О Мощности Критериев Случайности и Отсутствия Тренда в Характеристиках Рассеяния

Борис Ю. Лемешко, Ирина В. Веретельникова
Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск, Россия

Аннотация – **При справедливости проверяемой гипотезы методами статистического моделирования исследованы распределения статистик множества параметрических и непараметрических критериев, предназначенных для проверки гипотез о случайности или об отсутствии тренда в характеристиках рассеяния. Предложена и реализована процедура интерактивного моделирования распределений статистик критериев, что позволило корректно применять соответствующие критерии в условиях нарушения стандартных предположений. Приводятся результаты сравнительного анализа мощности критериев по отношению к различным конкурирующим гипотезам о наличие линейного, периодического или смешанного тренда в характеристиках рассеяния. Даны рекомендации о предпочтительности использования тех или иных критериев.**

Ключевые слова – **Мощность критерия, тренд, гипотеза о случайности, статистическое моделирование.**

I. Введение

Для проверки гипотезы о случайности или об отсутствии тренда как в математическом ожидании, так и в характеристиках рассеяния в разное время предложено множество параметрических и непараметрических критериев. Однако существующие работы не позволяют судить о преимуществах тех или иных критериев, не содержат четких рекомендаций, очерчивающих область применения и предпосылки, выполнение которых обеспечивает корректность статистических выводов при использовании рассматриваемых критериев. Основной предпосылкой, обеспечивающей корректное применение параметрических критериев, как правило, является предположение о нормальном законе распределения шума, что далеко не всегда выполняется на практике. Использование непараметрических критериев опирается на асимптотические распределения статистик этих критериев. При ограниченных объемах выборок распределения статистик параметрических и непараметрических критериев могут существенно отличаться от соответствующих предельных распределений статистик, используемых в процедуре проверки гипотезы. В случае непараметрических критериев проблема зачастую усугубляется из-за ярко выраженной дискретности статистики. В таких ситуациях использование при проверке гипотезы предельного (асимптотического) распределения статистики вместо «истинного» распределения этой статистики может приводить к неверному выводу.

В данной работе методами статистического моделирования исследовались распределения статистик и мощность ряда статистических критериев, ориентированных на проверку гипотез об отсутствии тренда в характеристиках рассеяния (в дисперсии) наблюдаемой последовательности случайных величин (результатов измерений).

II. Постановка задачи

При проверке отсутствия тренда в характеристиках рассеивания задача формулируется следующим образом. Предполагается, что наблюдается временной ряд значений $x_1, x_2, ..., x_n$ взаимно независимых случайных величин. Проверяется гипотеза $H_0 : \sigma_i = \sigma$, $i = 1, 2, \dots, n$, о том, что все выборочные значения принадлежат к одной генеральной совокупности со среднеквадратическим отклонением σ, против конкурирующей гипотезы о наличии тренда $H_l : |\sigma_{i+1} - \sigma_i| > 0$, $i = 1, 2, \dots, n-1$.

При проверке отсутствия сдвига в дисперсии (в характеристиках рассеяния) предполагается, что наблюдаемая последовательность измерений $x_1, x_2, ..., x_n$ имеет одно и то же среднее μ. Проверяется гипотеза H_0: $\sigma_1^2 = ... = \sigma_n^2 = \sigma_0^2$ (σ_0^2 неизвестно) против конкурирующей гипотезы

$$H_l: \quad \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = ... = \sigma_k^2 = \sigma_0^2;$$

$$\sigma_{k+1}^2 = \sigma_{k+2}^2 = ... = \sigma_n^2 = \sigma_0^2 + \delta; \quad (\delta > 0),$$

утверждающей, что значение дисперсии меняется в некоторой неизвестной точке, то есть k неизвестно ($1 \le k \le n-1$).

III. Статистические критерии

A. Критерий Кокса–Стюарта

Критерий Кокса–Стюарта при проверке гипотезы об отсутствии тренда в дисперсии (в характеристиках рассеяния) строится следующим образом.

