УДК 519.24

О КРИТЕРИЯХ ПРОВЕРКИ РАВНОМЕРНОСТИ ЗАКОНА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ*

Б. Ю. Лемешко, П. Ю. Блинов, С. Б. Лемешко

Новосибирский государственный технический университет,
630073, г. Новосибирск, просп. К. Маркса, 20
E-mail: Lemeshko@ami.nstu.ru

Рассмотрено множество критериев, предназначенных для проверки гипотезы о принадлежности наблюдений равномерному закону, которые ранжируются по мощности. Показано, что значительная часть критериев, традиционно используемых при проверке гипотезы о равномерности, являются смещёнными относительно некоторого вида конкурирующих гипотез. Подчёркивается, что специальные критерии, ориентированные только на проверку равномерности, не имеют явных преимуществ перед непараметрическими критериями согласия, применяемыми в этих же целях.

Ключевые слова: равномерный закон, проверка гипотез, статистический критерий, мощность критерия.

DOI: 10.15372/AUT20160204

Введение. В силу ряда причин равномерный закон распределения вероятностей занимает заметное место в задачах статистического анализа. Равномерный закон зачастую используется в качестве модели для описания ошибок измерений некоторых приборов или систем, что не в последнюю очередь бывает связано с недостатком информации. Естественно, что его необоснованное применение может приводить к проблемам.

Для проверки гипотезы о принадлежности случайных величин (ошибок измерений) равномерному закону могут быть использованы различные статистические критерии из достаточно длинного перечня, который можно разбить на два подмножества. Это общие критерии согласия, применяемые для проверки равномерности, и специальные критерии, ориентированные только на проверку гипотезы о принадлежности выборки $X_1, X_2, \ldots, X_n$ равномерному закону.

Наличие множества критериев ставит перед специалистами не простую задачу выбора, так как имеющаяся в публикациях информация не позволяет однозначно отдать предпочтение какому-то определённому критерию, а каждый специалист заинтересован не только в корректности использования выбранного критерия (или критериев), но и в качестве (надёжности) статистических выводов.

С применением множества рассматриваемых критериев может проверяться простая гипотеза о принадлежности случайной величины X равномерному закону на интервале $[0, 1]$ или на интервале $[a, b]$ при известных a и b или сложная, когда a и b неизвестны.

Обычно простая проверяемая гипотеза о принадлежности выборки $X_1, X_2, \ldots, X_n$ независимых наблюдений случайной величины X равномерному закону имеет вид H_0: $F(x) = x$, $x \in [0, 1]$.

Большинство критериев проверки гипотезы о равномерности на интервале $[0, 1]$ опирается на оценки порядковых статистик случайной величины X (на элементы $x_{(i)}$ вариационного ряда $0 < x_{(1)} < x_{(2)} < \ldots < x_{(n)} < 1$, построенного по выборке $X_1, X_2, \ldots, X_n$).

*Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ (проект № 2.541.2014/К).

Далее в выражениях статистик критериев будут использоваться обозначения $U_i = x_{(i)}$, $i = \overline{1,n}$, $U_0 = 0$, $U_{n+1} = 1$.

Как правило, критерии ориентированы на проверку простой гипотезы H_0 на интервале [0, 1]. При необходимости проверки простой гипотезы о принадлежности выборки $X_1, X_2, \ldots, X_n$ равномерному закону на интервале $[a, b]$ (с параметром сдвига a и параметром масштаба $b-a$) для использования всех критериев равномерности элементы $x_{(i)}$ вариационного ряда $a < x_{(1)} < x_{(2)} < \ldots < x_{(n)} < b$, построенного по выборке $X_1, X_2, \ldots, X_n$, преобразуют в соответствующие (требуемые в критериях) порядковые статистики следующим образом: $U_i = (x_{(i)} - a)/(b-a)$, $i = \overline{1,n}$, $U_0 = 0$, $U_{n+1} = 1$. Весь дальнейший порядок применения критериев проверки равномерности остаётся неизменным (как и на интервале [0, 1]).

При проверке сложной гипотезы о равномерности вида H_0: $F(x) = (x-a)/(b-a)$, $x \in [a, b]$, где a и b неизвестны и должны быть найдены по этой же выборке, по элементам вариационного ряда $x_{(1)} < x_{(2)} < \ldots < x_{(n)}$, построенного по выборке $X_1, X_2, \ldots, X_n$, вычисляются оценки параметров

$$\hat{a} = x_{(1)} - \frac{x_{(n)} - x_{(1)}}{n-1}, \quad \hat{b} = x_{(n)} + \frac{x_{(n)} - x_{(1)}}{n-1}.$$

Очевидно, что проверка сложной гипотезы о принадлежности выборки $X_1, X_2, \ldots, X_n$ равномерному закону на интервале $[\hat{a}, \hat{b}]$, полученному по данной выборке, эквивалентна проверке простой гипотезы о принадлежности части выборки объёмом $n-2$ (определённой части вариационного ряда $x_{(2)} < x_{(3)} < \ldots < x_{(n-1)}$) равномерному закону на интервале $[x_{(1)}, x_{(n)}]$, соответствующему размаху выборки. Для проверки такой гипотезы с использованием любых рассматриваемых в этой работе критериев требуемые значения порядковых статистик находятся согласно выражениям $U_{i-1} = (x_{(i)} - x_{(1)})/(x_{(n)} - x_{(1)})$, $i = \overline{2, (n-1)}$, $U_0 = 0$, $U_{n-1} = 1$.

Отметим, что в общем случае при использовании непараметрических критериев согласия для проверки сложных гипотез относительно различных параметрических моделей законов распределения вероятностей сталкиваются с серьёзными проблемами, которые связаны с зависимостью распределений статистик критериев от ряда факторов [1]. Как видим, такого рода проблема не возникает в случае применения непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез о равномерности.

Замечание. К задаче проверки гипотезы о равномерности на интервале [0, 1] иногда сводят проверку сложных гипотез о принадлежности выборки некоторому параметрическому закону. Аналогично к проверке гипотезы о равномерности на интервале [0, 1] зачастую приходят в процессе решения сложных задач статистического анализа, например при проверке адекватности построенных моделей выживания и надёжности. В подобных ситуациях использование описанного выше подхода к проверке сложной гипотезы о равномерности будет некорректным.

Цель исследований, результатам которых посвящена данная работа, — показать особенности применения критериев при проверке гипотезы о принадлежности анализируемой выборки равномерному закону, сравнить мощность рассматриваемых критериев относительно некоторых близких конкурирующих гипотез, сопоставить мощность критериев согласия с мощностью специальных критериев, ориентированных исключительно на проверку равномерности.

