Приложение IV

Б. Ю. Лемешко

Построение вероятностной модели, описывающей ГТП ОПФ

Настоящее приложение содержит анализ данных, по которым в тексте построены графики 3.100 и 3.116 (США. 1981–2003. Распределение ГТП составляющих ОПФ по вероятности).

Исходные данные для построения вероятностной модели ГТП ОПФ представляют собой результат сжатия первичной информации. Каждому значению случайной величины ГТП ОПФ соответствует определенное значение ОПФ, обладающее таким «средним» значением ГТП. То есть каждой единице измерения (каждому $) из ОПФ данной строки поставлена в соответствие величина ГТП ОПФ из этой строки (такое среднее значение ГТП). Можно считать, что это значение ГТП определяет собой середину интервала значений (среднее значение ГТП) для соответствующей величины ОПФ.

По существу мы имеем то, что в математической статистике называют *группированной* выборкой [1, 2]. Только вместо интервалов значений случайной величины имеются некоторые «средние» значения интервалов, граничные значения которых ***неизвестны***. В математической статистике выборку наблюдений случайной величины называют группированной, если интервалы не пересекаются. В данном случае по смыслу имеющихся статистических данных можно предполагать, что интервалы могут и пересекаться. В математической статистике такой ситуации соответствует понятие *интервальной* выборки. Однако, для того чтобы оценивать параметры предполагаемого закона по интервальным данным, значения границ интервалов также должны быть известны [3, 4].

Положительным моментом является большой суммарный объем ОПФ, по которому была собрана настоящая статистика (с позиций математической статистики – очень большой объем выборки). Поэтому рассматриваем ли мы имеющиеся данные как группированную выборку или как интервальную – на точности построенной модели это практически не отразится.

Оценивание параметров различных законов распределения по группированным данным представляет собой не совсем тривиальную задачу и может решаться только численными методами. Например, оценки максимального правдоподобия (ОМП) по группированным данным для любого закона, как правило, могут находиться только в результате численного решения системы уравнений правдоподобия (за исключением тривиальных случаев) [2, 5]. Однако это не настолько серьезная проблема, особенно при наличии соответствующего программного обеспечения. В то же время ОМП по группированным данным обладают хорошими робастными свойствами [6].

Одновременно следует отметить наличие негативных моментов, которые не позволяют твердо опереться на методы статистического анализа при построении модели закона распределения для ГТП ОПФ. И дело не только в том, что, например, непараметрические критерии согласия затруднительно использовать в случае проверки сложных гипотез вследствие возможной неизвестности распределений статистик критериев [7–9] или проблематичности применения этих критериев для группированных данных. Можно воспользоваться критериями типа χ^2 [10]. Проблема заключается в (очень) большом «объеме выборки» и в (противовес) ограниченной точности представления наблюдений: в такой ситуации любой разумно построенный критерий согласия в силу высокой мощности всегда будет отклонять гипотезу об адекватности наблюденных данных построенной модели закона распределения вероятностей (будет отклоняться даже истинный закон). По существу, чуть ли не единственной возможностью, обеспечивающей рациональный выбор теоретического закона из множества построенных моделей, наилучшим образом описывающего эмпирическую закономерность, оказывается визуальный контроль близости теоретического и эмпирического законов.

Как было сказано выше, в представлении группированных данных ГТП ОПФ есть особенность: границы интервалов группирования не заданы. Но они должны быть заданы для того, чтобы можно было искать оценки параметров законов, для построения гистограммы или эмпирической функции распределения. С выбором граничных точек интервалов связан определенный волюнтаризм. То, как будут выбраны граничные точки, отражается на форме строящейся гистограммы, на виде эмпирической функции распределения (по группированным данным), приводит к смещению оценок параметров закона (к возможным изменениям «сдвига» и «масштаба» найденного теоретического закона распределения от истинного закона).

Изначально группированная выборка ГТП ОПФ содержит число интервалов, равное 138.

Кажется, что задача становится проще, если уменьшить число интервалов, например, разбив область изменения ГТП ОПФ на 1% интервалы равной длины и соответствующим образом преобразовав выборку. Однако такое повторное группирование (сжатие) приводит, во-первых, к потере информации о предполагаемом законе (основная масса наблюдений попадает в 3 интервала). Во-вторых, вносит свою лепту (при таких больших объемах величин, попадающих в конкретные интервалы) в смещение эмпирического распределения (увеличивая или уменьшая первоначальное смещение эмпирического распределения, связанное с первоначальной группировкой, в результате которой получены исходные данные).

В связи с этим статистический анализ в настоящем приложении проводился по исходным данным с первоначальным количеством интервалов 138. При этом в качестве граничных точек интервалов брались значения, равные середине между соседними значениями ГТП ОПФ.

На рисунке 1 в качестве примера, демонстрирующего появление смещения, связанного с повторным группированием, представлена эмпирическая функция распределения ГТП ОПФ по группированным данным (138 интервалов) и функция распределения нормального закона, построенного с использованием оценок, полученных по методу наименьших квадратов (МНК) по преобразованной выборке с 1% интервалами с границами интервалов, совпадающими с целыми значениями. Эмпирическая функция распределения, построенная по группированной выборке, в каждой точке оси абсцисс задается интервалом. Это отражено на приводимых рисунках.

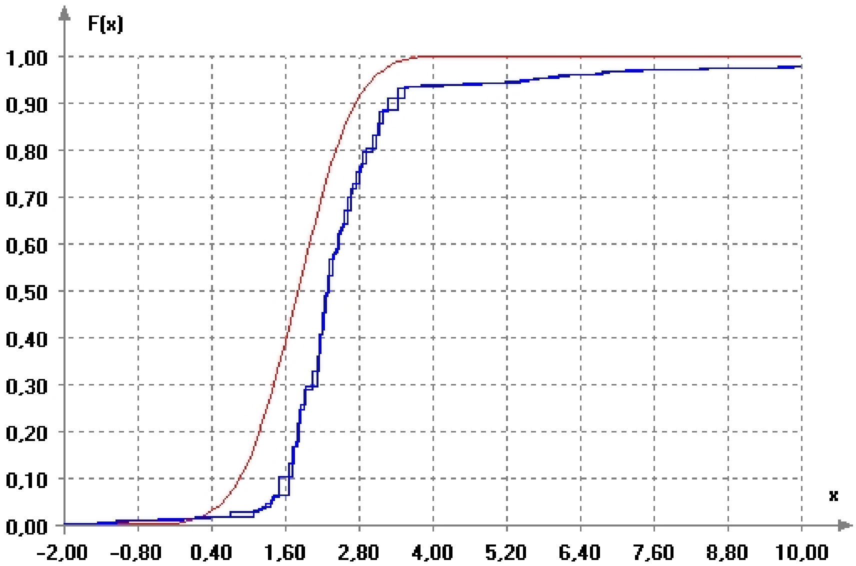

Рис. 1. Эмпирическая функция распределения ГТП ОПФ США, построенная по полной выборке, и функция распределения нормального закона с оценками параметров $\tilde{\mu} = 1.818$, $\tilde{\sigma} = 0.756$

Плотность нормального закона имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

где параметр сдвига $\mu = E[x]$ представляет собой математическое ожидание, а параметр масштаба $\sigma = \sqrt{D[x]}$ – стандартное отклонение. Оценки МНК $\tilde{\mu} = 1.818$, $\tilde{\sigma} = 0.756$. Как видим из рисунка, полученное нормальное распределение смещено влево от эмпирического, что в существенной степени является следствием проведенного «повторного» группирования. Очевидно, что использование данного нормального распределения в качестве закона, описывающего ГТП ОПФ, будет приводить к далеким от истины результатам.

Рисунок 2 иллюстрирует функцию плотности данного нормального закона и гистограмму, построенную по полной исходной выборке (138 интервалов).