Исходная выборка $x_1, ..., x_n$ разбивается на $[n/k]$ подвыборок объемом k элементов $x_1, ..., x_k$; $x_{k+1}, ..., x_{2k}$; $x_{2k+1}, ..., x_{3k}$; …; $x_{n-k+1}, ..., x_n$ (если n не делится на k, отбрасывается необходимое число измерений в центре). Для каждой i-й подвыборки находится размах w_i ($1 \le i \le r$,

978-1-5090-4069-8/16/$31.00 ©2016 IEEE

$r = [n/k]$). Далее полученная последовательность размахов w_i проверяется на наличие тренда в средних значениях критерием со статистикой

$$S_1^* = \frac{S_1 - E[S_1]}{\sqrt{D[S_1]}}, \quad (1)$$

где

$$S_1 = \sum_{i=1}^{[n/2]} (n-2i+1) h_{i,n-i+1},$$

$$E[S_1] = \frac{n^2}{8}, \quad D[S_1] = \frac{n(n^2-1)}{24},$$

где $h_{i,j} = 1$, если $x_i > x_j$, и $h_{i,j} = 0$, если $x_i \le x_j$ $(i < j)$. При справедливости проверяемой гипотезы об отсутствии тренда распределение (1) приближенно описывается стандартным нормальным законом.

Величину k в [5] рекомендуется выбирать из следующих соотношений:

$$n \ge 90 \to k = 5; \quad 64 \le n < 90 \to k = 4;$$
$$48 \le n < 64 \to k = 3; \quad n < 48 \to k = 2.$$

Дискретность распределения статистики S_1^* при обнаружении тренда в дисперсии заметно выше дискретности распределения статистики Кокса–Стюарта для тренда в средних (см. рис.1). Это естественно, так как анализируемая выборка размахов содержит лишь $[n/k]$ элементов.

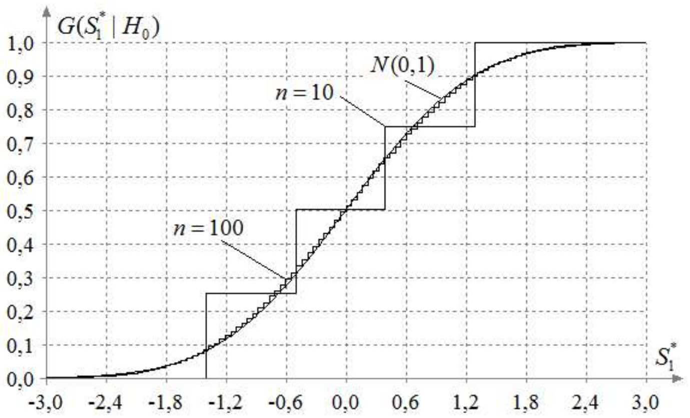

Рис. 1. Сходимость к стандартному нормальному закону распределения статистики (1) критерия Кокса-Стюарта

При использовании критерия Кокса–Стюарта для обнаружения тренда в дисперсиях отличием дискретного распределения статистики от стандартного нормального закона можно практически пренебречь лишь при $n > 170$ [2].

B. Критерий Фостера–Стюарта

В зависимости от вида используемой статистики этот непараметрический критерий может применяться для проверки гипотез об отсутствии тренда в средних значениях или в дисперсиях (в характеристиках рассеяния). Критерий, используемый для обнаружения тренда в характеристиках рассеяния, имеет вид [1]:

$$S = \sum_{i=2}^{n} S_i, \quad (2)$$

где $S_i = u_i + l_i$;

$u_i = 1$, если $x_i > x_{i-1}, x_{i-2}, ..., x_1$, иначе $u_i = 0$;

$l_i = 1$, если $x_i < x_{i-1}, x_{i-2}, ..., x_1$, иначе $l_i = 0$.

Очевидно, что $0 \le S \le n-1$.

При отсутствии тренда нормализованная статистика:

$$\tilde{t} = \frac{S - \mu}{\hat{\sigma}_S}, \quad (3)$$

где

$$\mu = 2\sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i}, \quad \hat{\sigma}_S = \sqrt{\mu - 4\sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i^2}} \approx \sqrt{2\ln n - 3.4253}$$

приближенно описываются распределением Стьюдента с $\nu = n$ степенями свободы. Проверяемая гипотеза об отсутствии соответствующего тренда отклоняется при больших по модулю значениях статистик (3).

На самом деле областью определения статистики $\tilde{t}$ является область дискретных значений. Исследование распределений статистики показало, что даже при достаточно больших объемах выборок порядка $n = 100, 200$ дискретные распределения статистики критерия существенно отличаются от распределения Стьюдента с n степенями свободы [3]. Функции распределения статистики $\tilde{t}$ показаны на рис. 2.