Рассматриваемые конкурирующие гипотезы. С результатами проверки гипотез связывают ошибки двух видов: ошибка первого рода заключается в отклонении гипотезы H_0, когда она верна; ошибка второго рода состоит в том, что принимают (не отклоняют) гипотезу H_0, в то время как справедлива конкурирующая гипотеза H_1. Уровень значимости α задаёт вероятность ошибки первого рода.

Обычно, используя критерии проверки гипотез, не рассматривают конкретную конкурирующую гипотезу. В таком случае при проверке гипотез о виде закона можно считать, что конкурирующая гипотеза имеет вид H_1: $F(x) \neq F(x, \theta_0)$, где $F(x, \theta_0)$ соответствует проверяемой гипотезе H_0. Если же гипотеза H_1 имеет, например, вид H_1: $F(x) = F_1(x, \theta)$, то задание величины α для применяемого критерия проверки гипотез определяет и вероятность ошибки второго рода β. Мощность критерия представляет собой величину $1 - \beta$. Очевидно, что чем выше мощность используемого критерия при заданном значении α, тем лучше он различает гипотезы H_0 и H_1.

Естественно, что наиболее интересна способность критериев различать близкие конкурирующие гипотезы. Именно при анализе близких альтернатив удаётся выяснить тонкие моменты, характеризующие реальные свойства критериев, выявить принципиальные недостатки или достоинства.

В данной работе мощность всех рассматриваемых критериев исследовалась относительно трёх конкурирующих гипотез, которые соответствуют принадлежности наблюдаемой случайной величины семейству бета-распределений первого рода с функцией плотности

$$f(x) = \frac{1}{\theta_2 \mathrm{B}(\theta_0, \theta_1)} \Big(\frac{x - \theta_3}{\theta_2}\Big)^{\theta_0 - 1} \Big(1 - \frac{x - \theta_3}{\theta_2}\Big)^{\theta_1 - 1},$$

где $\mathrm{B}(\theta_0, \theta_1) = \Gamma(\theta_0)\Gamma(\theta_1)/\Gamma(\theta_0 + \theta_1)$ — бета-функция; $\theta_0, \theta_1 \in (0, \infty)$ — параметры формы; $\theta_2 \in (0, \infty)$ — масштабный параметр; $\theta_3 \in (-\infty, \infty)$ — параметр сдвига; $x \in [0, \theta_2]$.

Обозначим функцию бета-распределения первого рода при конкретных значениях параметров как $B_I(\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3)$. Тогда три рассматриваемые и достаточно близкие к H_0 конкурирующие гипотезы H_1, H_2, H_3 принимают следующий вид:

$$H_1\colon\ F(x) = B_I(1{,}5; 1{,}5; 1; 0), \quad x \in [0, 1];$$

$$H_2\colon\ F(x) = B_I(0{,}8; 1; 1; 0), \quad x \in [0, 1];$$

$$H_3\colon\ F(x) = B_I(1{,}1; 0{,}9; 1; 0), \quad x \in [0, 1].$$

Функции распределения вероятностей, соответствующие рассматриваемым гипотезам, представлены на рис. 1, а плотности распределений — на рис. 2. Как можно видеть, функции распределения законов для гипотез H_1, H_2, H_3 не так уж сильно отличаются от функции распределения равномерного закона, но плотности законов отличаются существенно.

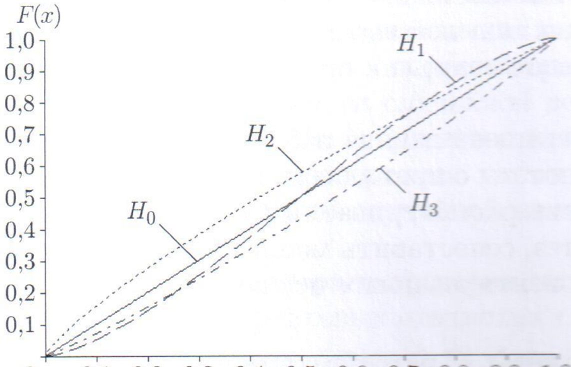

Рис. 1

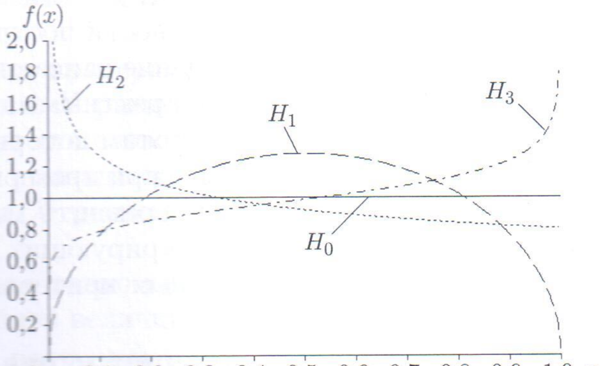

Рис. 2

Следует обратить внимание, что конкурирующей гипотезе H_1 соответствует закон, функция распределения которого пересекается с функцией распределения равномерного закона, а при H_2 и H_3 функции распределения законов лежат выше и ниже функции равномерного. При этом способности различать гипотезы H_0 и H_1, H_0 и H_2 или H_0 и H_3 у критериев оказываются разными.

Особо подчеркнём, что анализ мощности критериев относительно гипотезы H_1 впервые позволил выявить неспособность большей части непараметрических критериев согласия при малых объёмах выборок n и малых уровнях значимости α отличать гипотезы типа H_1 от H_0, т. е. показал смещённость некоторых критериев (мощность $1-\beta$ оказывается меньше α). Причём указанный недостаток оказался свойственным не только большей части непараметрических критериев согласия, но и большей части специальных критериев проверки равномерности.

Применение критериев согласия. Для проверки равномерности могут использоваться все без исключения критерии согласия.

В критерии Колмогорова [2] при проверке гипотезы H_0 о принадлежности выборки равномерному закону целесообразно использовать статистику с поправкой в форме [3]

$$S_K = \sqrt{n}D_n + 1/6\sqrt{n}, \tag{1}$$

где $D_n = \max(D_n^+, D_n^-)$, $D_n^+ = \max\limits_{1 \le i \le n}\{i/n - U_i\}$, $D_n^- = \max\limits_{1 \le i \le n}\{U_i - (i-1)/n\}$. При справедливости простой проверяемой гипотезы H_0 предельным распределением статистики (1) является распределение Колмогорова с функцией

$$K(s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \mathrm{e}^{-2k^2s^2}.$$

В критерии Купера [4, 5] в качестве расстояния между эмпирическим и теоретическим законом рассматривается величина, вычисляемая по выражению $V_n = D_n^+ + D_n^-$.

