О критериях проверки отклонения распределения от равномерного закона

П.Ю. Блинов, Б.Ю. Лемешко[1]
Новосибирский государственный технический университет

Рассматривается множество специальных критериев, предназначенных для проверки гипотез о принадлежности наблюдений равномерному закону. Исследуются распределения статистик критериев, мощность критериев относительно различных конкурирующих гипотез. Рассматриваемые критерии ранжируются по мощности. Показываются достоинства и недостатки отдельных критериев. Показано, что значительная часть критериев, традиционно используемых при проверке гипотез о равномерности, оказывается смещенной относительно некоторого вида конкурирующих гипотез. Подчеркивается, что в целом специальные критерии проверки равномерности не имеют явных преимуществ перед непараметрическими критериями согласия, применяемыми для проверки равномерности.

Ключевые слова: равномерный закон, проверка гипотез, статистический критерий, мощность критерия

1. Введение

Проверке гипотез о принадлежности выборки равномерному закону распределения посвящено множество работ, в которых авторами предложен достаточно обширный перечень статистических критериев. В определенной степени обилие критериев обусловлено тем интересом, который проявляется к использованию модели равномерного закона в различных приложениях. Равномерный закон зачастую используется для описания ошибок измерений некоторых приборов или измерительных систем.

Если случайные величины $X_1, X_2, ..., X_n$ принадлежат некоторому закону с функцией распределения вероятностей $F(x)$, то случайные величины $Y_i = F(X_i)$, $i = \overline{1,n}$ распределены равномерно на интервале $[0,1]$. Поэтому во многих ситуациях вместо проверки гипотезы о принадлежности выборки $X_1, X_2, ..., X_n$ закону с функцией распределения $F(x)$ зачастую переходят к проверке гипотезы о принадлежности $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ равномерному закону. Не будет лишним заметить, что при подобном переходе использование классических критериев проверки равномерности, ориентированных на проверку простой гипотезы о принадлежности выборки равномерному закону, корректно, если $F(x)$ известно с точностью до значений параметров. Но если вектор параметров θ распределения $F(x,\theta)$ оценивался по выборке $X_1, X_2, ..., X_n$, то при справедливости проверяемой гипотезы H_0 распределение статистики любого критерия равномерности будет отличаться от имеющего место при проверке простой гипотезы.

Наличие множества критериев ставит перед практиками не очень простую задачу выбора, так как имеющаяся в публикациях информация не позволяет однозначно отдать предпочтение какому-то определенному критерию.

В данной работе множество рассматриваемых критериев равномерности исследовалось

[1] Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках проектной части государственного задания (№ 2.541.2014/К).

методами статистического моделирования. При исследовании распределений статистик соответствующих критериев количество экспериментов, осуществляемых при статистическом моделировании, как правило, принималось равным 1 660 000. Такое количество экспериментов позволяет, с одной стороны, проследить качественную картину, отражающую изменение распределений статистик в зависимости от различных факторов, с другой – обеспечить приемлемую точность получаемых оценок мощности и искомых вероятностей.

При проверке гипотезы о принадлежности наблюдаемой случайной величины равномерному закону **простая** проверяемая гипотеза имеет вид H_0: $X \in Rav(0,1)$ или H_0: $X \in Rav(a,b)$, где a и b известны. Эту же гипотезу можно записать как H_0: $F(x)=x$, $x\in[0,1]$ или H_0: $F(x)=\frac{x-a}{b-a}$, $x\in[a,b]$. Проверяемая гипотеза будет **сложной**, если по данной выборке находится и область определения равномерной случайной величины.

Пусть $X_1, X_2, ..., X_n$ – выборка независимых наблюдений случайной величины X.

Для проверки гипотезы о принадлежности выборки независимых одинаково распределенных случайных величин $X_1, X_2, ..., X_n$ равномерному закону может использоваться ряд критериев, построенных специально для проверки этой гипотезы, а также применяться совокупность классических непараметрических критериев согласия (Колмогорова, Купера, Крамера–Мизеса–Смирнова, Ватсона, Андерсона–Дарлинга, Жанга) и критерий согласия χ^2 Пирсона.

В данной работе мы останавливаемся только на множестве специальных критериев. В большинстве критериев проверки равномерности опираются на оценки порядковых статистик величины X (элементы $x_{(i)}$ вариационного ряда $x_{(1)} < x_{(2)} < ... < x_{(n)}$, построенного по выборке $X_1, X_2, ..., X_n$), которые в дальнейшем будем обозначать как U_i (то есть, $U_i = x_{(i)}$).