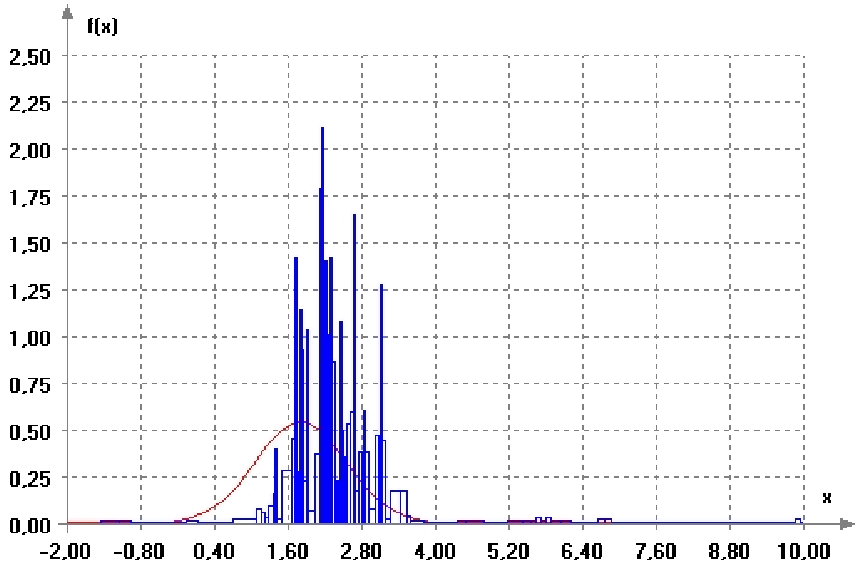

Рис. 2. Гистограмма, построенная по полной выборке ГТП ОПФ США, и функция плотности нормального закона с оценками параметров $\tilde{\mu} = 1.818$, $\tilde{\sigma} = 0.756$

Очевидно, что как бы мы ни пытались описать эту выборку нормальным законом, в том числе, используя МНК-оценки параметров, чтобы лучше «приблизить плотность нормального закона к гистограмме», ничего хорошего не получится. Пытаясь подобрать модель закона для наблюдаемых случайных величин, мы всегда предполагаем возможность использования в дальнейшем этой модели для вычисления вероятностей различных событий. Если модель неадекватно описывает наблюдаемую закономерность, практической пользы от нее будет мало.

При вычислении по полной группированной выборке (138 интервалов) ОМП параметров нормального закона, не смотря на то, что ОМП по группированным данным являются робастными [6], удовлетворительных результатов не получается: $\hat{\mu} = 2.776$, $\hat{\sigma} = 2.567$ (см. рис. 3–4). «Тяжелые» хвосты эмпирического распределения приводят к завышенным оценкам параметра масштаба σ.

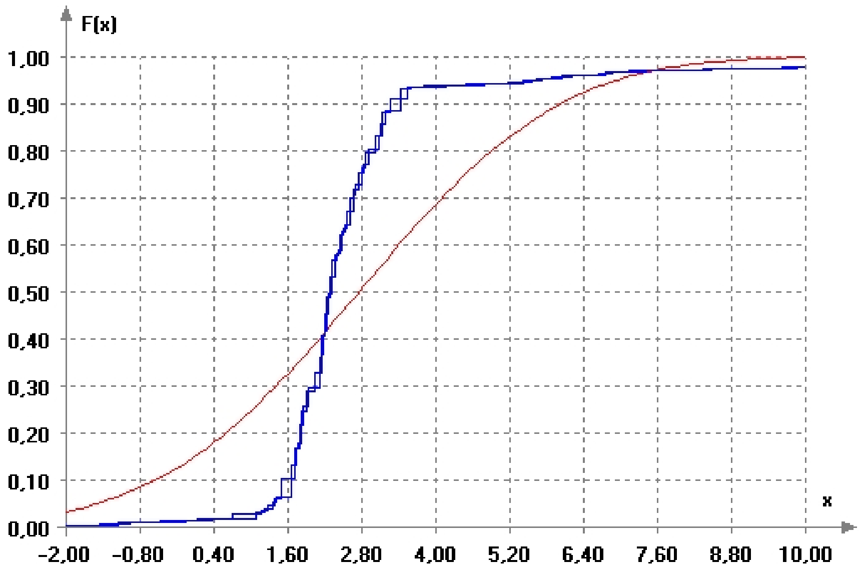

Рис. 3. Эмпирическая функция распределения ГТП ОПФ США по полной группированной выборке, и функция распределения нормального закона с параметрами $\hat{\mu} = 2.776$, $\hat{\sigma} = 2.567$

Очевидно, что использование нормального распределения с такими параметрами для описания наблюдаемого закона положительного эффекта не даст.

А вид эмпирического распределения и соответствующей гистограммы позволяет утверждать, что невозможно подобрать некоторую параметрическую модель закона (из множества, используемых на практике в различных приложениях), которая могла бы достаточно адекватно описать наблюдаемый закон.

Если проанализировать столбец ОПФ США, по которому строились ГТП ОПФ, то можно обратить внимание на то, что по абсолютной величине ОПФ естественным образом делятся на 3 части (см. рис. 5). Резонно, предположить, что ГТП ОПФ, соответствующие резко отличающимся по величине объемам ОПФ, могут описываться различными вероятностными закономерностями.

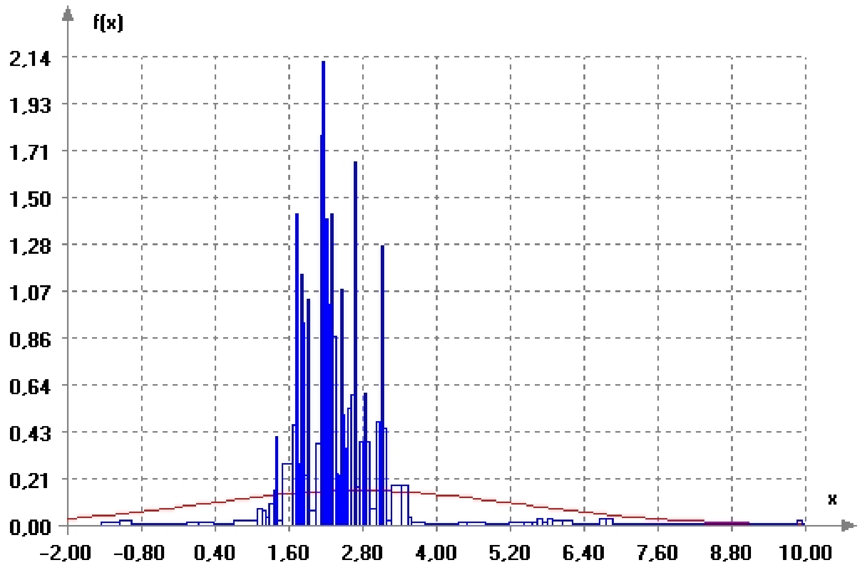

Рис. 4. Гистограмма по полной выборке ГТП ОПФ США и функция плотности нормального закона с параметрами $\hat{\mu} = 2.776$, $\hat{\sigma} = 2.567$

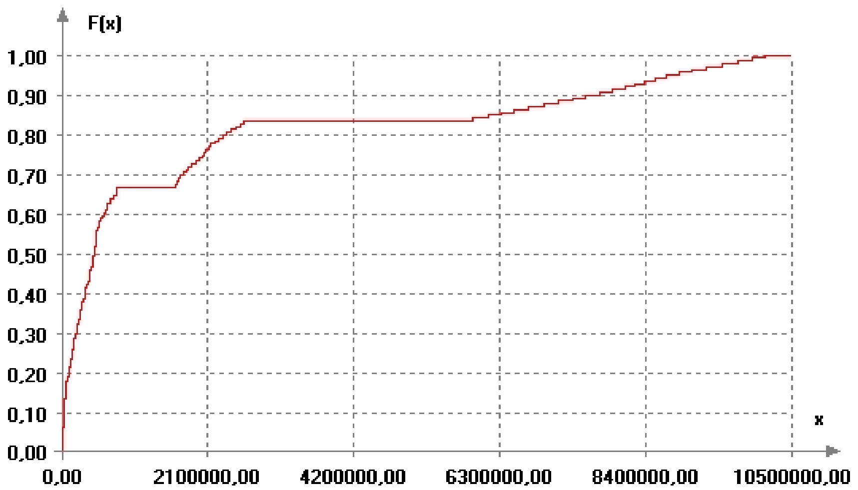

Рис. 5. Эмпирическая функция распределения ОПФ США

Если отсортировать выборку ГТП ОПФ по возрастанию ОПФ и разбить ее на 3 части, соответствующие 3-м частям ОПФ, то получим 3 выборки ГТП ОПФ: (А) с 92 интервалами (соответствует

ОПФ от 6698 до 796207, Таблица 1); (Б) с 23 интервалами (с ОПФ от 1625363 до 2611405, Таблица 2); (В) с 23 интервалами (с ОПФ от 5922893 до 10118630, Таблица 3).

