справедливости проверяемой гипотезы H_0 дискретное распределение статистики (1) несущественно отличается от соответствующего асимптотического предельного распределения. Если это условие нарушается, то отличие истинного распределения статистики от предельного будет приводить к увеличению вероятности ошибок 1-го рода по сравнению с заданным уровнем значимости α. Также следует учитывать, что при малых объемах выборок $n = 10...20$ дискретные распределения статистик существенно отличаются от асимптотических. Указанное условие при выборе k задает оценку сверху для числа интервалов ($k \le k_{max}$). Число интервалов группирования влияет на мощность критерия χ^2 Пирсона [17]. Совершенно необязательно, что его мощность против конкурирующего закона (гипотезы) будет максимальной при $k = k_{max}$.

Чтобы сравнить мощность критерия χ^2 Пирсона при проверке нормальности с мощностью специальных и непараметрических критериев согласия, мощность оценили относительно тех же конкурирующих законов (гипотез), что и в [4].

В качестве проверяемой гипотезы H_0 рассматривалась принадлежность наблюдаемой выборки нормальному закону распределения

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}.$$

В качестве конкурирующих гипотез при исследовании мощности рассмотрена принадлежность анализируемой выборки следующим законам. Конкурирующей гипотезе H_1 соответствует обобщенный нормальный закон (семейство распределений) с плотностью

$$f(x) = \frac{\theta_2}{2\theta_1 \Gamma(1/\theta_2)} \exp\left\{-\left(\frac{|x-\theta_0|}{\theta_1}\right)^{\theta_2}\right\}$$

и параметром формы $\theta_2 = 4$; гипотезе H_2 — распределение Лапласа с плотностью

$$f(x) = \frac{1}{2\theta_1} \exp\left\{-|x-\theta_0|/\theta_1\right\};$$

гипотезе H_3 — логистическое распределение с плотностью

$$f(x) = \frac{\pi}{\theta_1\sqrt{3}} \exp\left\{-\frac{\pi(x-\theta_0)}{\theta_1\sqrt{3}}\right\} \Bigg/ \left[1+\exp\left\{-\frac{\pi(x-\theta_0)}{\theta_1\sqrt{3}}\right\}\right]^2,$$

очень близкое к нормальному. На рис. 2 показаны функции плотности распределений, соответствующих гипотезам H_1, H_2, H_3, при значениях параметров масштаба, при которых эти распределения наиболее близки стандартному нормальному закону. Такой выбор гипотез имеет определенные основания. Гипотеза H_2, соответствующая распределению Лапласа, является наиболее отдаленной от H_0, их различение обычно проблем не вызывает. Логистическое распределение, соответствующее гипотезе H_3, очень близко к нормальному, их, как правило, трудно различать с использованием критериев согласия.

Конкурирующая гипотеза H_1, которой соответствует обобщенный нормальный закон с параметром формы $\theta_2 = 4$, представляет «лакмусовую бумагу», проявляющую скрытые недостатки некоторых критериев [1, 2, 4]. Оказалось, что при малых объемах выборок n и малых заданных вероятностях α ошибок 1-го рода ряд критериев, используемых для проверки гипотезы о нормальности, не способен отличать близкие к нему законы от нормального. Мощность $1-\beta$ относительно гипотезы H_1, где β — вероятность ошибки 2-го рода, в таких случаях представляет собой величину, меньшую α. Это означает, что закон, соответствующий H_1, «нормальнее нормального», и свидетельствует о смещенности критерия.

При заданных объемах выборок n мощность критерия χ^2 Пирсона исследовали при различном числе интервалов $k \le k_{max}$. В табл. 4 приведены максимальные значения мощности критерия χ^2 Пирсона по отношению к конкурирующим гипотезам H_1, H_2, H_3, соответствующие оптимальному числу

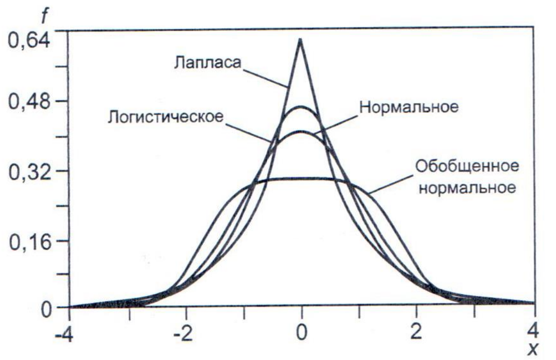

Рис. 2. Плотности законов распределения, соответствующие рассматриваемым гипотезам H_i

$k_{опт}$ интервалов группирования. На представленные в табл. 4 значения $k_{опт}$ в зависимости от n в определенной степени можно ориентироваться при выборе k.