Для снижения зависимости распределения используемой в критерии статистики $\sqrt{n}V_n$ от n можно применять модификации статистики [6] или [7] соответственно:

$$V = V_n(\sqrt{n} + 0{,}155 + 0{,}24/\sqrt{n}), \tag{2}$$

$$V_n^{\mathrm{mod}} = \sqrt{n}\,V_n + 1/3\sqrt{n}. \tag{3}$$

При проверке простой гипотезы H_0 предельным распределением статистик (2) и (3) является распределение [4, 5]

$$\mathrm{Kuiper}(s) = 1 - \sum_{m=1}^{\infty} 2(4m^2s^2 - 1)\mathrm{e}^{-2m^2s^2}.$$

Статистика критерия ω^2 Крамера — Мизеса — Смирнова при проверке равномерности принимает вид

$$S_\omega = n\omega_n^2 = \frac{1}{12n} + \sum_{i=1}^{n}\Big\{U_i - \frac{2i-1}{2n}\Big\}^2. \tag{4}$$

При справедливости простой гипотезы H_0 статистика (4) в пределе подчиняется закону с функцией распределения $a1(s)$, имеющей вид [3]

$$a1(s) = \frac{1}{\sqrt{2s}}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\Gamma(j+1/2)\sqrt{4j+1}}{\Gamma(1/2)\Gamma(j+1)}\exp\Big\{-\frac{(4j+1)^2}{16s}\Big\}\Big\{I_{-1/4}\Big[\frac{(4j+1)^2}{16s}\Big] - I_{1/4}\Big[\frac{(4j+1)^2}{16s}\Big]\Big\},$$

где $I_{-1/4}(\cdot), I_{1/4}(\cdot)$ — модифицированные функции Бесселя вида

$$I_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{\nu+2k}}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)}, \quad |z| < \infty, \quad |\arg z| < \pi.$$

Статистика критерия Ватсона [8, 9] при проверке равномерности задаётся следующим выражением:

$$U_n^2 = \sum_{i=1}^{n} \Big(U_i - \frac{i-1/2}{n}\Big)^2 - n\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} U_i - \frac{1}{2}\Big)^2 + \frac{1}{12n}. \tag{5}$$

При справедливости H_0 статистика (5) в пределе подчиняется закону с функцией распределения [8, 9]

$$\mathrm{Watson}(s) = 1 - 2\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \mathrm{e}^{-2m^2\pi^2 s}.$$

Статистика критерия согласия Ω^2 Андерсона — Дарлинга [10, 11] при проверке равномерности принимает вид

$$S_\Omega = -n - 2\sum_{i=1}^{n} \Big\{\frac{2i-1}{2n} \ln U_i + \Big(1 - \frac{2i-1}{2n}\Big) \ln(1-U_i)\Big\}. \tag{6}$$

При справедливости простой проверяемой гипотезы H_0 статистика (6) в пределе подчиняется закону с функцией распределения [3]

$$a2(s) = \frac{\sqrt{2\pi}}{s} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{\Gamma(j+1/2)(4j+1)}{\Gamma(1/2)\Gamma(j+1)} \exp\Big\{-\frac{(4j+1)^2\pi^2}{8s}\Big\} \times$$
$$\times \int_0^{\infty} \exp\Big\{\frac{s}{8(y^2+1)} - \frac{(4j+1)^2\pi^2 y^2}{8s}\Big\} dy.$$

В [12] были предложены непараметрические критерии согласия, статистики которых при проверке простой гипотезы о принадлежности анализируемой выборки равномерному закону на интервале [0, 1] принимают вид

$$Z_A = -\sum_{i=1}^{n} \Big[\frac{\ln U_i}{n-i+1/2} + \frac{\ln\{1-U_i\}}{i-1/2}\Big], \tag{7}$$

$$Z_C = \sum_{i=1}^{n} \Big[\ln\Big\{\frac{U_i^{-1}-1}{(n-1/2)/(i-3/4)-1}\Big\}\Big]^2, \tag{8}$$

$$Z_K = \max_{1\le i\le n} \Big(\Big(i - \frac{1}{2}\Big) \ln\Big\{\frac{i-1/2}{nU_i}\Big\} + \Big(n - i + \frac{1}{2}\Big) \ln\Big[\frac{n-i+1/2}{n(1-U_i)}\Big]\Big). \tag{9}$$

Критерии Жанга являются развитием критериев Андерсона — Дарлинга, Крамера — Мизеса — Смирнова и Колмогорова соответственно. Применение критериев со статистиками (7)–(9) осложняет сильная зависимость распределений статистик от объёма выборки n.

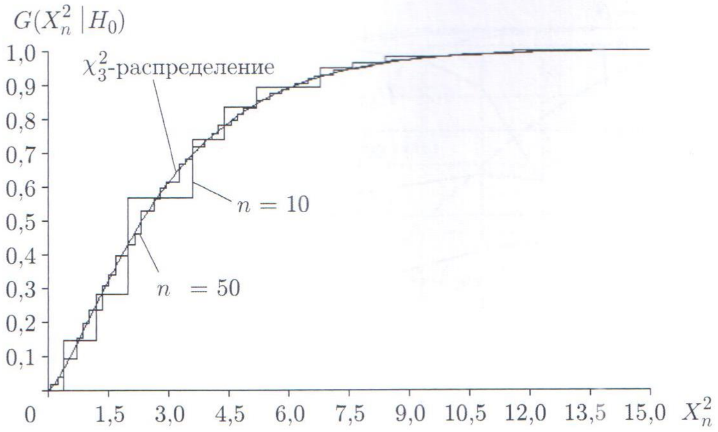

Рис. 3

Одним из факторов в поддержку применения при проверке равномерности непараметрических критериев согласия является известность предельных распределений статистик, которыми можно пользоваться для вычисления достигнутого уровня значимости, как правило, при объёмах выборок $n \geq 25$. Исключение составляют критерии Жанга, распределения статистик которых зависят от n, вследствие чего при проверке гипотез приходится опираться на таблицы процентных точек.

При использовании критерия χ^2 Пирсона область определения случайной величины разбивают на k непересекающихся интервалов граничными точками, подсчитывают количество наблюдений n_i, попавших в i-й интервал, и вероятности P_i попадания в интервал. При этом $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$, $\sum_{i=1}^{k} P_i(\theta) = 1$. Статистику критерия вычисляют по формуле

$$X_n^2 = n \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i/n - P_i(\theta))^2}{P_i(\theta)}. \tag{10}$$

При справедливости простой проверяемой гипотезы H_0 при $n \to \infty$ статистика (10) асимптотически подчиняется χ^2_{k-1}-распределению.