Таблица 1

Выборка ГТП ОПФ (А)

ГТП ОПФ	ОПФ	ГТП ОПФ	ОПФ	ГТП ОПФ	ОПФ	ГТП ОПФ	ОПФ
-1,62	454005	5,31	694861	9,82	139138	17,60	53922
-1,23	787763	5,54	527395	9,91	595232	17,71	24565
-1,06	796207	5,59	321392	10,02	152796	17,84	34353
-0,84	457867	5,72	589410	10,09	425930	17,91	286001
-0,09	446648	5,75	255297	10,82	135664	18,28	191421
-0,03	499776	5,89	556605	10,91	34026	18,62	271135
0,33	498124	5,90	623148	11,82	30430	18,80	28915
0,42	499636	6,21	654245	12,01	44555	19,04	22481
1,21	786688	6,23	240330	12,07	124153	19,75	226411
1,24	492046	6,65	225347	12,27	468923	20,03	76605
1,44	501728	6,69	659901	13,06	526473	20,17	394202
1,76	483528	6,85	704023	13,71	26762	20,80	63415
2,19	446252	6,91	339367	13,87	168107	21,11	66785
2,69	470839	7,37	366670	14,01	321610	24,51	229709
3,10	393696	7,48	209665	14,58	49906	24,80	8424
3,25	456025	7,88	362810	15,01	107953	25,77	6698
3,58	405905	8,30	193603	15,09	46851	25,90	17857
3,63	508942	8,42	178573	15,73	40482	25,92	80882
4,02	295897	8,54	164521	16,75	21042	29,46	10513
4,33	283604	8,61	37740	16,79	57183	29,93	101851
4,42	307785	8,69	40991	16,89	337233	30,98	175378
4,58	752221	8,82	391416	16,91	17998	31,20	13610
5,05	269976	9,43	150343	17,40	91953	32,53	132334

Таблица 2

Выборка ГТП ОПФ (Б)

ГТП ОПФ	ОПФ	ГТП ОПФ	ОПФ	ГТП ОПФ	ОПФ	ГТП ОПФ	ОПФ
1,03	2056808	1,90	2107473	2,42	1625363	2,69	1874470
1,14	1687888	1,97	1707083	2,44	1829752	2,70	2445953
1,33	2029743	2,15	2511872	2,50	2196896	2,84	2312295
1,40	1664623	2,21	2611405	2,52	1784831	2,86	2378013
1,41	2078084	2,30	2147547	2,54	1740637	2,99	1924902
1,77	2565986	2,39	1982387	2,69	2251809		

Таблица 3

Выборка ГТП ОПФ (В)

ГТП ОПФ	ОПФ	ГТП ОПФ	ОПФ	ГТП ОПФ	ОПФ	ГТП ОПФ	ОПФ
1,59	10118630	2,12	8698801	2,35	9500366	3,07	6934027
1,72	8248818	2,15	7929657	2,48	7737557	3,13	6132617
1,73	8390347	2,19	9723495	2,59	7542206	3,14	6506530
1,83	9936427	2,23	8883203	2,65	7347547	3,33	6710717
1,84	8099998	2,26	9081119	2,80	7147233	3,54	5922893
1,91	8535835	2,30	9286448	2,87	6324829		

Законы распределения ГТП ОПФ, соответствующие этим 3-м выборкам, резко отличаются, и им соответствуют различные области определения (см. рис. 6).

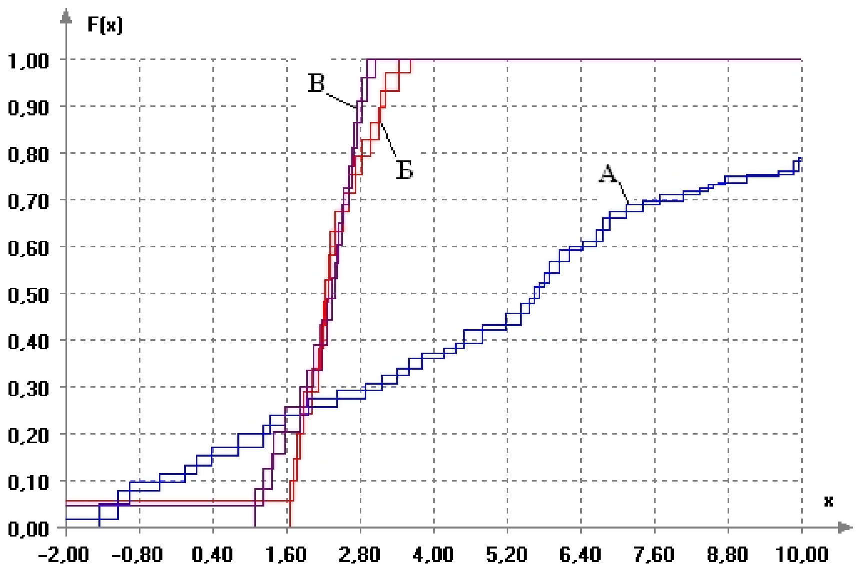

Рис. 6. Эмпирические распределения ГТП ОПФ, соответствующие 3-м частям

Проанализируем полученные выборки, подбирая для них теоретические распределения вероятностей, а затем построим для полной выборки модель в виде смеси теоретических законов.

Для первой выборки (А) в случае использования для описания нормального закона, с полученными ОМП параметров $\hat{\mu} = 4.833$, $\hat{\sigma} = 6.602$, будем иметь картину, представленную на рисунках 7–8.

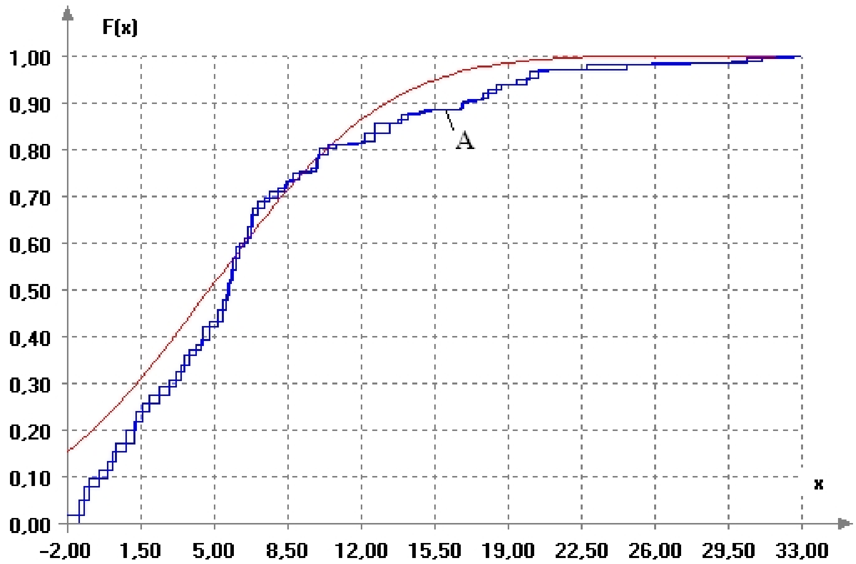

Рис. 7. Эмпирическая функция распределения ГТП ОПФ [(А) для ОПФ от 6698 до 796207] и функция распределения нормального закона с параметрами $\hat{\mu} = 4.833$, $\hat{\sigma} = 6.602$

Как можно судить по рисунку 7, данный нормальный закон является достаточно плохим приближением эмпирического. Для этой же выборки в случае использования для описания наблюдаемой закономерности распределения Su-Джонсона с плотностью

$$f(x) = \frac{\theta_1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{(x-\theta_3)^2 + \theta_2^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\theta_0 + \theta_1 \ln\left\{\frac{x-\theta_3}{\theta_2} + \sqrt{\left(\frac{x-\theta_3}{\theta_2}\right)^2 + 1}\right\}\right]^2\right\}$$

и с ОМП параметров $\hat{\theta}_0 = -1.891$, $\hat{\theta}_1 = 1.561$, $\hat{\theta}_2 = 4.555$, $\hat{\theta}_3 = -1.677$ будем иметь несколько лучшую картину, представленную на рисунках 9–10.