Таблица 4

Мощность критерия χ^2 Пирсона относительно гипотез H_1, H_2, H_3

n	k_{max}	$k_{опт}$	α				
			0,15	0,1	0,05	0,025	0,01
H_1							
10	4	4	0,235	0,146	0,043	0,032	0,002
20	4	5	0,262	0,177	0,100	0,058	0,021
30	5	5	0,312	0,216	0,136	0,079	0,043
40	6	5	0,336	0,267	0,168	0,111	0,061
50	6	5	0,401	0,311	0,204	0,129	0,068
100	9	5	0,558	0,479	0,352	0,254	0,158
150	10	7	0,722	0,634	0,486	0,353	0,217
200	11	9	0,783	0,695	0,548	0,417	0,279
300	13	11	0,907	0,858	0,756	0,646	0,492
H_2							
10	4	4	0,267	0,206	0,074	0,058	0,01
20	4	4	**0,264**	0,177	0,104	**0,067**	**0,037**
		5	0,247	**0,189**	**0,116**	0,061	0,024
30	5	5	0,312	0,261	0,153	0,103	0,044
40	6	7	0,443	0,358	0,250	0,167	0,101
50	6	7	0,500	0,423	0,312	0,225	0,138
100	9	9	0,770	0,708	0,596	0,494	0,379
150	10	9	0,899	0,860	0,785	0,705	0,596
200	11	11	0,964	0,946	0,908	0,880	0,786
300	13	13	0,996	0,993	0,985	0,974	0,950
H_3							
10	4	4	0,221	0,150	0,046	0,034	0,003
20	4	4	0,194	0,125	0,059	0,038	0,016
30	5	5	0,169	0,125	0,062	0,034	0,012
40	6	7	0,204	0,143	0,082	0,045	0,020
50	6	7	0,214	0,155	0,088	0,050	0,023
100	9	10	0,303	0,231	0,146	0,090	0,047
150	10	10	0,359	0,284	0,191	0,124	0,072
200	11	11	0,432	0,355	0,250	0,175	0,105
300	13	13	0,566	0,486	0,373	0,280	0,190

Критерий согласия Никулина-Рао-Робсона. В [12—14] предложено видоизменение стандартной статистики X_n^2, при котором предельным распределением модифицированной статистики является X_{k-1}^2-распределение (число степеней свободы не зависит от числа оцениваемых параметров). Неизвестные параметры распределения $F(x, \theta)$ в этом случае следует оценивать по негруппированным данным методом максимального правдоподобия. При этом вектор $\mathbf{P} = (P_1, ..., P_k)^{\mathrm{т}}$ предполагают заданным, а граничные точки интервалов определяют по соотношениям $x_i(\theta) = F^{-1}(P_1 + ... + P_i)$, $i = \overline{1, (k-1)}$. Предложенная статистика имеет вид [13]:

$$Y_n^2(\theta) = X_n^2 + n^{-1} a^{\mathrm{т}}(\theta) \Lambda(\theta) a(\theta), \qquad (3)$$

где X_n^2 вычисляют по (1); для законов распределения, определяемых только параметрами сдвига и масштаба,

$$\Lambda(\theta) = [\mathbf{J}(\theta) - \mathbf{J}_{\mathrm{г}}(\theta)]^{-1};$$

в случае нормального закона с вектором параметров $\theta^{\mathrm{т}} = (\mu, \sigma)$ информационная матрица Фишера имеет вид

$$\mathbf{J}(\theta) = \begin{bmatrix} 1/\sigma^2 & 0 \\ 0 & 2/\sigma^2 \end{bmatrix},$$