В множестве “специальных” критериев проверки гипотезы о равномерности можно выделить три группы. Статистики критериев первой группы предусматривают использование разностей последовательных значений вариационного ряда

$$D_i = U_i - U_{i-1},$$

где $U_0 = 0$, $U_{n+1} = 1$, n – объем выборки.

К критериям второй группы относятся различные модификации критериев, использующие разности оценок порядковых статистик, соответствующих анализируемой выборке, и математических ожиданий этих порядковых статистик.

Третью группу составляют, так называемые, энтропийные критерии, опирающиеся на различные оценки энтропии.

Как правило, специальные критерии ориентированы на проверку простой гипотезы H_0.

С каждым из используемых для проверки гипотезы H_0 критериев связана соответствующая статистика S, которая в соответствии с некоторой мерой измеряет расстояние между равномерным законом распределения вероятностей и эмпирическим законом, определяемым выборкой. В силу случайности извлекаемых выборок случайными оказываются и значения статистики S, вычисляемые в соответствии с этими выборками. При справедливости проверяемой гипотезы H_0 статистика S подчиняется некоторому распределению $G(S|H_0)$.

С результатами проверки гипотез связывают ошибки двух видов: ошибка первого рода состоит в том, что отклоняют гипотезу H_0, когда она верна; ошибка второго рода состоит в том, что принимают (не отклоняют) гипотезу H_0, в то время как справедлива конкурирующая гипотеза H_1. Уровень значимости α задает вероятность ошибки первого рода.

Обычно, используя критерии проверки гипотез, не рассматривают конкретную конкурирующую гипотезу. В таком случае при проверке гипотез о виде закона можно считать, что конкурирующая гипотеза имеет вид $H_1:\ F(x) \neq F(x, \theta_0)$. Если же гипотеза H_1 задана и имеет, например, вид $H_1:\ F(x) = F_1(x, \theta)$, то задание величины α для используемого критерия проверки гипотез определяет и вероятность ошибки второго рода β. Ошибка второго рода заключается в том, что не отклоняется гипотеза H_0, когда на самом деле справедлива гипотеза H_1.

Мощность критерия представляет собой величину $1-\beta$. Очевидно, что чем выше мощность используемого критерия при заданном значении α, тем лучше он различает гипотезы H_0 и H_1.

Естественно, что наиболее интересна способность критериев различать близкие конкурирующие гипотезы. Именно при анализе близких альтернатив удается выяснить тонкие моменты, характеризующие свойства критериев, выявить принципиальные недостатки или достоинства критериев.

В данной работе мощность всех рассмотренных критериев исследовалась относительно 3-х конкурирующих гипотез, которые соответствуют принадлежности наблюдаемой случайной величины семейству бета-распределений 1-го рода с функцией плотности

$$f(x) = \frac{1}{\theta_2 \mathrm{B}(\theta_0, \theta_1)} \left(\frac{x-\theta_3}{\theta_2} \right)^{\theta_0 - 1} \left(1 - \frac{x-\theta_3}{\theta_2} \right)^{\theta_1 - 1},$$

где $\mathrm{B}(\theta_0, \theta_1) = \Gamma(\theta_0)\Gamma(\theta_1) / \Gamma(\theta_0 + \theta_1)$ – бета-функция, $\theta_0, \theta_1 \in (0, \infty)$ – параметры формы, $\theta_2 \in (0, \infty)$ – масштабный параметр, $\theta_3 \in (-\infty, \infty)$ – параметр сдвига, $x \in [0, \theta_2]$.

Обозначим функцию бета-распределения 1-го рода при конкретных значениях параметров как $B_I(\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3)$. Тогда три рассматриваемые и достаточно близкие к H_0 конкурирующие гипотезы H_1, H_2, H_3 принимают следующий вид:

$$H_1 :\ F(x) = B_I(1.5, 1.5, 1, 0),\ x \in [0,1];$$

$$H_2 :\ F(x) = B_I(0.8, 1, 1, 0),\ x \in [0,1];$$

$$H_3 :\ F(x) = B_I(1.1, 0.9, 1, 0),\ x \in [0,1].$$

Функции распределения вероятностей, соответствующие рассматриваемым гипотезам, достаточно близки (см. рис. 1), а плотности существенно различаются..