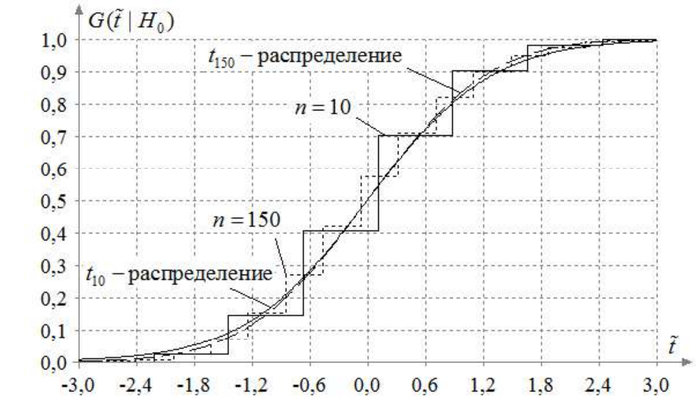

Рис. 2. Функции распределения статистики (3) критерия Фостера–Стюарта в зависимости от объёмов выборок

Отсюда следует, что использование для вычисления достигнутого уровня значимости (*p-value*) вместо действительных (дискретных) распределений статистик асимптотических t-распределений Стьюдента может приводить к существенным ошибкам.

C. Критерии Хсу обнаружения «сдвига дисперсии» и определения точки сдвига

В данном критерии отклонение проверяемой гипотезы о случайности (об отсутствии тренда) может свидетельствовать об обнаружении “сдвига дисперсии”. Статистика критерия Хсу имеет вид [5]

$$H = \frac{\sum_{i=1}^{n}(i-1)(x_i - m_x)^2}{(n-1)\sum_{i=1}^{n}(x_i - m_x)^2}, \quad 0 \le H \le 1, \quad (4)$$

где m_x – медиана вариационного ряда. В предположении, что математические ожидания последовательности случайных величин имеют одно и то же значение, проверяется гипотеза о неизменности дисперсий. В качестве конкурирующей гипотезы может рассматриваться изменение дисперсии наблюдаемых величин в некоторый (неизвестный) момент (начиная с некоторого элемента выборки). Критерий двусторонний: проверяемая гипотеза об отсутствии сдвига в дисперсии отклоняется при малых и больших значениях статистики (4).

Обычно критерий используется в нормализованной форме

$$H^* = \frac{H - 1/2}{\sqrt{D[H]}}, \qquad (5)$$

где $D[H] = \dfrac{n+1}{6(n-1)(n+2)}$.

Статистика (5) при справедливости гипотезы об отсутствии изменения дисперсии в асимптотике подчиняется стандартному нормальному закону.

Результаты моделирования показали [3], что при $n > 30$ распределение статистики достаточно хорошо согласуется со стандартным нормальным законом.

Критерий Хсу относится к параметрическим критериям. Поэтому, как и в случае любого параметрического критерия, связанного с проверкой гипотез о дисперсиях, распределения его статистики существенно зависят от закона, которому принадлежат анализируемые случайные величины (от закона распределения шума). Полученные в результате моделирования распределения статистики (5) в случае принадлежности случайных величин обобщенному нормальному закону (6) при различных значениях параметра формы представлены на рис. 3.

$$f(x) = \frac{\theta_2}{2\theta_1\Gamma(1/\theta_2)}\exp\left(-\left(\frac{|x-\theta_0|}{\theta_1}\right)^{\theta_2}\right) \qquad (6)$$

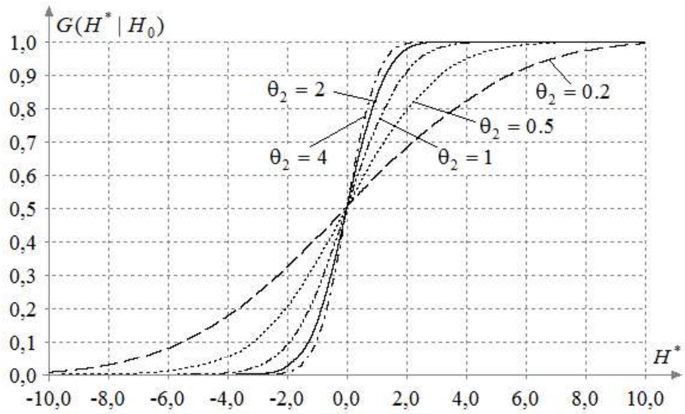

Рис. 3. Распределения статистики (5) в случае принадлежности случайных величин законам семейства (6) при различных значениях параметра формы при *n=100*