элементы информационной матрицы по группированным данным $\mathbf{J}_{\mathrm{г}}(\theta)$ определяются выражениями

$$J_{\mathrm{г}}(\mu, \mu) = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\sigma^2 P_i(\theta)} (f(t_{i-1}) - f(t_i))^2;$$

$$J_{\mathrm{г}}(\sigma, \sigma) = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\sigma^2 P_i(\theta)} (t_{i-1} f(t_{i-1}) - t_i f(t_i))^2;$$

$$J_{\mathrm{г}}(\mu, \sigma) = J_{\mathrm{г}}(\sigma, \mu) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\sigma^2 P_i(\theta)} (f(t_{i-1}) - f(t_i))(t_{i-1} f(t_{i-1}) - t_i f(t_i));$$

$t_i = (x_i - \mu)/\sigma$; $t_0 = -\infty$; $t_k = \infty$; $f(t) = \left[\sqrt{2\pi}\, e^{t^2/2}\right]^{-1}$ — плотность стандартного нормального закона, элементы вектора $a^{\mathrm{т}}(\theta) = [a(\mu), a(\sigma)]$ находят из соотношений

$$a(\mu) = \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i (f(t_{i-1}) - f(t_i))}{\sigma P_i(\theta)},$$

$$a(\sigma) = \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i}{\sigma P_i(\theta)} (t_{i-1} f(t_{i-1}) - t_i f(t_i)).$$

Как и в случае критерия Пирсона, при проверке нормальности с оцениванием по выборке ОМП параметров μ, σ по негруппированным данным можно воспользоваться табл. 1, 2.

При вычислении статистики (3) границы x_i, разделяющие интервалы при данном k, находят по значениям t_i, взятым из соответствующей строки табл. 1 согласно соотношению $x_i = \hat{\sigma} t_i + \hat{\mu}$, где $\hat{\mu}$, $\hat{\sigma}$ ОМП параметров, найденные по данной выборке. Затем подсчитывается число наблюдений n_i, попавших в каждый интервал. Вероятности $P_i(\theta)$ попадания в интервал при вычислении статистики (3) берут из соответствующей строки табл. 2. При вычислении элементов вектора $a(\theta)$ и матрицы $\Lambda(\theta)$ используют табличные значения t_i, P_i и полученные оценки $\hat{\sigma}$. Для принятия решения о результатах проверки гипотезы H_0 значение статистики Y_n^{2*} сравнивают с соответствующим критическим $\chi^2_{k-1,\alpha}$ или достигнутый уровень значимости $P\left\{Y_n^2 > Y_n^{2*}\right\}$ находят по соответствующему χ^2_{k-1}-распределению. Для проверки нормальности с вычислением по негруппированной выборке ОМП от-

Таблица 5

Мощность критерия Никулина-Рао-Робсона относительно гипотез H_1, H_2, H_3

n	k_{max}	$k_{опт}$	α				
			0,15	0,1	0,05	0,025	0,01
H_1							
10	4	4	0,348	0,1	0,029	0,009	0,006
20	4	5	0,234	0,143	0,074	0,041	0,016
30	5	5	0,256	0,197	0,102	0,053	0,023
40	6	5	0,293	0,221	0,123	0,079	0,035
50	6	5	0,326	0,240	0,148	0,083	0,040
100	9	5	0,485	0,395	0,271	0,179	0,102
150	10	6	0,619	0,530	0,397	0,284	0,179
		7	0,641	0,539	0,383	0,261	0,148
200	11	9	0,713	0,616	0,464	0,339	0,214
300	13	11	0,872	0,810	0,695	0,573	0,420
H_2							
10	4	4	0,368	0,103	0,055	0,031	0,007
20	4	5	0,250	0,210	0,126	0,065	0,039
30	5	6	0,349	0,265	0,185	0,127	0,078
40	6	7	0,474	0,403	0,297	0,218	0,149
50	6	7	0,548	0,473	0,365	0,281	0,190
100	9	9	0,807	0,755	0,667	0,583	0,482
150	10	9	0,919	0,889	0,834	0,774	0,691
200	11	11	0,973	0,961	0,933	0,900	0,849
300	13	11	0,997	0,995	0,990	0,983	0,968
		13	0,997	0,995	0,990	0,983	0,968
H_3							
10	4	4	0,321	0,083	0,034	0,014	0,005
20	4	5	0,166	0,120	0,065	0,030	0,014
30	5	6	0,198	0,138	0,080	0,047	0,024
40	6	**7**	0,232	0,173	0,104	0,063	0,034
50	6	**7**	0,251	0,188	0,117	0,074	0,040
100	9	10	0,360	0,290	0,202	0,141	0,091
150	10	10	0,432	0,358	0,263	0,195	0,131
200	11	11	0,509	0,436	0,337	0,259	0,183
300	13	13	0,641	0,572	0,469	0,381	0,288