Следует обратить внимание, что конкурирующей гипотезе H_1 соответствует закон, функция распределения которого пересекается с функцией распределения равномерного закона, а при H_2 и H_3 функции распределения законов лежат выше и ниже функции равномерного. И способности различать гипотезы H_0 и H_1, и гипотезы H_0 и H_2 или H_3 у критериев оказываются различными.

Заметим, что анализ мощности критериев относительно H_1 позволил выявить неспособность отдельных критериев при малых объёмах выборок n и малых уровнях значимости α отличать эту гипотезу от H_0, то есть показал смещённость соответствующих критериев (мощность $1-\beta$ оказывается меньше α). Образно говоря, с позиции критерия закон, соответствующий гипотезе H_1 представляется ему “более равномерным” чем равномерный.

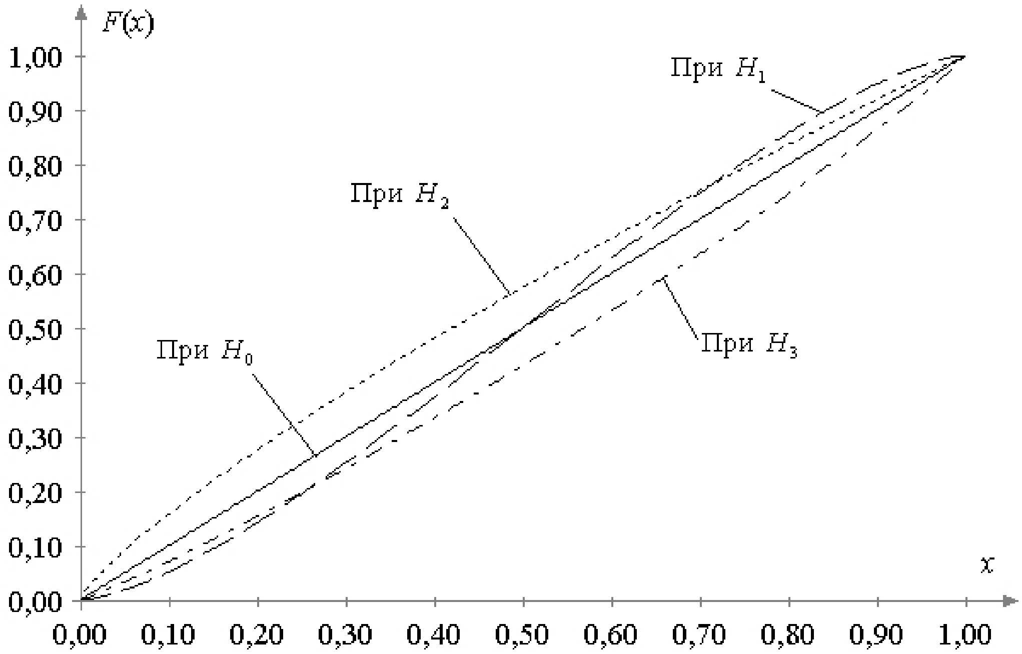

Рис. 1. Функции распределения вероятностей, соответствующие конкурирующим гипотезам

Причем указанный недостаток оказался свойственным не только значительной части специальных критериев проверки равномерности, но и большей части непараметрических критериев согласия.

2. Результаты исследований специальных критериев равномерности

Как было сказано выше множество специальных критериев можно разбить на три группы близких по свойствам критериев. К первой группе критериев, использующих разности элементов вариационного ряда, относятся критерии Шермана [1, 2], Кимбелла [3] , Морана 1 [4], Морана 2 [5], критерии Кресси со статистиками $S_n^{(m)}$ и $L_n^{(m)}$ [6], Пардо [7], Шварца [8].

Ко второй группе критериев, где рассматриваются отклонения порядковых статистик от их математических ожиданий (от медиан и т.п.), относятся критерии Хегази–Грина со статистиками T_1 и T_2 [9], Фросини [10], Янга [11], Ченга–Спиринга [12], Гринвуда [13], Гринвуда–Кэсенберри–Миллера [14], критерии Неймана–Бартона со статистиками N_2, N_3 и N_4 [15].

К третьей группе относится энтропийный критерий Дудевича–ван дер Мюлена [16] и две модификации, в статистиках которых используются другие оценки энтропии [17].