Распределения статистики (5) сильно зависят от закона распределения, которому принадлежат случайные величины. При этом наибольшее отклонение от стандартного нормального закона наблюдается в случае принадлежности случайных величин законам с тяжелыми хвостами. Существенно влияет на распределение статистики и асимметричность закона.

Критерий, позволяющий определить точку изменения дисперсии (в случае принадлежности наблюдений нормальному закону), предложен в [5]. Статистика этого критерия строится следующим образом. Пусть для $k = 1, 2, ..., n-1$

$$w_k = \sum_{i=1}^{k}(x_i - m_x)^2, \quad W_k = \frac{w_n - w_k}{w_k}\frac{k}{n-k},$$

где k соответствует искомой точке изменения дисперсии. В случае принадлежности x_i нормальному закону величины W_k, $k = 1, 2, ..., n-1$, принадлежат соответствующим $F_{n-k,k}(W)$ - распределениям Фишера с $n-k$ и k степенями свободы.

Далее по соответствующим функциям распределения находим $\gamma_k = F_{n-k,k}(W_k)$, где при отсутствии «сдвига в дисперсии» γ_k должны подчиняться равномерному закону.

Статистика G-критерия имеет вид

$$G = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}\gamma_k, \quad 0 \le G \le 1. \qquad (7)$$

Гипотеза об отсутствии изменения дисперсии отклоняется с уровнем значимости α, если $G < G_{\alpha/2}$ или $G > G_{1-\alpha/2}$. В этом случае значение k, которому соответствует максимальная величина $|\gamma_k - 1/2|$, дает оценку искомой точки изменения значения дисперсии в наблюдаемом ряду. При $x_1 = m_x$ значение $w_1 = 0$, значит $W_1 = \infty$ и $\gamma_1 = 1$.

В первоисточниках вид предельного распределения статистики (7) не приводится, даны лишь процентные точки.

На основе результатов статистического моделирования нами было показано, что хорошей моделью предельного распределения статистики (7) является бета-распределение 1-го рода с плотностью

$$f(x) = \frac{1}{\theta_2 B(\theta_0, \theta_1)}\left(\frac{x-\theta_3}{\theta_2}\right)^{\theta_0 - 1}\left(1 - \frac{x-\theta_3}{\theta_2}\right)^{\theta_1 - 1}$$

и значениями параметров $\theta_0 = 2.7663$, $\theta_1 = 2.7663$, $\theta_2 = 1$, $\theta_3 = 0$ (см. рис.4). Опираясь на этот закон можно находить процентные точки $G_{\alpha/2}$ и $G_{1-\alpha/2}$ или значения *p*-value.

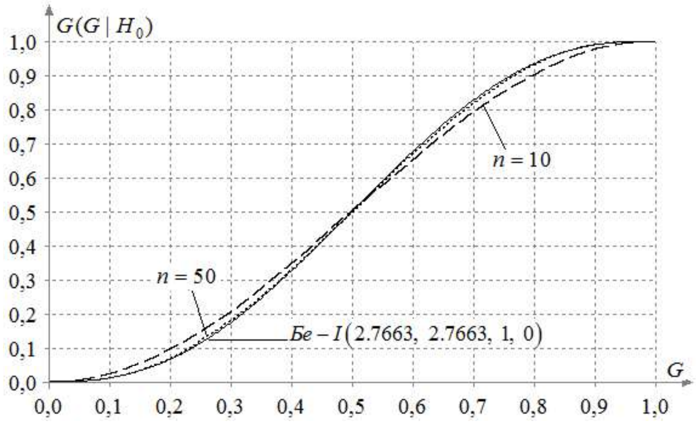

Рис. 4. Сходимость распределения статистики (10) G-критерия к бета-распределению 1-го рода

G-критерий также относится к параметрическим критериям. Поэтому распределения его статистики существенно зависят от вида наблюдаемого закона.