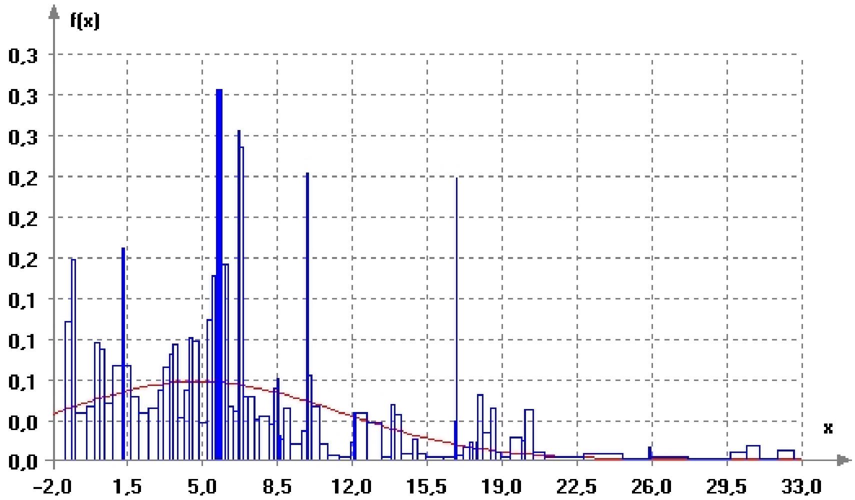

Рис. 8. Гистограмма ГТП ОПФ [(A) для ОПФ от 6698 до 796207] и функция плотности нормального закона с параметрами $\hat{\mu} = 4.833$, $\hat{\sigma} = 6.602$

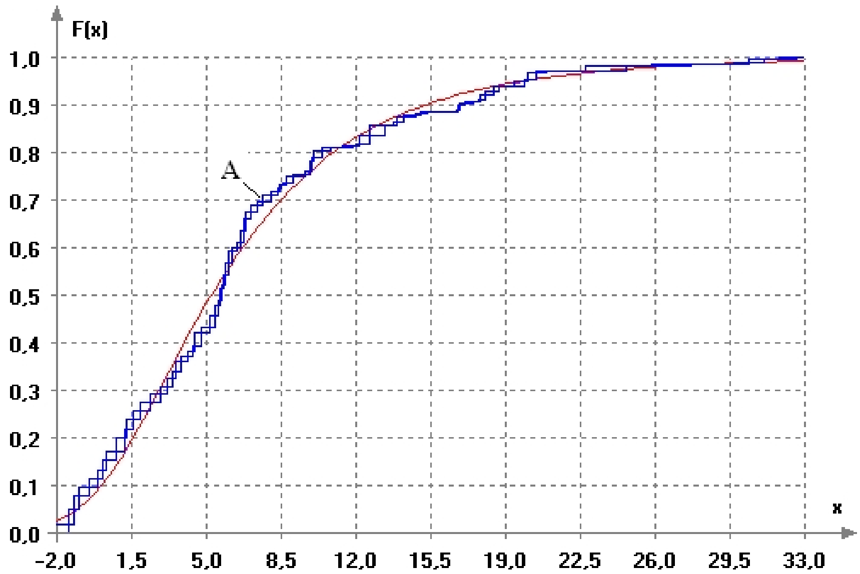

Рис. 9. Эмпирическая функция распределения ГТП ОПФ [(A) для ОПФ от 6698 до 796207] и функция распределения Su-Джонсона с параметрами $\hat{\theta}_0 = -1.891$, $\hat{\theta}_1 = 1.561$, $\hat{\theta}_2 = 4.555$, $\hat{\theta}_3 = -1.677$

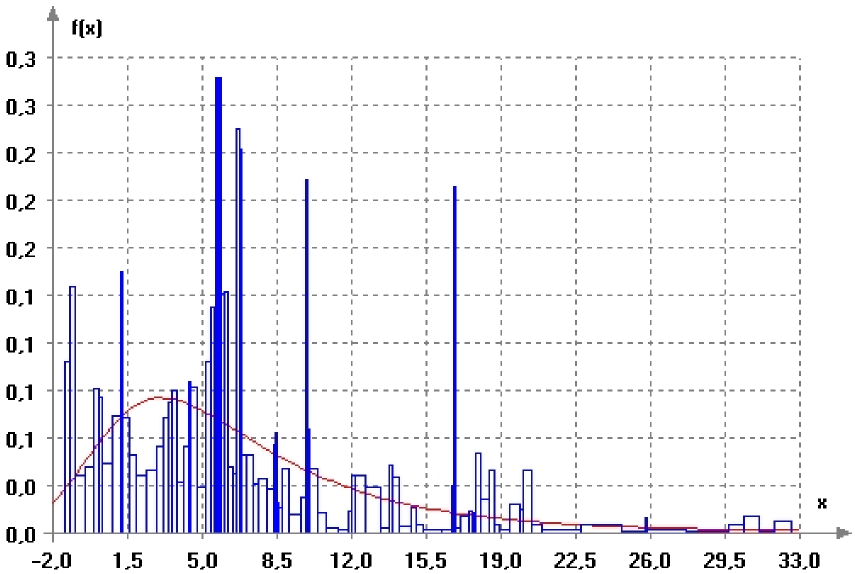

Рис. 10. Гистограмма ГТП ОПФ [(А) для ОПФ от 6698 до 796207] и функция плотности распределения Su-Джонсона с параметрами $\hat{\theta}_0 = -1.891$, $\hat{\theta}_1 = 1.561$, $\hat{\theta}_2 = 4.555$, $\hat{\theta}_3 = -1.677$

Для 2-й выборки ГТП ОПФ [(Б) с ОПФ от 1625363 до 2611405] в случае использования модели нормального закона с ОМП параметров $\hat{\mu} = 2.189$, $\hat{\sigma} = 0.578$ имеем картину, представленную на рис. 11–12.

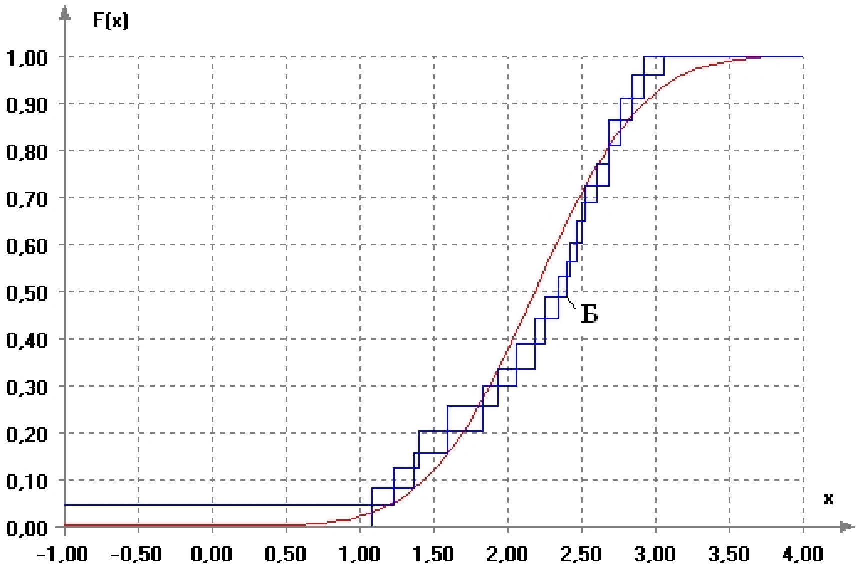

Рис. 11. Эмпирическая функция распределения ГТП ОПФ [(Б) с ОПФ от 1625363 до 2611405] и функция распределения нормального закона с параметрами $\hat{\mu} = 2.189$, $\hat{\sigma} = 0.578$