Следует иметь в виду, что статистика (10) представляет собой дискретную случайную величину и её действительное распределение $G(X_n^2 \mid H_0)$ при справедливости проверяемой гипотезы H_0 и ограниченных n может существенно отличаться от асимптотического χ^2_{k-1}-распределения. Например, рис. 3 демонстрирует зависимость распределения статистики критерия (при справедливости H_0) от объёма выборок n при разбиении области определения на интервалы равной вероятности (число интервалов $k = 4$). При проверке равномерности использование равновероятного группирования представляется вполне логичным. Так как действительное распределение статистики является дискретным, то оценка достигнутого уровня значимости, вычисляемая в соответствии с χ^2_{k-1}-распределением, обладает определённой погрешностью.

С ростом числа интервалов дискретное распределение статистики быстрее сходится к непрерывному χ^2_{k-1}-распределению, но это не означает увеличения мощности критерия. Мощность критерия χ^2 зависит от рассматриваемой альтернативы (законов, соответствующих проверяемой и конкурирующей гипотезам), а также от способа разбиения на интервалы и их числа [13, 14].

Например, на рис. 4 показана зависимость мощности критерия Пирсона относительно H_1, H_2 и H_3 от числа интервалов k (при разбиении области определения на равноверо-

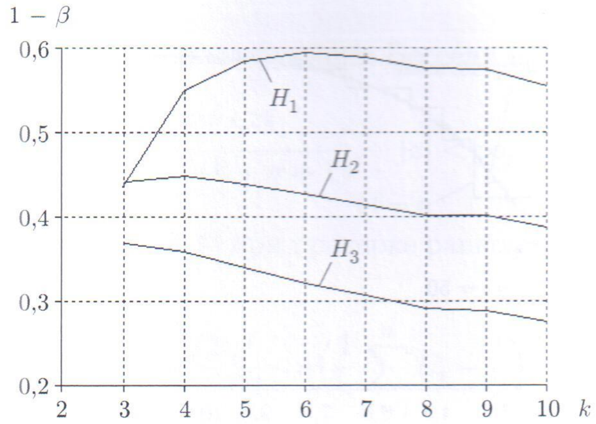

Рис. 4

ятные интервалы группирования). Результаты приведены для объёма выборок $n = 100$ и заданной вероятности ошибки первого рода (уровня значимости) $\alpha = 0{,}1$.

Анализ мощности критериев согласия. На основании оценок мощности, полученных в [15], рассмотренные критерии согласия, используемые для проверки равномерности, по убыванию мощности относительно конкурирующей гипотезы H_1 (при пересечении функций распределения законов, соответствующих H_0 и H_1) можно расположить следующим образом:

$$Z_A \text{ Жанга} \succ Z_C \text{ Жанга} \succ \text{Ватсона} \succ \text{Купера} \succ Z_K \text{ Жанга} \succ \chi^2 \text{ Пирсона} \succ$$

$$\succ \text{Андерсона — Дарлинга} \succ \text{Крамера — Мизеса — Смирнова} \succ \text{Колмогорова}.$$

При этом подчеркнём, что для критериев Колмогорова, Крамера — Мизеса — Смирнова и Андерсона — Дарлинга в [15] впервые отмечен факт их смещённости (относительно гипотез типа H_1) при малых объёмах выборок n и малых значениях уровня значимости α. Наличие смещённости наблюдается также у критериев Жанга со статистиками Z_K и Z_C и в меньшей степени у критерия со статистикой Z_A. Смещённость критериев согласия со статистиками Z_A и Z_C относительно некоторых конкурирующих гипотез впервые была обнаружена при проверке гипотез о принадлежности выборок нормальному закону [16].

Для иллюстрации смещённости на рис. 5 показаны распределение $G(S \mid H_0)$ статистики критерия Крамера — Мизеса — Смирнова при справедливости проверяемой гипотезы H_0 и распределение $G(S_n \mid H_1)$ этой статистики при справедливости конкурирующей гипотезы H_1 (для объёмов выборок $n = 10, 20, 100, 300$). Как можно видеть, распределения статистики $G(S_n \mid H_1)$ при $n = 10, 20$ пересекают $G(S \mid H_0)$, что объясняет, почему мощность $1 - \beta$ оказывается меньше α.

На рисунке распределение $G(S \mid H_0)$ показано только для $n = 10$. При $n \geq 20$ распределения $G(S_n \mid H_0)$ визуально не отличаются от $G(S_{10} \mid H_0)$ и практически совпадают с предельным распределением $a1(s)$ статистики критерия Крамера — Мизеса — Смирнова при проверке простых гипотез.

Рассмотренная совокупность критериев согласия по убыванию мощности относительно конкурирующей гипотезы H_2 (без пересечения функций распределения, соответствующих H_0 и H_2) располагается в другом порядке:

$$\text{Андерсона — Дарлинга} \succ Z_C \text{ Жанга} \succ \text{Крамера — Мизеса — Смирнова} \succ$$

$$\succ Z_A \text{ Жанга} \approx Z_K \text{ Жанга} \succ \text{Колмогорова} \succ \chi^2 \text{ Пирсона} \succ \text{Купера} \succ \text{Ватсона}.$$

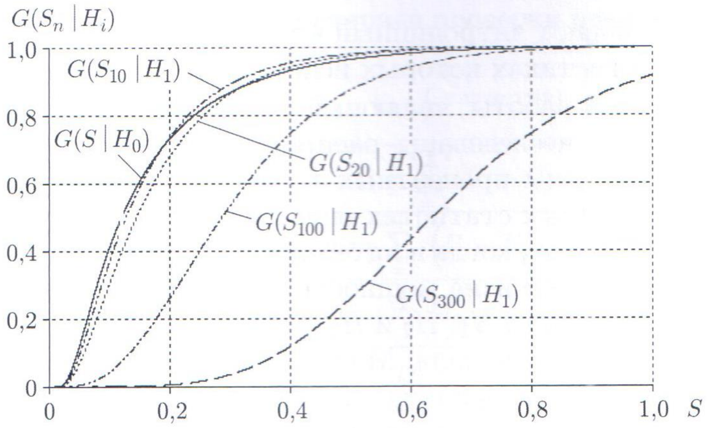

Рис. 5

Эти же критерии по убыванию мощности относительно конкурирующей гипотезы H_3 (так же без пересечения функций распределения законов, соответствующих H_0 и H_3) располагаются примерно в том же порядке:

$$\text{Андерсона — Дарлинга} \succ \text{Крамера — Мизеса — Смирнова} \succ Z_C \text{ Жанга} \succ$$
$$\succ Z_A \text{ Жанга} \succ \text{Колмогорова} \succ Z_K \text{ Жанга} \succ \chi^2 \text{ Пирсона} \succ \text{Купера} \succ \text{Ватсона}.$$

Обратим внимание [15], что критерии Купера и Ватсона, относительно которых не зафиксировано фактов смещённости, несколько выигрывают в мощности у критериев Колмогорова и Крамера — Мизеса — Смирнова, если рассматривается альтернатива с пересечением законов распределения (например, ситуация с H_0 и H_1), и существенно проигрывают в мощности при альтернативе без пересечения (ситуация с H_2 и H_3).