дельно параметров μ или σ требуемые таблицы АОГ можно найти в [4].

Оценки мощности критерия Никулина-Рао-Робсона по отношению к конкурирующим гипотезам H_1, H_2, H_3 при $k_{опт}$ приведены в табл. 5. Этот критерий, как правило, мощнее критерия Пирсона (например, см. мощности относительно конкурирующих гипотез H_2, H_3). При этом часто $k_{опт} = k_{max}$ при $\min_i \{nP_i(\theta)\} > 1$. Однако так бывает не всегда. По мощности относительно «каверзной» гипотезы H_1 он уступает критерию Пирсона, а $k_{опт}$ в этом случае заметно меньше k_{max} при АОГ.

Если объединить результаты исследований мощности критериев, рассмотренных в данной работе, с результатами, представленными в [1, 2, 4], то все множество критериев, используемых для проверки нормальности, можно упорядочить по мощности относительно рассматриваемых конкурирующих гипотез H_1, H_2, H_3 следующим образом:

относительно конкурирующей гипотезы H_1 —
Д`Агостино z_2 $\succ$ *Дэвида-Хартли-Пирсона* $\succ$ *Гири* $\succ$ *Шапиро-Уилка** $\succ$ χ^2 *Пирсона* $\succ$ *Жанга* Z_C * $\succ$ *Ватсона* $\succ$ *Андерсона-Дарлинга* $\succ$ *Фросини* $\succ$ *Ройстона* $\succ$ *Купера* $\succ$ *Эппса-Палли** $\succ$ *Крамера-Мизеса-Смирнова* $\succ$ *Никулина-Рао-Робсона* $\succ$ *Жанга* Z_A* $\succ$ *Шпигельхальтера** $\succ$ *Колмогорова* $\succ$ *Жанга* Z_K $\succ$ *Д`Агостино* $z_1^2+z_2^2$* $\succ$ *Хегази-Грина* T_1 * $\succ$ *Хегази-Грина* T_2*;

относительно конкурирующей гипотезы H_2 —
Шпигельхальтера $\succ$ *Хегази-Грина* T_2 $\succ$ *Гири* $\succ$ *Хегази-Грина* T_1 $\succ$ *Д`Агостино* $z_1^2+z_2^2$ $\succ$ *Андерсона-Дарлинга* $\succ$ *Ватсона* $\succ$ *Эппса-Палли* ~ *Фросини* $\succ$ *Крамера-Мизеса-Смирнова* $\succ$ *Ройстона* $\succ$ *Купера* $\succ$ *Жанга* Z_A $\succ$ *Жанга* Z_K $\succ$ *Жанга* Z_C $\succ$ *Колмогорова* $\succ$ *Шапиро-Уилка* $\succ$ *Дэвида-Хартли-Пирсона* $\succ$ *Д`Агостино* z_2 $\succ$ *Никулина-Рао-Робсона* $\succ$ χ^2 *Пирсона*;

относительно конкурирующей гипотезы H_3 —
Хегази-Грина T_2 $\succ$ *Д`Агостино* $z_1^2+z_2^2$ $\succ$ *Шпигельхальтера* $\succ$ *Ройстона* $\succ$ *Гири* ~ *Жанга* $Z_A$ $\succ$ *Жанга* $Z_C$ $\succ$ *Хегази-Грина* $T_1$ $\succ$ *Дэвида-Хартли-Пирсона* $\succ$ *Эппса-Палли* ~ *Жанга* $Z_K$ $\succ$ *Д`Агостино* z_2 $\succ$ *Андерсона-Дарлинга* $\succ$ *Фросини* $\succ$ *Крамера-Мизеса-Смирнова* $\succ$ *Ватсона* $\succ$ *Шапиро-Уилка* $\succ$ *Купера* $\succ$ *Колмогорова* $\succ$ *Никулина-Рао-Робсона* $\succ$ χ^2 *Пирсона*.