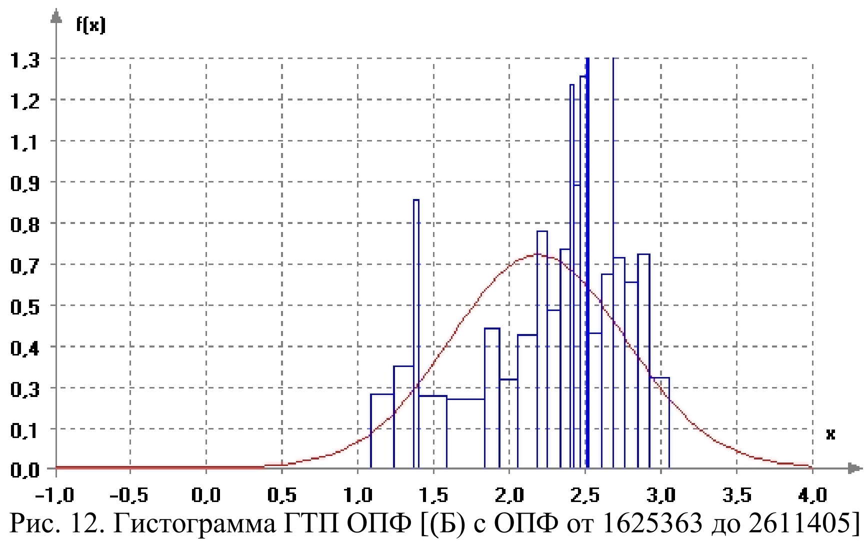

Рис. 12. Гистограмма ГТП ОПФ [(Б) с ОПФ от 1625363 до 2611405] и функция плотности нормального закона с параметрами $\hat{\mu} = 2.189$, $\hat{\sigma} = 0.578$

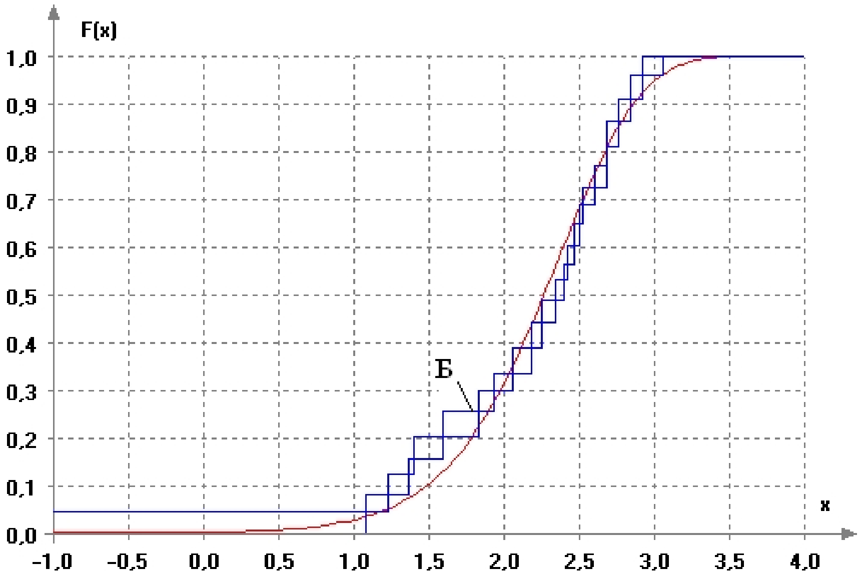

Рис. 13. Эмпирическая функция распределения ГТП ОПФ [(Б) с ОПФ от 1625363 до 2611405] и функция распределения Su-Джонсона с параметрами $\hat{\theta}_0 = 2.899$, $\hat{\theta}_1 = 3.372$, $\hat{\theta}_2 = 1.265$, $\hat{\theta}_3 = 3.497$

Для 2-й же выборки ГТП ОПФ [(Б) с ОПФ от 1625363 до 2611405] в случае использования для описания распределения Su-Джонсона с ОМП параметров $\hat{\theta}_0 = 2.899$, $\hat{\theta}_1 = 3.372$, $\hat{\theta}_2 = 1.265$, $\hat{\theta}_3 = 3.497$ имеем несколько лучшую картину, представленную на рис. 13–14.

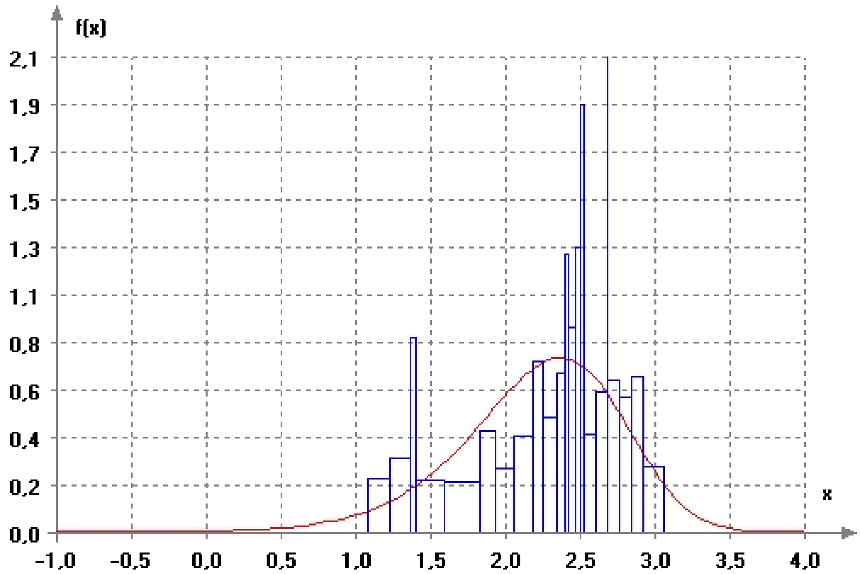

Рис. 14. Гистограмма ГТП ОПФ [(Б) с ОПФ от 1625363 до 2611405] и функция плотности распределения Su-Джонсона с параметрами $\hat{\theta}_0 = 2.899$, $\hat{\theta}_1 = 3.372$, $\hat{\theta}_2 = 1.265$, $\hat{\theta}_3 = 3.497$

Для 3-й выборки ГТП ОПФ [(В) с ОПФ от 5922893 до 10118630] в случае использования модели нормального закона с ОМП параметров $\hat{\mu} = 2.348$, $\hat{\sigma} = 0.545$ имеем картину, представленную на рис. 15–16.

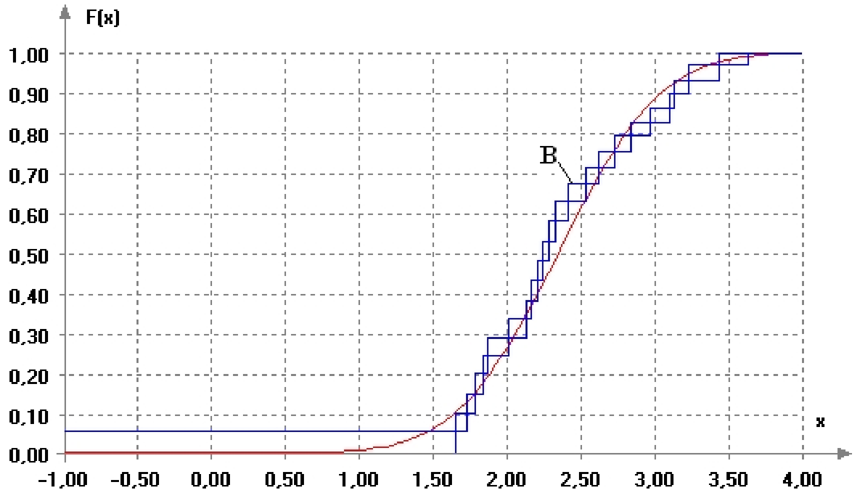

Рис. 15. Эмпирическая функция распределения ГТП ОПФ [(В) с ОПФ от 5922893 до 10118630] и функция распределения нормального закона с параметрами $\hat{\mu} = 2.348$, $\hat{\sigma} = 0.545$

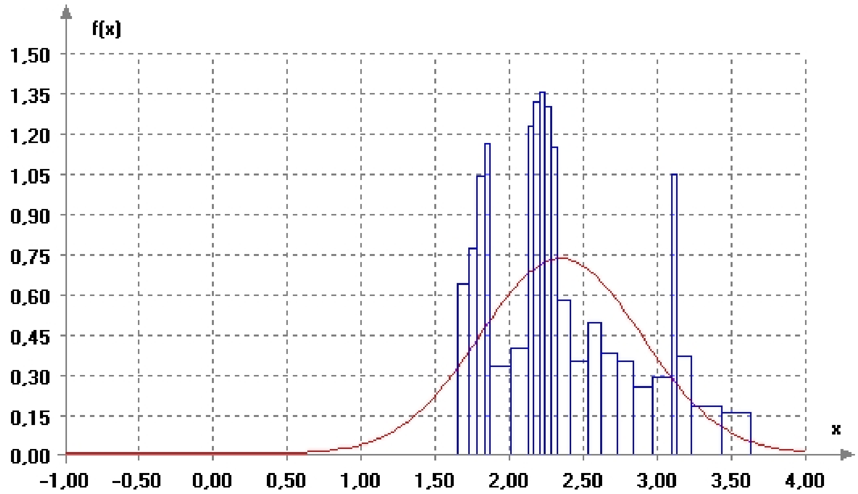

Рис. 16. Гистограмма ГТП ОПФ [(В) с ОПФ от 5922893 до 10118630] и функция плотности нормального закона с параметрами $\hat{\mu} = 2.348$, $\hat{\sigma} = 0.545$