Соотношения, задающие вид статистик рассматриваемых критериев проверки равномерности, вынесены в таблицу 1.

В продолжение исследований [18, 19, 20] в процессе выполнения данной работы были исследованы распределения статистик всех выше упомянутых критериев, расширены таблицы процентных точек, проверено насколько хорошо распределения нормализованных статистик описываются соответствующими асимптотическими законами. Исследована мощность критериев относительно различных конкурирующих гипотез, в частности относительно H_1, H_2 и H_3. Было показано, что ряд рассмотренных критериев оказался смещенным относительно H_1.

В таблице 1 наряду с выражениями статистик критериев указаны недостатки и достоинства критериев, выявленные в процессе исследования свойств. Они могут служить рекомендациями по применению конкретных критериев.

Таблица 1. Особенности применения критериев проверки равномерности

№ п/п	Критерий	Статистика	Недостатки, достоинства, рекомендации
1	Шермана	$\omega_n = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n+1}\left\|U_i - U_{i-1} - \frac{1}{n+1}\right\|$	При малых n и α критерий является смещённым относительно H_1. Невысокая мощность. Нормализованные статистики хорошо аппроксимируются нормальным законом.
2	Кимбелла	$A = \sum_{i=1}^{n+1}\left(U_i - U_{i-1} - \frac{1}{n+1}\right)^2$	Зависимость распределения статистики от объема выборки n и необходимость использования таблицы процентных точек. При малых n и α критерий является смещённым относительно H_1. Мощность критерия не очень высокая, но выше мощности критерия Шермана.
3	Морана 1	$B = \sum_{i=1}^{n+1}\left(U_i - U_{i-1}\right)^2$	Критерий по мощности эквивалентен критерию Кимбелла. Те же достоинства и недостатки.
4	Морана 2	$M_n = -\sum_{i=1}^{n+1}\ln\left[(n+1)(U_i - U_{i-1})\right]$	Двусторонний критерий. Имеющиеся аппроксимации модифицированных статистик χ^2-распределением и нормальным законом заметно отличаются от действительных распределений статистик. Вследствие этого приходится ориентироваться на таблицу процентных точек. Очень низка мощность. *Не рекомендуется использовать*.
5	Кресси 1	$S_n^{(m)} = \sum_{i=0}^{n+1-m}\left(n(U_{i+m} - U_i)\right)^2$	Зависимость распределения статистики от n и необходимость использования таблиц процентных точек. Неопределенность с выбором m. При малых n и α критерий является смещённым относительно H_1. Невысокая мощность.
6	Кресси 2	$L_n^{(m)} = \sum_{i=0}^{n+1-m}\ln\left[n\left(U_{i+m} - U_i\right)\right]$	Двусторонний критерий. Зависимость распределения статистики от n и необходимость использования таблицы процентных точек. Неопределенность с выбором m. Очень низка мощность. *Не рекомендуется использовать*.
7	Ченга–Спиринга	$W_p = \frac{\left[\left(U_n - U_1\right)\frac{n+1}{n-1}\right]^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(U_i - \bar{U}\right)^2}$	Двусторонний критерий. Зависимость распределения статистики от n, необходимость использования таблицы процентных точек. Высокая мощность относительно гипотезы H_1. *Практически неспособен отличать гипотезы вида* H_3. *Применять совместно с другими*.