При этом следует учитывать, что ряд критериев, помеченных выше (*), при малых n не может отличить от нормального закон, соответствующий гипотезе H_1, вследствие смещенности распределений статистик этих критериев [1—4].

Работа выполнена при поддержке Минобразования РФ в рамках проектной части государственного задания № 2.541.2014/K.

Литература

1. **Лемешко Б. Ю., Лемешко С. Б.** Сравнительный анализ критериев проверки отклонения распределения от нормального закона // Метрология. 2005. № 2. С. 3—24.

2. **Лемешко Б. Ю., Рогожников А. П.** Исследование особенностей и мощности некоторых критериев нормальности // Метрология. 2009. № 4. С. 3—24.

3. **Лемешко Б. Ю. Лемешко С. Б., Постовалов С. Н., Чимитова Е. В.** Статистический анализ данных, моделирование и исследование вероятностных закономерностей. Компьютерный подход: Монография. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2011.

4. **Лемешко Б. Ю.** Критерии проверки отклонения распределения от нормального закона: Руководство по применению. М.: ИНФРА-М, 2015.

5. **Лемешко Б. Ю.** Непараметрические критерии согласия: Руководство по применению М.: ИНФРА-М, 2014.

6. **Lilliefors H. W.** On the Kolmogorov-Smirnov test for normality with mean and variance unknown // J. Am. Statist. Assoc. 1967. V. 62. P. 399-402.

7. **Мартынов Г. В.** Критерии омега-квадрат. М.: Наука, 1978.

8. **Лемешко Б. Ю., Горбунова А. А.** О применении и мощности непараметрических критериев согласия Купера, Ватсона и Жанга// Измерительная техника. 2013. № 5. С. 3—9.

9. **Лемешко Б. Ю., Горбунова А. А.** Применение непараметрических критериев согласия Купера и Ватсона при проверке сложных гипотез // Измерительная техника. 2013. № 9. С. 14—21.

10. **Lemeshko B. Yu., Gorbunova A. A.,Lemeshko S. B., Rogozhnikov A. P.** Solving problems of using some nonparametric goodness-of-fit tests // Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing. 2014. V. 50. N. 1. P. 21—35.

11. **Zhang J.** Powerful goodness-of-fit and multi-sample tests. Toronto: PhD Thesis, 2001.

12. **Никулин М. С.** Критерий хи-квадрат для непрерывных распределений с параметрами сдвига и масштаба // Теория вероятностей и ее применение. 1973. Т. XVIII. № 3. С. 583—591.

13. **Никулин М. С.** О критерии хи-квадрат для непрерывных распределений // Теория вероятностей и ее применение. 1973. Т. XVIII. № 3. С. 675—676.

14. **Rao K. C., Robson D. S.** A chi-squared statistic for goodness-of-fit tests within the exponential family // Commun. Statist. 1974. V. 3. P. 1139—1153.

15. **Chernoff H., Lehmann E. L.** The use of maximum likelihood estimates in χ^2 test for goodness of fit // Ann. Math. Stat. 1954. V. 25. P. 579—586.

16. **Лемешко Б. Ю., Постовалов С. Н.** О зависимости предельных распределений статистик χ^2 Пирсона и отношения правдоподобия от способа группирования данных // Заводская лаборатория. 1998. Т. 64. № 5. С. 56—63.

17. **Лемешко Б. Ю., Чимитова Е. В.** О выборе числа интервалов в критериях согласия типа χ^2 // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2003. Т. 69. № 1. С. 61—67.

Дата принятия 17.12.2014 г.