В случае использования для 3-й выборки ГТП ОПФ [(B) с ОПФ от 5922893 до 10118630] модели обобщенного логистического закона с плотностью

$$f(x) = \frac{1}{B(\theta_0,\theta_1)} \frac{e^{\theta_0 (x-\theta_3)/\theta_2}}{\left(1+e^{(x-\theta_3)/\theta_2}\right)^{\theta_0+\theta_1}}$$

и с ОМП параметров $\hat{\theta}_0 = 2.893$, $\hat{\theta}_1 = 0.835$, $\hat{\theta}_2 = 0.352$, $\hat{\theta}_3 = 1.730$ имеем несколько лучшую картину, представленную на рис. 17–18.

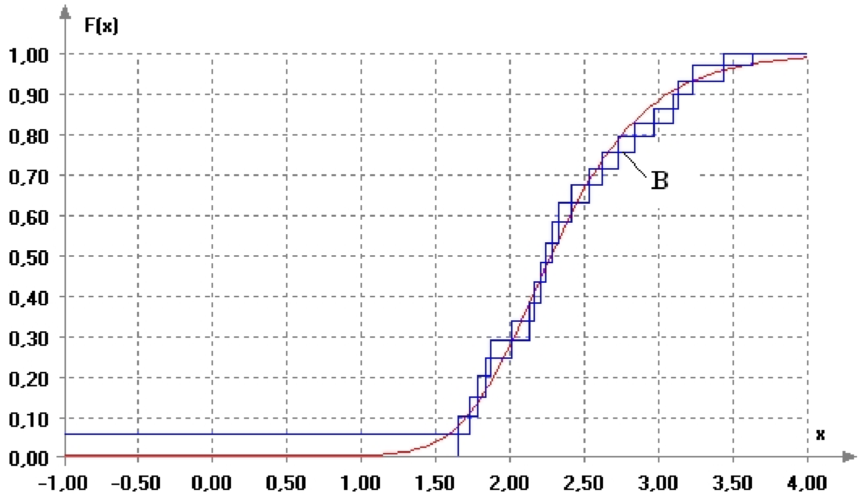

Рис. 17. Эмпирическая функция распределения ГТП ОПФ [(B) с ОПФ от 5922893 до 10118630] и функция распределения обобщенного логистического закона с параметрами $\hat{\theta}_0 = 2.893$, $\hat{\theta}_1 = 0.835$, $\hat{\theta}_2 = 0.352$, $\hat{\theta}_3 = 1.730$

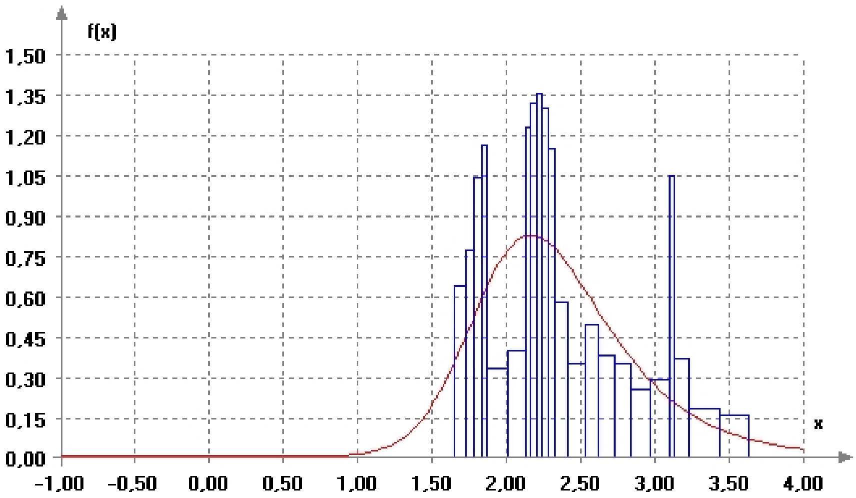

Рис. 18. Гистограмма ГТП ОПФ [(B) с ОПФ от 5922893 до 10118630] и функция плотности обобщенного логистического закона с параметрами $\hat{\theta}_0 = 2.893$, $\hat{\theta}_1 = 0.835$, $\hat{\theta}_2 = 0.352$, $\hat{\theta}_3 = 1.730$

Основной вклад (по объему ОПФ) *в распределение ГТП ОПФ вносит 3-я выборка*. Например, на рис. 19 и 20 иллюстрируется как модель нормального закона, полученного по 3-й выборке (B), с параметрами $\hat{\mu} = 2.348$, $\hat{\sigma} = 0.545$ описывает полную выборку ГТП ОПФ. Однако на хвостах это нормальное распределение полную выборку описывает **плохо** (см. рис. 19). Конечно, можно считать, что высокие ГТП ОПФ являются «аномальными» наблюдениями (с позиций нормального закона). Однако больше оснований полагать, что различным размерам ОПФ соответствуют различные законы распределения ГТП ОПФ.

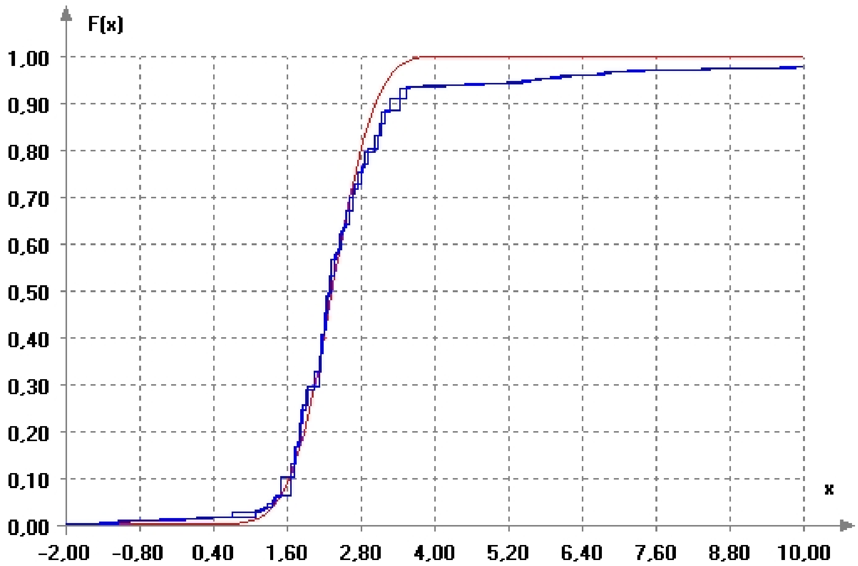

Рис. 19. Эмпирическая функция распределения ГТП ОПФ (полной выборки) и функция распределения нормального закона с параметрами $\hat{\mu} = 2.348$, $\hat{\sigma} = 0.545$

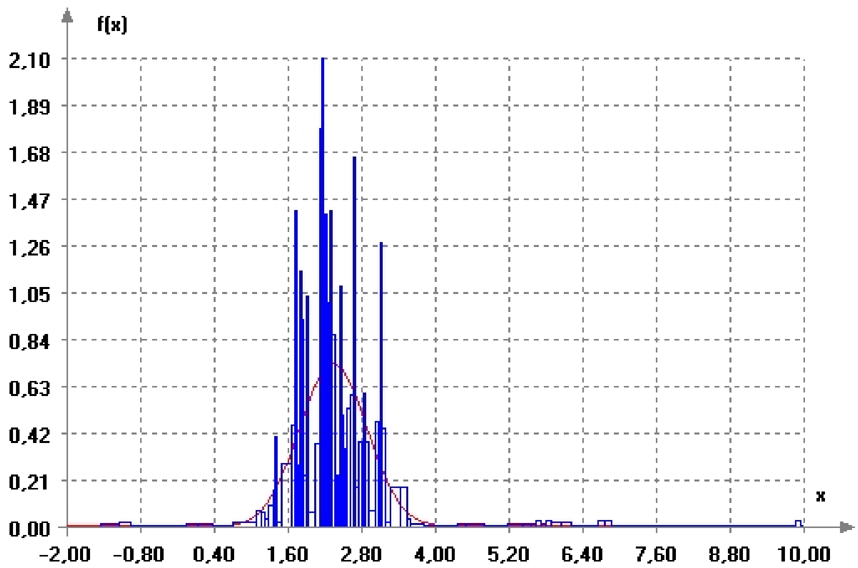

Рис. 20. Гистограмма ГТП ОПФ (полной выборки) и функция плотности нормального закона с параметрами $\hat{\mu} = 2.348$, $\hat{\sigma} = 0.545$