Продолжение таблицы 1

№ п/п	Критерий	Статистика	Недостатки, достоинства, рекомендации
8	Янга	$M = \frac{1}{l}\sum_{i=1}^{n}\min(D_i, D_{i+1})$, $D_1 = U_1$, $D_i = U_i - U_{i-1}$, $D_{n+1} = 1 - U_n$	Критерий двусторонний. Нормализованная статистика хорошо аппроксимируется стандартным нормальным законом. Показывает очень низкую мощность. *Не рекомендуется использовать.*
9	Гринвуда	$G = (n+1)\sum_{i=1}^{n+1}(U_i - U_{i-1})^2$	Приходится пользоваться таблицей процентных точек, так как распределения статистики очень медленно сходятся к нормальным. При малых n и α критерий является смещённым относительно H_1. Низкая мощность относительно других конкурирующих гипотез.
10	Гринвуда–Кэсенберри–Миллера	$Q = \sum_{i=1}^{n+1}(U_i - U_{i-1})^2 + \sum_{i=1}^{n}(U_{i+1} - U_i)(U_i - U_{i-1})$	Зависимость распределения статистики от объема выборки n и необходимость использования таблицы процентных точек. При малых n и α критерий является смещённым относительно H_1. Невысокая мощность.
11	Шварца	$A_n^* = \frac{n}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{U_{i+1} - U_{i-1}}{2} - \frac{1}{n}\right)^2$, где $U_0 = -U_1$, $U_{n+1} = 2 - U_n$	Зависимость распределения статистики от объема выборки n и необходимость использования таблицы процентных точек. Благодаря имеющимся отличиям от критерия Кимбелла, обладает преимуществом в мощности по сравнению с группой близких критериев (Шермана, Кимбелла, Морана, Гринвуда, Янга).
12	Хегази–Грина T_1	$T_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\lvert U_i - \eta_i\rvert$	Зависимость распределения статистики от объема выборки n и необходимость использования таблицы процентных точек. При малых n и α критерий является смещённым относительно H_1. Модификация статистики T_1^* некоторое преимущество даёт только относительно H_1. Критерии обладают достаточно высокой мощностью относительно других конкурирующих гипотез.
13	Хегази–Грина T_2	$T_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(U_i - \eta_i)^2$	Те же достоинства и недостатки, что и у критерия со статистикой T_1. Как правило, чуть уступает в мощности критерию со статистикой T_1.

Продолжение таблицы 1

№ п/п	Критерий	Статистика	Недостатки, достоинства, рекомендации
14	Фросини	$$B_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \left\| U_i - \frac{i-0.5}{n} \right\|$$	Приходится пользоваться таблицей процентных точек. При $n \ge 50$ можно использовать аппроксимацию в виде бета-распределения 1-го рода. При малых n и α критерий является смещённым относительно H_1. Обладает достаточно высокой мощностью относительно других конкурирующих гипотез.
15	Неймана–Бартона	$$N_K = \sum_{j=1}^{K} V_j^2 ,$$ где $V_j = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \pi_j \left(U_i - 0.5 \right),$ $$\pi_1(y) = 2\sqrt{3}y ;\; \pi_2(y) = \sqrt{5}\left(6y^2 - 0,5\right);$$ $$\pi_3(y) = \sqrt{7}\left(20y^3 - 3y\right);$$ $$\pi_4(y) = 3\left(70y^4 - 15y^2 + 0,375\right)$$	При малых n и α наблюдается смещение критериев относительно H_1. При $n > 20$ распределения статистик хорошо аппроксимируется χ_K^2 -распределениями. Критерии демонстрируют хорошую мощность. Наиболее предпочтителен критерий со статисткой N_2.
16	Дудевича–ван дер Мюлена	$$H(m,n) = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ln \left\{ \frac{n}{2m} \left(U_{i+m} - U_{i-m} \right) \right\},$$ где m – целое и $m \le \frac{n}{2}$; если $i + m \ge n$, то $U_{i+m} = U_n$, и если $i - m \le 1$, то $U_{i-m} = U_1$	Зависимость распределения статистики от объема выборки n и необходимость использования таблицы процентных точек. Некоторая неопределенность при выборе m. Обладает высокой мощностью относительно гипотезы H_1 и неплохой мощностью относительно других гипотез.
17	Модификация 1 энтропийного критерия	$$HY_1 = -\sum_{i=1}^{n} \ln \left(\frac{U_{i+m} - U_{i-m}}{\hat{F}(U_{i+m}) - \hat{F}(U_{i-m})} \right),$$ где $$\hat{F}(U_i) = \frac{n-1}{n(n+1)} \left(i + \frac{1}{n-1} + \frac{U_i - U_{i-1}}{U_{i+1} - U_{i-1}} \right),$$ $$i = 2,\ldots,n-1,$$ $$\hat{F}(U_1) = 1 - \hat{F}(U_n) = \frac{1}{(n+1)}$$	Зависимость распределения статистики от объема выборки n и необходимость использования таблицы процентных точек. Некоторая неопределенность при выборе m. По мощности эквивалентен критерию Дудевича–ван дер Мюлена.
18	Модификация 2 энтропийного критерия	$$HY_2 = -\sum_{i=1}^{n} \ln \left(\frac{U_{i+m} - U_{i-m}}{\hat{F}(U_{i+m}) - \hat{F}(U_{i-m})} \right) \times$$ $$\times \left(\frac{\hat{F}(U_{i+m}) - \hat{F}(U_{i-m})}{\sum_{j=1}^{n} \left(\hat{F}(U_{j+m}) - \hat{F}(U_{j-m}) \right)} \right)$$	Имеет те же недостатки и достоинства, что и модификация 1. Превосходит в мощности модификацию 1 относительно H_1, но уступает – относительно гипотез H_2 и H_3.