В общем случае предпочтение следует отдать критериям Андерсона — Дарлинга, Жанга со статистиками Z_C и Z_A и Крамера — Мизеса — Смирнова. Однако следует иметь в виду, что можно столкнуться с ситуацией, когда при малых n и α критерии не будут способны отличать от равномерного некоторые конкурирующие законы.

Специальные критерии равномерности. В подмножестве специальных критериев проверки равномерности выделяются три группы. Статистики критериев первой группы предусматривают применение разностей последовательных значений вариационного ряда $U_i - U_{i-1}$, где $i = \overline{1,(n+1)}$, $U_0 = 0$, $U_{n+1} = 1$.

Вторую группу составляют критерии, использующие разности оценок порядковых статистик, полученных по анализируемой выборке, и, например, математических ожиданий этих порядковых статистик.

Третья группа — так называемые энтропийные критерии, опирающиеся на различные оценки энтропии.

К первой группе критериев, использующих разности элементов вариационного ряда, относятся критерии Шермана [17, 18], Кимбелла [19], Морана 1 [20], Морана 2 [21], Янга [22], критерии Кресси с уточнёнными по сравнению с [23] выражениями статистик $S_n^{(m)}$ и $L_n^{(m)}$ [15], Пардо [24] и Шварца [25].

Ко второй группе, где рассматриваются отклонения порядковых статистик от их математических ожиданий (от медиан и т. п.), относятся критерии Хегази — Грина со статистиками T_1 и T_2 [26], Фросини [27], Ченга — Спиринга [28], Гринвуда [29], Гринвуда — Кэсенберри — Миллера [30], критерии Неймана — Бартона со статистиками N_2, N_3 и N_4 [31].

Третью группу составляют энтропийный критерий Дудевича — ван дер Мюлена [32] и две модификации, в статистиках которых используются другие оценки энтропии [33].

При выполнении данной работы, являющейся развитием [34, 35], методами статистического моделирования [14] исследованы распределения статистик всех перечисленных критериев, расширены таблицы процентных точек. Было проверено, насколько хорошо распределения нормализованных статистик описываются соответствующими асимптотическими законами (в тех случаях, когда в литературных источниках присутствовали ссылки на такие результаты), исследована мощность критериев относительно различных конкурирующих гипотез, в частности H_1, H_2 и H_3 [15]. К сожалению, бо́льшая часть рассмотренных критериев (Шермана, Кимбелла, Морана 1, Морана 2, один из критериев Кресси, Хегази — Грина, Фросини, Янга, Гринвуда, Гринвуда — Кэсенберри — Миллера, Неймана — Бартона) являются смещёнными относительно конкурирующей гипотезы H_1.

Другие, практически общие, недостатки большинства специальных критериев — зависимость распределений статистик от объёма выборок n и необходимость использования таблиц критических значений (процентных точек). Исключение составляют критерии Неймана — Бартона, распределения трёх статистик которых при $n > 20$ хорошо аппроксимируются χ^2_2-, χ^2_3- и χ^2_4-распределениями, а также критерии Морана 2 и Янга. Однако аппроксимации χ^2-распределением и нормальным законом соответствующих модификаций статистик критерия Морана 2 существенно отличаются от действительных распределений этих модификаций, а сам критерий обладает очень низкой мощностью относительно конкурирующих гипотез H_1, H_2 и H_3. Нормализованная статистика критерия Янга, напротив, хорошо аппроксимируется стандартным нормальным законом, но критерий обладает настолько низкой мощностью, что рекомендовать его применение нецелесообразно.

Выражения для статистик рассмотренных специальных критериев проверки равномерности представлены в табл. 1.

Все критерии проверки равномерности в столбцах табл. 2 упорядочены по убыванию мощности относительно конкурирующих гипотез H_1, H_2 и H_3 (по величине мощности $1 - \beta$, проявленной при $n = 100$ и уровне значимости $\alpha = 0{,}1$).

В столбце с упорядочением по мощности относительно гипотезы H_1 полужирным шрифтом выделены критерии, которые относительно гипотезы H_1 при малых n обладают ярко выраженной смещённостью. В меньшей степени смещённость относительно H_1 проявляется у критериев Неймана — Бартона со статистиками N_2 и N_3. Этот недостаток не отмечен только для некоторых критериев: Купера и Ватсона, энтропийного критерия Дудевича — ван дер Мюлена и его модификаций, Ченга — Спиринга, Шварца, Пардо, Кресси 2 и χ^2 Пирсона.

Все модификации критериев, использующие в качестве статистик различные оценки энтропии [32, 33], показывают высокую мощность относительно конкурирующей гипотезы вида H_1. В то же время относительно гипотез вида H_2 и H_3 оценки мощности данных критериев более скромные. Заметим, что только у таких критериев при малых n наблюдаются признаки смещённости относительно гипотезы H_2. Надо отметить, что мощность этих критериев, а также критериев Кресси и Пардо зависит от выбора «размера окна» m [15].

Критерий Неймана — Бартона со статистикой N_2 показывает высокую мощность относительно H_1 и сравнительно высокие результаты относительно H_2 и H_3.

Стабильно неплохую способность отличать конкурирующие гипотезы от равномерного закона демонстрируют критерии Хегази — Грина и Фросини.

Низкую мощность показывают критерии, в статистиках которых суммируются модули или квадраты разностей $U_i - U_{i-1}$ значений последовательных порядковых статистик (критерии Шермана, Кимбелла, Морана, Гринвуда, Гринвуда — Кэсенберри — Миллера).