Полную выборку ГТП ОПФ можно естественно пытаться **описать смесью** законов распределения, описывающих составляющие выборки, с весами, пропорциональными объемам трех выборок, с плотностью

$$f(x) = 0.1016 f_1(x) + 0.1838 f_2(x) + 0.7146 f_3(x) \; ,$$

где $f_1(x)$ - плотность распределения, описывающая выборку (А); $f_2(x)$ - выборку Б; $f_3(x)$ - выборку В.

В случае использования смеси соответствующих нормальных законов (с параметрами $\hat{\mu} = 4.833$, $\hat{\sigma} = 6.602$ для выборки А; с параметрами $\hat{\mu} = 2.189$, $\hat{\sigma} = 0.578$ для выборки Б; с параметрами $\hat{\mu} = 2.348$, $\hat{\sigma} = 0.545$ для выборки В) имеем картину, представленную на рисунках 21-22.

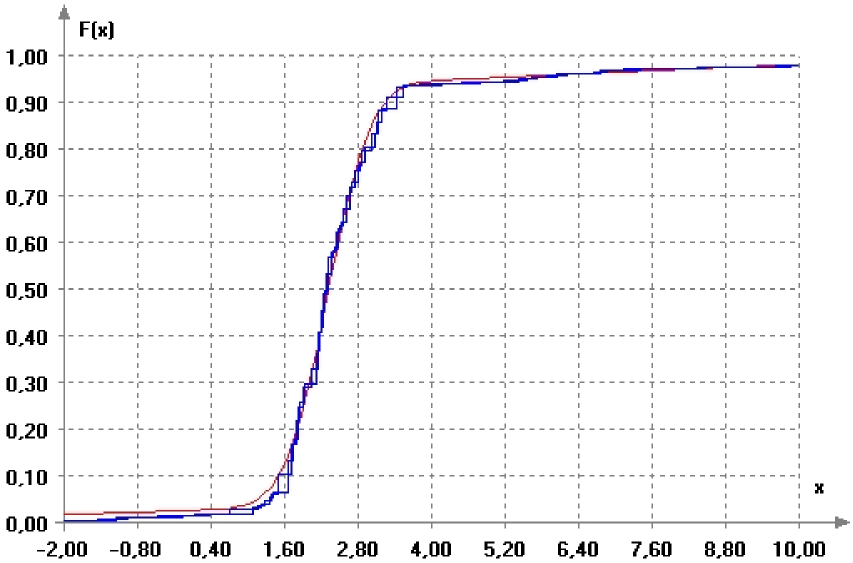

Рис. 21. Эмпирическая функция распределения ГТП ОПФ (полной выборки) и функция распределения смеси 3-х нормальных законов

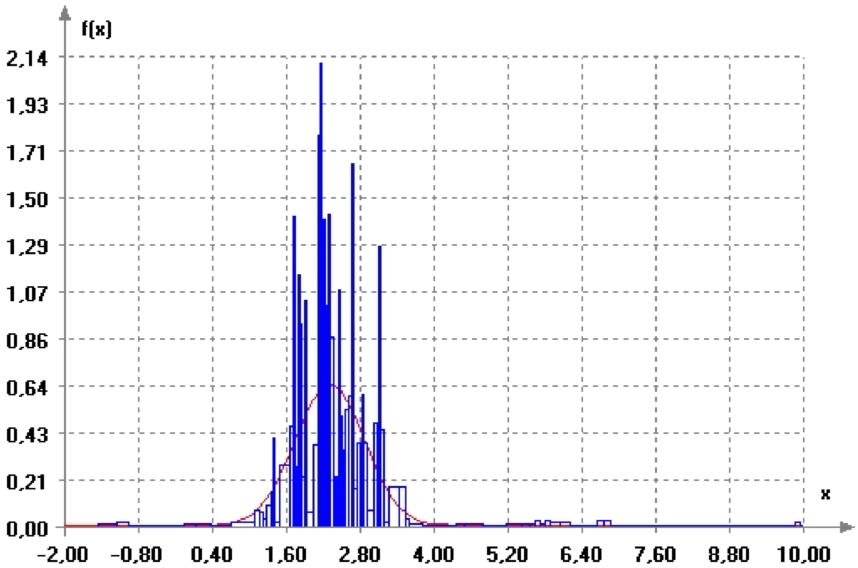

Рис. 22. Гистограмма ГТП ОПФ (полной выборки) и функция плотности смеси 3-х нормальных законов

В случае использования для описания полной выборки смеси из распределения Su-Джонсона с параметрами $\hat{\theta}_0 = -1.891$, $\hat{\theta}_1 = 1.561$, $\hat{\theta}_2 = 4.555$, $\hat{\theta}_3 = -1.677$ для первой выборки, распределения Su-Джонсона с параметрами $\hat{\theta}_0 = 2.899$, $\hat{\theta}_1 = 3.372$, $\hat{\theta}_2 = 1.265$, $\hat{\theta}_3 = 3.497$ для второй выборки и обобщенного логистического закона с параметрами $\hat{\theta}_0 = 2.893$, $\hat{\theta}_1 = 0.835$, $\hat{\theta}_2 = 0.352$, $\hat{\theta}_3 = 1.730$ для третьей выборки с весами, пропорциональными объемам выборок (объемов ОПФ), получим более благоприятную картину, представленную на рисунках 23–26.

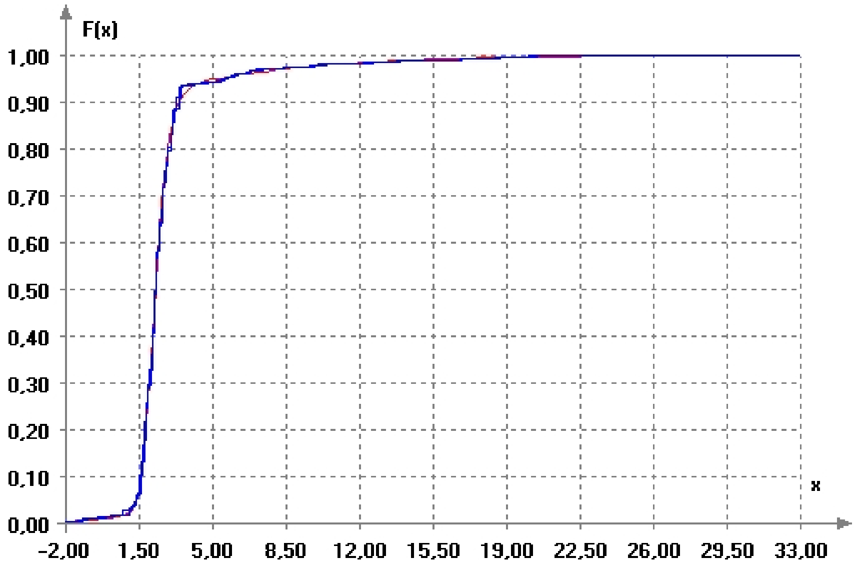

Рис. 23. Эмпирическая функция распределения ГТП ОПФ (полной выборки) и функция распределения смеси 2-х распределений Su-Джонсона и обобщенного логистического