Окончание таблицы 1

№ п/п	Критерий	Статистика	Недостатки, достоинства, рекомендации
19	Пардо	$E_{m,n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{2m}{n\left(U_{i+m} - U_{i-m}\right)}$	Зависимость распределения статистики от объема выборки n и необходимость использования таблицы процентных точек. Неопределенность с выбором m, от которого зависят распределения статистики. Отсутствует смещение относительно гипотез вида H_1. В среднем неплохая мощность.

Рассмотренные специальные критерии проверки равномерности в таблице 2 упорядочены по убыванию мощности относительно конкурирующих гипотез H_1, H_2 и H_3. (по величине мощности $1-\beta$, проявленной при $n=100$ и уровне значимости $\alpha = 0.1$).

В столбце для H_1 темным цветом выделены критерии, которые относительно H_1 при малых объёмах выборок n обладают сильно выраженной смещённостью.

Этот недостаток не отмечен только у некоторых критериев: у энтропийного критерия Дудевича–ван дер Мюлена и его модификаций, у критериев Ченга–Спиринга, Шварца и Пардо.

В меньшей степени смещённость относительно H_1 проявляется у критериев Неймана–Бартона со статистиками N_2 и N_3.

Критерий Неймана–Бартона со статистикой N_2 показывает высокую мощность относительно H_1 и сравнительно высокие результаты относительно H_2 и H_3.

Стабильно неплохую способность отличать конкурирующие гипотезы от равномерного закона демонстрируют и другие критерии второй группы (критерии Хегази–Грина и Фросини).

Энтропийный критерий Дудевича–ван дер Мюлена и модификации, имеющие высокую мощность относительно H_1, по отношению к конкурирующим гипотезам H_2 и H_3 показывают достаточно средние результаты. В то же время они успешно конкурируют с критериями второй группы.

Наиболее низкую мощность демонстрируют критерии первой группы, в статистиках которых суммируются модули или квадраты разностей $U_i - U_{i-1}$ значений последовательных порядковых статистик (критерии Шермана, Кимбелла, Морана, Гринвуда, Гринвуда–Кэсенберри–Миллера и, особенно, Янга).

3. Заключение

Параллельно с настоящим исследованием относительно рассматриваемых конкурирующих гипотез H_1, H_2 и H_3 были получены оценки мощности непараметрических критериев согласия (Колмогорова, Купера, Крамера–Мизеса–Смирнова, Ватсона, Андерсона–Дарлинга, Жанга статистиками Z_K, Z_C и Z_A) при проверке равномерности. Было показано, что из этих критериев только критерии Купера и Ватсона оказались несмещёнными относительно H_1. При этом для критериев согласия Колмогорова, Крамера–Мизеса–Смирнова и Андерсона–Дарлинга факт “смещённости” был отмечен вообще впервые. И в то же время по сравнению с лучшими представителями специальных критериев равномерности критерии согласия продемонстрировали, по крайней мере, сравнимую мощность.