Таблица 1

Статистики специальных критериев проверки равномерности

№ п/п	Критерий	Статистика
1	Шермана	$\omega_n = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n+1}\left\lvert U_i - U_{i-1} - \frac{1}{n+1}\right\rvert$
2	Кимбелла	$A = \sum_{i=1}^{n+1}\left(U_i - U_{i-1} - \frac{1}{n+1}\right)^2$
3	Морана 1, 2	$B = \sum_{i=1}^{n+1}(U_i - U_{i-1})^2$; $M_n = -\sum_{i=1}^{n+1}\ln[(n+1)(U_i - U_{i-1})]$
4	Янга	$M = \sum_{i=1}^{n}\min(D_i, D_{i+1})$, $D_1 = U_1$, $D_i = U_i - U_{i-1}$, $D_{n+1} = 1 - U_n$
5	Гринвуда	$G = (n+1)\sum_{i=1}^{n+1}(U_i - U_{i-1})^2$
6	Гринвуда — Кэсенберри — Миллера	$Q = \sum_{i=1}^{n+1}(U_i - U_{i-1})^2 + \sum_{i=1}^{n}(U_{i+1} - U_i)(U_i - U_{i-1})$
7	Шварца	$A_n^* = \frac{n}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{U_{i+1} - U_{i-1}}{2} - \frac{1}{n}\right)^2$, $U_0 = -U_1$, $U_{n+1} = 2 - U_n$
8	Пардо	$E_{m,n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{2m}{n(U_{i+m} - U_{i-m})}$
9	Кресси 1, 2	$S_n^{(m)} = \sum_{i=0}^{n+1-m}\left(U_{i+m} - U_i - \frac{m}{n+1}\right)^2$; $L_n^{(m)} = -\sum_{i=0}^{n+1-m}\ln\left[\frac{n+1}{m}(U_{i+m} - U_i)\right]$
10	Ченга — Спиринга	$W_p = \left[(U_n - U_1)\frac{n+1}{n-1}\right]^2 \Big/ \sum_{i=1}^{n}(U_i - \bar{U})^2$
11	Хегази — Грина T_1, T_1^*	$T_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left\lvert U_i - \frac{i}{n+1}\right\rvert$; $T_1^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left\lvert U_i - \frac{i-1}{n-1}\right\rvert$
12	Хегази — Грина T_2, T_2^*	$T_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(U_i - \frac{i}{n+1}\right)^2$; $T_2^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(U_i - \frac{i-1}{n-1}\right)^2$
13	Фросини	$B_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\left\lvert U_i - \frac{i-0{,}5}{n}\right\rvert$
14	Неймана — Бартона N_2	$N_2 = \sum_{j=1}^{2}V_j^2$, $V_j = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\pi_j(U_i - 0{,}5)$, $\pi_1(y) = 2\sqrt{3}y$, $\pi_2(y) = \sqrt{5}(6y^2 - 0{,}5)$
15	Неймана — Бартона N_3	$N_3 = \sum_{j=1}^{3}V_j^2$, $V_j = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\pi_j(U_i - 0{,}5)$, $\pi_3(y) = \sqrt{7}(20y^3 - 3y)$
16	Неймана — Бартона N_4	$N_4 = \sum_{j=1}^{4}V_j^2$, $V_j = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\pi_j(U_i - 0{,}5)$, $\pi_4(y) = 3(70y^4 - 15y^2 + 0{,}375)$
17	Дудевича — ван дер Мюлена	$H(m,n) = -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\left\{\frac{n}{2m}(U_{i+m} - U_{i-m})\right\}$, m — целое и $m \le n/2$; если $i + m \ge n$, то $U_{i+m} = U_n$; если $i - m \le 1$, то $U_{i-m} = U_1$
18	Модификация 1 энтропийного критерия	$HY_1 = -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\left(\frac{U_{i+m} - U_{i-m}}{\hat{F}(U_{i+m}) - \hat{F}(U_{i-m})}\right)$, $\hat{F}(U_i) = \frac{n-1}{n(n+1)}\left(i + \frac{1}{n-1} + \frac{U_i - U_{i-1}}{U_{i+1} - U_{i-1}}\right)$, $i = \overline{2,(n-1)}$, $\hat{F}(U_1) = 1 - \hat{F}(U_n) = 1/(n+1)$
19	Модификация 2 энтропийного критерия	$HY_2 = -\sum_{i=1}^{n}\ln\left(\frac{U_{i+m} - U_{i-m}}{\hat{F}(U_{i+m}) - \hat{F}(U_{i-m})}\right)\left(\frac{\hat{F}(U_{i+m}) - \hat{F}(U_{i-m})}{\sum_{j=1}^{n}(\hat{F}(U_{j+m}) - \hat{F}(U_{j-m}))}\right)$

Таблица 2

Упорядоченность критериев равномерности по мощности

№ п/п	Относительно H_1	$1-\beta$	Относительно H_2	$1-\beta$	Относительно H_3	$1-\beta$
1	Модификация 2 энтропийного критерия	0,883	Андерсона — Дарлинга	0,648	Андерсона — Дарлинга	0,526
2	**Жанга Z_A**	0,850	Хегази — Грина T_1	0,610	Хегази — Грина T_1	0,522
3	**Неймана — Бартона N_2**	0,837	Жанга Z_C	0,606	Фросини	0,522
4	Крессп 2	0,820	Фросини	0,603	Хегази — Грина T_1^*	0,520
5	**Жанга Z_C**	0,819	Хегази — Грина T_2	0,602	Хегази — Грина T_2	0,508
6	Дудевича — ван дер Мюлена	0,790	Неймана — Бартона N_2	0,597	Крамера — Мизеса — Смирнова	0,507
7	Модификация 1 энтропийного критерия	0,789	Крамера — Мизеса — Смирнова	0,595	Хегази — Грина T_2^*	0,506
8	Ватсона	0,779	Хегази — Грина T_1^*	0,595	Жанга Z_C	0,463
9	**Неймана — Бартона N_3**	0,766	Жанга Z_K	0,590	Жанга Z_A	0,459
10	**Неймана — Бартона N_4**	0,739	Хегази — Грина T_2^*	0,585	Колмогорова	0,450
11	Купера	0,736	Неймана — Бартона N_3	0,577	Неймана — Бартона N_2	0,447
12	Ченга — Спиринга	0,722	Жанга Z_A	0,574	Жанга Z_K	0,438
13	**Жанга Z_K**	0,617	Неймана — Бартона N_4	0,557	Неймана — Бартона N_3	0,416
14	χ^2 Пирсона	0,593	Колмогорова	0,542	Неймана — Бартона N_4	0,381
15	Шварца	0,583	Пардо	0,463	χ^2 Пирсона	0,374
16	**Андерсона — Дарлинга**	0,505	χ^2 Пирсона	0,448	Пардо	0,291
17	**Хегази — Грина T_1^***	0,443	Купера	0,364	Дудевича — ван дер Мюлена	0,275
18	**Хегази — Грина T_2^***	0,409	Жанга Z_A	0,356	Модификация 1 энтропийного критерия	0,275
19	Пардо	0,408	**Модификация 1 энтропийного критерия**	0,328	Модификация 2 энтропийного критерия	0,267
20	**Фросини**	0,384	**Дудевича — ван дер Мюлена**	0,327	Ватсона	0,257