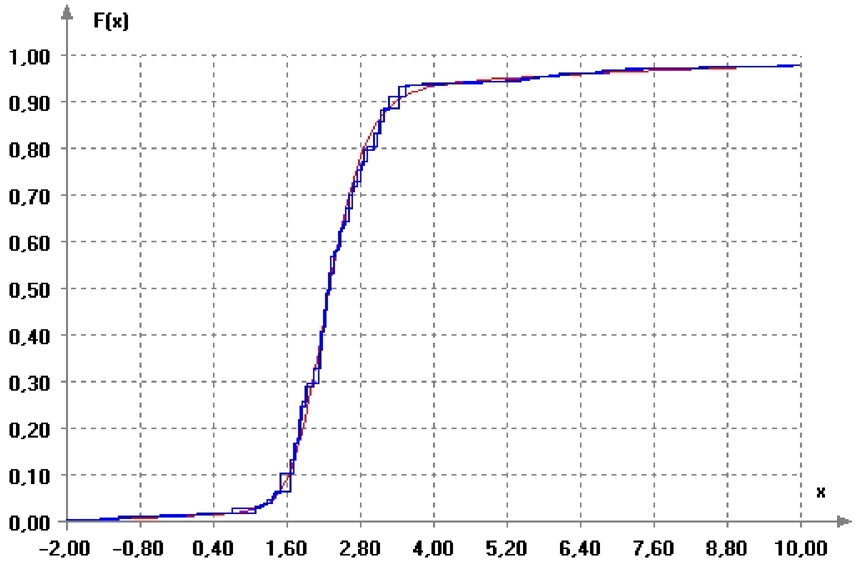

Рис. 24. Эмпирическая функция распределения ГТП ОПФ (полной выборки) и функция распределения смеси 2-х распределений Su-Джонсона и обобщенного логистического (другой масштаб)

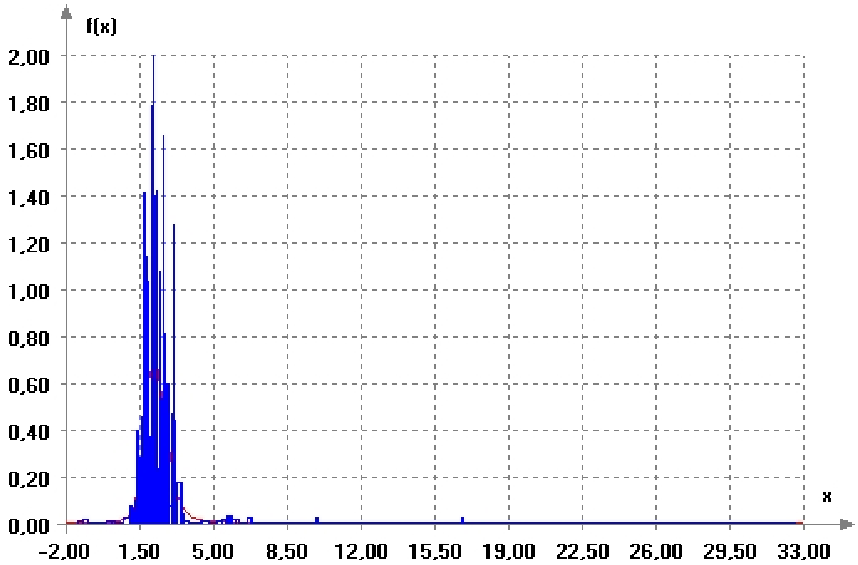

Рис. 25. Гистограмма ГТП ОПФ (полной выборки) и функция плотности смеси 2-х распределений Su-Джонсона и обобщенного логистического

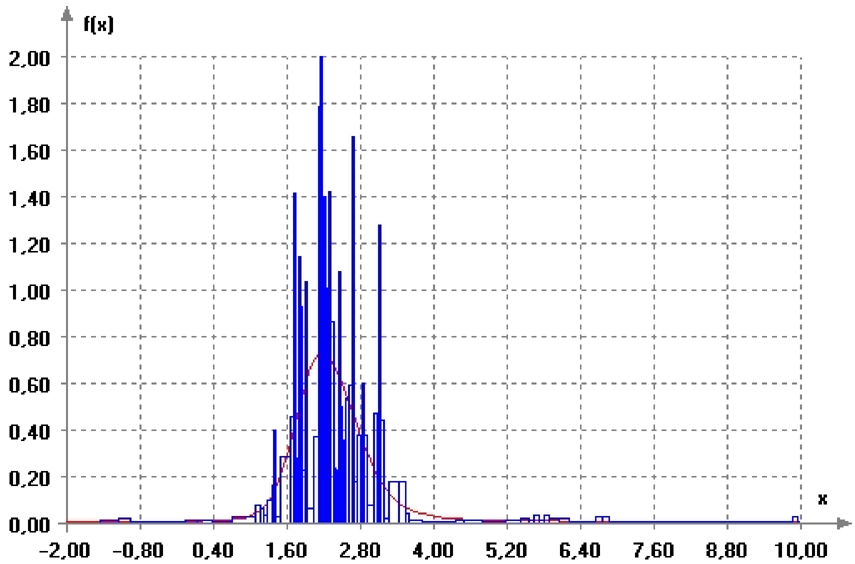

Рис. 26. Гистограмма ГТП ОПФ (полной выборки) и функция плотности смеси 2-х распределений Su-Джонсона и обобщенного логистического (другой масштаб по оси абсцисс)

Выводы. Рассмотренная попытка построения вероятностной модели для ГТП ОПФ демонстрирует некоторые типичные особенности, связанные с задачами экономики (на макроуровне).

Во-первых. Статистические данные, связанные с процессами, регистрируемыми макроэкономической статистикой, как правило, характеризуются большими объемами накопленной информации, хранимой в сжатом виде группированных или интервальных данных. Причем границы интервалов зачастую неизвестны.

Во-вторых. По-видимому, законы распределения ГТП ОПФ зависят от объемов ОПФ: чем больше объемы ОПФ, тем меньше разброс (рассеяние, дисперсия) ГТП ОПФ. Интуитивно это понятно.

В-третьих, далеко не всегда, как и в других приложениях прикладной математической статистики, нормальный закон оказывается наилучшей моделью для наблюдаемых случайных величин.

В-четвертых. Модели в виде смесей параметрических законов распределения могут достаточно хорошо описывать наблюдаемые процессы.

В-пятых. Окончательные выводы об адекватности построенной вероятностной модели, о том, насколько хорошо она объясняет случайные отклонения от имеющих место детерминированных законов, описывающих экономические процессы, остаются за экономической теорией.

Литература

[1] Куллдорф Г. Введение в теорию оценивания по группированным и частично группированным выборкам. – М.: Наука, 1966. – 176 с.
[2] Денисов В.И., Лемешко Б.Ю., Цой Е.Б. Оптимальное группирование, оценка параметров и планирование регрессионных экспериментов. В 2–х ч. / Новосиб. гос. техн. ун–т. – Новосибирск, 1993. – 347 с.
[3] Лемешко Б.Ю., Постовалов С.Н. О решении задач статистического анализа интервальных наблюдений // Вычислительные технологии. – 1997. – Т.2. – № 1. – С. 28–36.
[4] Лемешко Б.Ю., Постовалов С.Н. Об оценивании параметров распределений по интервальным наблюдениям // Вычислительные технологии. 1998. Т.3. – № 2. – С. 31–38.

[5] Лемешко Б.Ю. Об оценивании параметров распределений по группированным наблюдениям // Вопросы кибернетики. – М., 1977. – Вып. 30. – С. 80–96.

[6] Лемешко Б.Ю. Робастные методы оценивания и отбраковка аномальных измерений // Заводская лаборатория. – 1997. – Т.63. – № 5. – С. 43–49.

[7] Лемешко Б.Ю., Постовалов С.Н. О распределениях статистик непараметрических критериев согласия при оценивании по выборкам параметров наблюдаемых законов // Заводская лаборатория. 1998. Т. 64. – № 3. – С. 61–72.

[8] Лемешко Б.Ю., Постовалов С.Н. Прикладная статистика. Правила проверки согласия опытного распределения с теоретическим. Методические рекомендации. Часть II. Непараметрические критерии. – Новосибирск: Изд–во НГТУ, 1999. – 85 с.

[9] Лемешко Б.Ю., Постовалов С.Н. Применение непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез // Автометрия. 2001. – № 2. – С. 88–102.

[10] Денисов В.И., Лемешко Б.Ю., Постовалов С.Н. Прикладная статистика. Правила проверки согласия опытного распределения с теоретическим. Методические рекомендации. Часть I. Критерии типа χ^2. – Новосибирск: Изд–во НГТУ, 1998. – 126 с.