Таблица 2. Ранжирование критериев равномерности по мощности

№ п/п	Относительно H_1	$1-\beta$	Относительно H_2	$1-\beta$	Относительно H_3	$1-\beta$
1	Модификация 2 энтропийного критерия	0.883	Хегази-Грина T_1	0.610	Хегази-Грина T_1	0.522
2	Кресси $L_n^{(m)}$	0.852	Фросини	0.603	Фросини	0.522
3	Неймана–Бартона N_2	0.837	Хегази-Грина T_2	0.602	Хегази-Грина T_1^*	0.520
4	Дудевича–ван дер Мюлена	0.790	Неймана–Бартона N_2	0.597	Хегази-Грина T_2	0.508
5	Модификация 1 энтропийного критерия	0.789	Хегази-Грина T_1^*	0.595	Хегази-Грина T_2^*	0.506
6	Неймана–Бартона N_3	0.766	Хегази-Грина T_2^*	0.585	Неймана–Бартона N_2	0.447
7	Неймана–Бартона N_4	0.739	Неймана–Бартона N_3	0.577	Неймана–Бартона N_3	0.416
8	Ченга-Спиринга	0.722	Неймана–Бартона N_4	0.557	Неймана–Бартона N_4	0.381
9	Шварца	0.583	Пардо	0.463	Пардо	0.291
10	Хегази-Грина T_1^*	0.443	Кресси $S_n^{(m)}$	0.344	Дудевича–ван дер Мюлена	0.275
11	Хегази-Грина T_2^*	0.409	Модификация 1 энтропийного критерия	0.328	Модификация 1 энтропийного критерия	0.275
12	Пардо	0.408	Дудевича–ван дер Мюлена	0.327	Модификация 2 энтропийного критерия	0.267
13	Фросини	0.384	Модификация 2 энтропийного критерия	0.266	Шварца	0.206
14	Хегази-Грина T_1	0.322	Гринвуда–Кэсенберри–Миллера	0.244	Гринвуда–Кэсенберри–Миллера	0.186
15	Хегази-Грина T_2	0.308	Шварца	0.226	Кресси $S_n^{(m)}$	0.178
16	Гринвуда–Кэсенберри–Миллера	0.290	Шермана	0.204	Кимбелла	0.165
17	Кимбелла	0.279	Кимбелла	0.201	Морана	0.165
18	Морана	0.279	Морана	0.201	Кресси $L_n^{(m)}$	0.158
19	Шермана	0.215	Ченга-Спиринга	0.168	Шермана	0.154
20	Гринвуда	0.151	Кресси $L_n^{(m)}$	0.163	Гринвуда	0.122
21	Морана 2	0.126	Гринвуда	0.137	Морана 2	0.110
22	Янга	0.115	Морана 2	0.134	Ченга-Спиринга	0.106
23	Кресси $S_n^{(m)}$	0.006	Янга	0.108	Янга	0.104

Когда для проверки гипотезы о принадлежности анализируемой выборки некоторому конкретному закону распределения разработано множество специальных критериев, то среди этого множества, как правило, находятся критерии, применение которых при ограниченных объемах выборок связано с заметными преимуществами в мощности, например, по сравнению с общими критериями согласия.

В данном случае (при проверке равномерности) такого преимущества относительно непараметрических критериев согласия не наблюдается: очень неплохо показывают себя критерии Жанга со статистиками Z_A и Z_C и критерий Андерсона–Дарлинга.

Из анализа свойств всего множества критериев, которые могут использоваться для проверки гипотезы о принадлежности выборки равномерному закону, вытекает, что корректного использования какого-то одного из критериев для формирования “надежного” статистического вывода зачастую может оказаться недостаточно. Для большей объективности статистических выводов предпочтительней воспользоваться некоторым рядом критериев, обладающих определёнными достоинствами. Использование совокупности критериев, опирающихся на различные меры отклонения эмпирического распределения от теоретического, повышает качество статистических выводов.

В дальнейшем на базе результатов проведенных исследований планируется подготовить аналогичное работам [21, 22] руководство по применению критериев проверки гипотез о принадлежности анализируемых данных равномерному закону распределения вероятностей.