Окончание табл. 2

Упорядоченность критериев равномерности по мощности

№ п/п	Относительно H_1	$1-\beta$	Относительно H_2	$1-\beta$	Относительно H_3	$1-\beta$
21	**Крамера — Мизеса — Смирнова**	0,358	Кресси 1	0,314	Купера	0,254
22	**Хегази — Грина T_1**	0,322	**Модификация 2 энтропийного критерия**	0,266	Кресси 2	0,226
23	**Колмогорова**	0,322	Гринвуда — Кэсенберри — Миллера	0,244	Кресси 1	0,218
24	**Хегази — Грина T_2**	0,308	Шварца	0,226	Шварца	0,206
25	**Гринвуда — Кэсенберри — Миллера**	0,290	Кресси 2	0,217	Гринвуда — Кэсенберри — Миллера	0,186
26	**Кимбелла**	0,279	Шермана	0,204	Кимбелла	0,165
27	**Морана 1**	0,279	Кимбелла	0,201	Морана 1	0,165
28	**Гринвуда**	0,279	Морана 1	0,201	Гринвуда	0,165
29	**Шермана**	0,215	Гринвуда	0,201	Шермана	0,154
30	**Кресси 1**	0,187	Морана 2	0,193	Морана 2	0,143
31	**Морана 2**	0,187	Ченга — Спиринга	0,168	Ченга — Спиринга	0,106
32	**Янга**	0,115	Янга	0,108	Янга	0,104

Критерий Ченга — Спиринга, демонстрируя достаточно высокую мощность относительно H_1, показывает низкую мощность относительно H_2 и H_3. Особенно низкая мощность относительно всех трёх рассматриваемых в данной работе гипотез связана с критерием Янга [22], что свидетельствует о крайне неудачной попытке использования соответствующей статистики в критерии проверки гипотезы о равномерности.

На основании исследования свойств множества критериев, применяемых при проверке равномерности, подготовлено руководство по применению [15].

Заключение. Если для проверки гипотезы о принадлежности анализируемой выборки некоторому конкретному закону распределения разработано множество специальных критериев, то среди этого множества, как правило, найдутся критерии, предпочтительность применения которых при ограниченных объёмах выборок связана с заметным преимуществом в мощности, например по сравнению с общими критериями согласия. При проверке равномерности такого преимущества относительно непараметрических критериев согласия не наблюдается: очень неплохо показывают себя критерии Жанга со статистиками Z_A и Z_C и критерий Андерсона — Дарлинга [15].

Из анализа свойств всего множества критериев, которые могут применяться для проверки гипотезы о принадлежности выборки равномерному закону, следует, что корректного использования какого-то одного из критериев для формирования надёжного статистического вывода зачастую может оказаться недостаточно. Для большей объективности статистических выводов предпочтительней воспользоваться некоторым рядом критериев, обладающих определёнными достоинствами. Применение не одного, а совокупности критериев равномерности, опирающихся на различные меры отклонения эмпирического распределения от теоретического, повышает качество статистических выводов.

При анализе результатов измерений может возникнуть вопрос: какого объёма выборок достаточно для корректной проверки гипотезы с использованием применяемого критерия? Конкретно ответить на него можно только в терминах вероятностей ошибок первого и второго рода после уточнения информации о виде конкурирующей гипотезы (конкурирующего закона). Например, в табл. 3 для части рассмотренных в данной работе критериев и конкурирующих гипотез H_1, H_2, H_3 представлены оценки объёмов выборок n, требуемые для того, чтобы при заданной вероятности ошибки первого рода $\alpha = 0{,}1$ вероятность ошибки второго рода также не превысила величину $\beta = 0{,}1$.

Принятие решения о результатах проверки гипотезы H_0 на основании достигнутого уровня значимости всегда более обосновано, чем при сравнении полученного значения статистики с заданным критическим значением, извлекаемым из соответствующей таблицы процентных точек. В последнем случае остаётся неясным, насколько сильно истинное распределение, которому принадлежит анализируемая выборка (и которое всегда остаётся неизвестным), отличается от равномерного закона.

К сожалению, распределения большинства специальных критериев проверки равномерности существенно зависят от объёмов выборок, поэтому приходится опираться на таблицы процентных точек. Аналогичная проблема возникает с применением непараметрических критериев согласия Жанга со статистиками Z_A, Z_C, Z_K, распределения которых зависят от n.

Каким же образом можно повысить качество статистических выводов? Это можно сделать, используя компьютерные технологии анализа данных и исследуя неизвестные распределения статистик применяемых критериев (при данном объёме выборки n) в реальном времени проверки гипотезы (в интерактивном режиме) [1, 16, 17, 36]. Например, в интерактивном режиме можно исследовать неизвестное распределение статистики любого критерия равномерности, зависящее от объёма выборки, при том значении n, которое соответствует анализируемой выборке, и оценить по найденному в результате моделирования эмпирическому распределению статистики достигнутый уровень значимости.

Таблица 3

Минимальные объёмы выборок n, требуемые для различения гипотез H_0 и H_i с заданными вероятностями ошибок первого и второго рода $\alpha = 0{,}1$ и $\beta = 0{,}1$

№ п/п	Критерий	n		
		от H_1	от H_2	от H_3
1	Андерсона — Дарлинга	200	210	295
2	Крамера — Мизеса — Смирнова	274	245	315
3	Жанга Z_C	127	240	353
4	Жанга Z_A	120	253	355
5	Жанга Z_K	180	250	390
6	Ватсона	145	455	730
7	Купера	156	410	595
8	Колмогорова	335	275	370
9	χ^2 Пирсона	210	335	435
10	Неймана — Бартона N_2	122	235	350
11	Дудевича — ван дер Мюлена	150	485	805
12	Хегази — Грина T_1	277	235	300
13	Фросини	264	240	300
14	Пардо	280	375	830
15	Шварца	300	2600	4000
16	Шермана, Кимбелла, Морана 2	617	4350	6950