Литература

1. *Sherman B.* A random variable related to the spacing of sample values / B. Sherman // The Annals of Mathematical Statistics. – 1950. – V.21, №3. – P. 339-361.
2. *Sherman B.* Percentiles of the w_n statistic / B. Sherman // The Annals of Mathematical Statistics. – 1957. – V.28, №1. – P. 257-261.
3. *Kimball B. F.* Some basic theorems for developing tests of fit for the case of the non-parametric probability distribution function./ B. F. Kimball // The Annals of Mathematical Statistics. – 1947. – V.18, №1. – P. 540-548.
4. *Moran P. A. P.* The random division of an intervals / P. A. P. Moran // J. R. Statist. Soc. – 1947. – Ser. B. V.9. No. 1. – P. 92-98.
5. *Moran P. A. P.* The random division of an intervals. II / P. A. P. Moran // J. R. Statist. Soc. – 1951. – Ser. B. V.13. No. 2. – P. 147-150.
6. *Cressie N.* An optimal statistic based on higher order gaps // Biometrika. – 1979. – V.66. – P. 619–627.
7. *Pardo M. C.* A test for uniformity based on informational energy // Statistical Papers. – 2003. – V.44. – P. 521–534.
8. *Swartz T.* Goodness-of-fit tests using Kullback–Leibler information // Communications in Statistics – Theory and Methods. – 1992. – V.21. – P.711–729.
9. *Hegazy Y. A. S.* Some new goodness-of-fit tests using order statistics / Y. A. S. Hegazy, J. R. Green // Applied Statistics. – 1975. – V.24, №3. – P. 299-308.
10. *Frosini B. V.* On the distribution and power of goodness-of-fit statistic with parametric and nonparametric applications, “Goodness-of-fit” / Ed. by Revesz P., Sarkadi K., Sen P.K. //Amsterdam-Oxford-New York: North-Holland Publ. Comp. – 1987. – P. 133-154.
11. *Young D. L.* The linear nearest neighbour statistic / D. L. Young // Biometrika. – 1982. – V.69, №2. – P. 477-480.
12. *Cheng S. W.* A test to Identify the uniform distribution with applications / S. W. Cheng, F. A. Spiring // IEEE Trans. Reliability. – 1987. – V. R-36. – P. 98-105.
13. *Greenwood V.* The statistical study of Infection disease / V. Greenwood // J. R. Statist. Soc.. – 1946. – Ser. A. V.109. – P. 257-261.
14. *Quesenberry C. P.* Power studies of some tests for uniformity. / C. P. Quesenberry, F. L. Miller // Journal of Statistical Computation and Simulation. – 1977. – V.5. – P. 169-191.
15. *Neyman J.* “Smooth” tests for goodness-of-fit / J. Neyman // Scandinavisk Aktuarietidskrift. – 1937. – V.20. – P. 149-199.
16. *Dudewics E. J., van der Meulen E. C.* Entropy-based test of uniformity // J. Amer. Statist. Assoc. – 1981. – V.76. No. 376. – P. 967-974.
17. *Zamanzade E.* Testing uniformity based on new entropy estimators // Journal of Statistical Computation and Simulation. – 2014. DOI: 10.1080/00949655.2014.958085.
18. *Блинов П. Ю., Лемешко Б. Ю.* О мощности критериев, используемых для проверки гипотез о принадлежности выборок равномерному закону // Материалы Российской НТК “Обработка информационных сигналов и математическое моделирование”, Новосибирск. 2013. – С.35-38.

19. *Blinov P. Yu., Lemeshko B. Yu.* A review of the properties of tests for uniformity // 2014 12th Iinternational Conference on Actual Problems of Electronics Instrument Engineering (APEIE) 34006 Proceedings. Vol. 1. Novosibirsk, 2014. – P.540-547.
20. *Блинов П. Ю., Лемешко Б. Ю.* Обзор свойств критериев равномерности // Труды XII международной конференции "Актуальные проблемы электронного приборостроения" АПЭП-2014. Т.6, Новосибирск, 2014. – С.29-36.
21. *Лемешко Б. Ю.* Непараметрические критерии согласия: Руководство по применению / Б. Ю. Лемешко.– М.: НИЦ ИНФРА-М, 2014. – 163 с.
22. *Лемешко Б. Ю.* Критерии проверки отклонения распределения от нормального закона: Руководство по применению / Б. Ю. Лемешко. – М.: НИЦ ИНФРА-М, 2015. – 160 с. – (Научная мысль). – www.dx.doi.org/10.12737/6086.

Лемешко Борис Юрьевич

Д.т.н., профессор, г.н.с. кафедры теоретической и прикладной информатики НГТУ (630073, Новосибирск, просп. Карла Маркса, 20), e-mail: lemeshko@ami.nstu.ru

Блинов Павел Юрьевич

Аспирант кафедры теоретической и прикладной информатики НГТУ (630073, Новосибирск, просп. Карла Маркса, 20), e-mail: blindizer@ya.ru.

The tests used for testing deviation from a uniform distribution

P. Yu. Blinov, B. Yu. Lemeshko

The set of special tests intended for testing uniformity are considered. Distributions of test statistics, power of tests under different competing hypotheses are studied. Considered test are ranked by test power. Advantages and disadvantages of individual tests were shown. It has been shown that large part of the tests traditionally used for testing uniformity have the bias under some kind of competing hypotheses. Underlines that special uniformity tests haven't clear advantage over nonparametric goodness-of-fit tests used for testing uniformity in general.

Key words: uniform distribution, hypothesis testing, test statistic, test power