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Лемешко Б. Ю.** Непараметрические критерии согласия: Руководство по применению. М.: ИНФРА-М, 2014. 163 с. DOI: 10.12737/11873.
2. **Kolmogoroff A. N.** Sulla determinazione empirica di una legge di distribuzione // G. Ist. Ital. attuar. 1933. **4**, N 1. P. 83–91.
3. **Большев Л. Н., Смирнов Н. В.** Таблицы математической статистики. М.: Наука, 1983. 416 с.
4. **Kuiper N. H.** Tests concerning random points on a circle // Proc. Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen. Ser. A. 1960. Vol. 63. P. 38–47.
5. **Stephens M. A.** Use of Kolmogorov — Smirnov, Cramer — von Mises and related statistics — without extensive table // Journ. Royal. Stat. Soc. 1970. Ser. B. **32**, N 1. P. 115–122.
6. **Stephens M. A.** EDF statistics for goodness of fit and some comparisons // Journ. Amer. Stat. Assoc. 1974. **69**, N 347. P. 730–737.
7. **Лемешко Б. Ю., Горбунова А. А.** О применении и мощности непараметрических критериев согласия Купера, Ватсона и Жанга // Измерительная техника. 2013. № 5. С. 3–9. **Lemeshko B. Yu. Gorbunova A. A.** Application and power of the nonparametric Kuiper, Watson, and Zhang tests of goodness-of-fit // Measur. Techn. 2013. **56**, N 5. P. 465–475.
8. **Watson G. S.** Goodness-of-fit tests on a circle. I // Biometrika. 1961. **48**, N 1–2. P. 109–114.
9. **Watson G. S.** Goodness-of-fit tests on a circle. II // Biometrika. 1962. **49**, N 1–2. P. 57–63.
10. **Anderson T. W., Darling D. A.** Asymptotic theory of certain "Goodness of fit" criteria based on stochastic processes // Ann. Math. Stat. 1952. **23**, N 2. P. 193–212.
11. **Anderson T. W., Darling D. A.** A test of goodness of fit // Journ. Amer. Stat. Assoc. 1954. **49**, N 268. P. 765–769.
12. **Zhang J.** Powerful goodness-of-fit and multi-sample tests: PhD Thesis. Toronto: York University, 2001. URL: http://www.collectionscanada.gc.ca/obj/s4/f2/dsk3/ftp05/NQ66371.pdf (дата обращения 26.01.2016).
13. **Лемешко Б. Ю., Чимитова Е. В.** Максимизация мощности критериев типа χ^2 // Докл. СО АН ВШ. 2000. № 2. С. 53–61.
14. **Лемешко Б. Ю., Лемешко С. Б., Постовалов С. Н., Чимитова Е. В.** Статистический анализ данных, моделирование и исследование вероятностных закономерностей. Компьютерный подход. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2011. 888 с.
15. **Лемешко Б. Ю., Блинов П. Ю.** Критерии проверки отклонения распределения от равномерного закона: Руководство по применению. М.: ИНФРА-М, 2016. 182 с. DOI: 10.12737/11304.
16. **Лемешко Б. Ю.** Критерии проверки отклонения распределения от нормального закона: Руководство по применению. М.: ИНФРА-М, 2015. 160 с. DOI: 10.12737/6086.
17. **Sherman B.** A random variable related to the spacing of sample values // Ann. Math. Stat. 1950. **21**, N 3. P. 339–361.
18. **Sherman B.** Percentiles of the statistic // Ann. Math. Stat. 1957. **28**, N 1. P. 257–261.
19. **Kimball B. F.** Some basic theorems for developing tests of fit for the case of the non-parametric probability distribution function // Ann. Math. Stat. 1947. **18**, N 1. P. 540–548.
20. **Moran P. A. P.** The random division of an intervals // Journ. Royal. Stat. Soc. 1947. Ser. B. **9**, N 1. P. 92–98.
21. **Moran P. A. P.** The random division of an intervals. II // Journ. Royal. Stat. Soc. 1951. Ser. B. **13**, N 2. P. 147–150.
22. **Young D. L.** The linear nearest neighbour statistic // Biometrika. 1982. **69**, N 2. P. 477–480.

23. **Cressie N.** An optimal statistic based on higher order gaps // Biometrika. 1979. **66**, N 3. P. 619–627.
24. **Pardo M. C.** A test for uniformity based on informational energy // Statist. Papers. 2003. **44**, N 4. P. 521–534.
25. **Swartz T.** Goodness-of-fit tests using Kullback — Leibler information // Communs Statist. Theory and Methods. 1992. **21**, N 3. P. 711–729.
26. **Hegazy Y. A., Green J. R. S.** Some new goodness-of-fit tests using order statistics // Appl. Statist. 1975. **24**, N 3. P. 299–308.
27. **Frosini B. V.** On the distribution and power of goodness-of-fit statistic with parametric and non-parametric applications // Goodness-of-fit /Eds. P. Revesz, K. Sarkadi, P. K. Sen. Amsterdam — Oxford — New York: North-Holland Publ. Comp., 1987. P. 133–154.
28. **Cheng S. W., Spiring F. A.** A test to identify the uniform distribution, with applications to probability plotting and other distributions // IEEE Trans. Reliability. 1987. **R-36**, N 1. P. 98–105.
29. **Greenwood M.** The statistical study of infection disease // Journ. Royal. Stat. Soc. 1946. Ser. A. **109**, N 2. P. 85–110.
30. **Quesenberry C. P., Miller F. L.** Power studies of some tests for uniformity // Journ. Statist. Computat. and Simulat. 1977. **5**, N 3. P. 169–191.
31. **Neyman J.** "Smooth" tests for goodness-of-fit // Scandinavisk Aktuarietidskrift. 1937. **20**, N 3–4. P. 149–199.
32. **Dudewics E. J., van der Meulen E. C.** Entropy-based test of uniformity // Journ. Amer. Stat. Assoc. 1981. **76**, N 376. P. 967–974.
33. **Zamanzade E.** Testing uniformity based on new entropy estimators // Journ. Statist. Computat. and Simulat. 2014. **82**, N 11. P. 1701–1713. DOI: 10.1080/00949655.2014.958085.
34. **Blinov P. Yu., Lemeshko B. Yu.** A review of the properties of tests for uniformity // Proc. of the 12th Iintern. Conf. Actual Problems of Electronics Instrument Engineering (APEIE). Novosibirsk: NSTU Publisher, 2014. Vol. 1. P. 540–547.
35. **Блинов П. Ю., Лемешко Б. Ю.** О мощности критериев, используемых для проверки гипотез о принадлежности выборок равномерному закону // Матер. Росс. науч.-техн. конф. «Обработка информационных сигналов и математическое моделирование». Новосибирск: СибГУТИ, 2013. С. 35–38.
36. **Лемешко Б. Ю., Горбунова А. А., Лемешко С. Б., Рогожников А. П.** О решении проблем применения некоторых непараметрических критериев согласия // Автометрия. 2014. **50**, № 1. С. 26–43.

    Lemeshko B. Yu., Gorbunova A. A., Lemeshko S. B., Rogozhnikov A. P. Solving problems of using some nonparametric goodness-of-fit tests // Optoelectron., Instrum. and Data Process. 2014. **50**, N 1. P. 21–35.

Поступила в редакцию 7 апреля 2015 г.