В случае нарушения стандартного предположения о нормальности x_i законами величин W_k, $k = 1, 2, ..., n-1$, не будут распределениями Фишера. Для корректного применения критерия в нестандартных условиях должны быть найдены и использоваться при вычислении γ_k действительные распределения величин W_k, $k = 1, 2, ..., n-1$ (что предпочтительней, так как распределение *G*-статистики будет то же), либо могут использоваться $F_{n-k,k}(W)$-распределения Фишера, но тогда в этих условиях должно находиться неизвестное распределение *G*-статистики (что менее предпочтительно, но проще при реализации, так как надо найти только одно распределение).

D. Ранговые критерии обнаружения «сдвига дисперсий» Клотца и Сэвиджа

Ранговые критерии обнаружения изменения параметра масштаба (характеристики рассеяния) в неизвестной точке опираются на использование семейства ранговых статистик вида [6]

$$S_R = \sum_{i=1}^{n} i a_n(R_i), \quad (8)$$

где R_i – ранги выборочных значений в упорядоченном ряду измерений.

Критерии различаются используемыми метками a_n. Их вид и определяет название критерия. Часто используются:

- *метки Клотца* $a_{1n}(i) = U^2_{i/(n+1)}$, где U_γ – γ-квантиль стандартного нормального закона;
- *метки Сэвиджа* $a_{2n}(i) = \sum_{j=1}^{i} \frac{1}{n-j+1}$.

При справедливости проверяемой гипотезы H_0 критерии со статистиками $S_{R,j} = \sum_{i=1}^{n} i a_{jn}(R_i)$, $j = 1, 2$ свободны от распределения и симметричны относительно $E[S_{R,j}] = \frac{n+1}{2} \sum_{i=1}^{n} a_{jn}(i)$.

Обычно используются нормализованные критерии со статистиками вида

$$S^*_{R,j} = \frac{S_{R,j} - E[S_{R,j}]}{\sqrt{D[S_{R,j}]}}, \quad (9)$$

где

$$E[S_{R,1}] = \frac{n+1}{2} \sum_{i=1}^{n} U^2_{i/(n+1)}, \quad E[S_{R,2}] = \frac{n(n+1)}{2};$$

$$D[S_{R,1}] = \frac{n(n+1)}{12} \sum_{i=1}^{n} U^4_{i/(n+1)} - \frac{1}{3n+3} \left[E[S_{R,1}] \right]^2$$

$$D[S_{R,2}] = \frac{n(n+1)}{12} \left(n - \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \right).$$

Статистики (8) приближенно подчиняются стандартному нормальному закону. Сходимость распределений статистик к стандартному закону исследовалась в [7**Ошибка! Источник ссылки не найден.**].

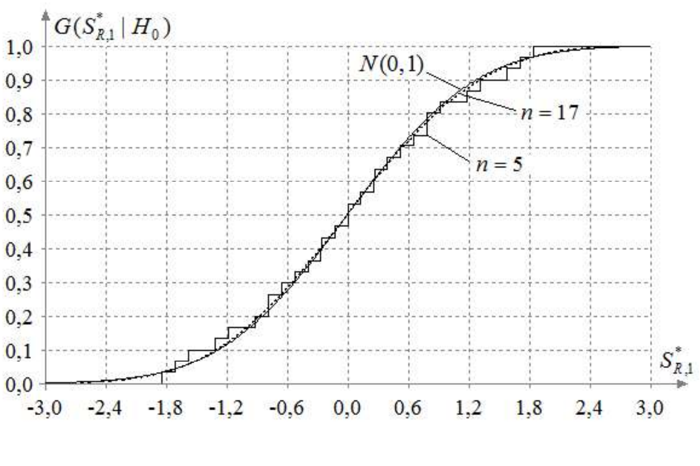

Рис. 5. Сходимость к стандартному нормальному закону распределения статистики $S^*_{R,1}$ рангового критерия с метками Клотца

Исследование методами статистического моделирования распределений статистики критерия с метками Клотца показало (см. рис. 5), что при $n > 20$ распределение достаточно хорошо приближается стандартным нормальным законом. Распределения статистики критерия с метками Сэвиджа также хорошо согласуются со стандартным нормальным законом, но при $n > 30$ (см. рис. 6).

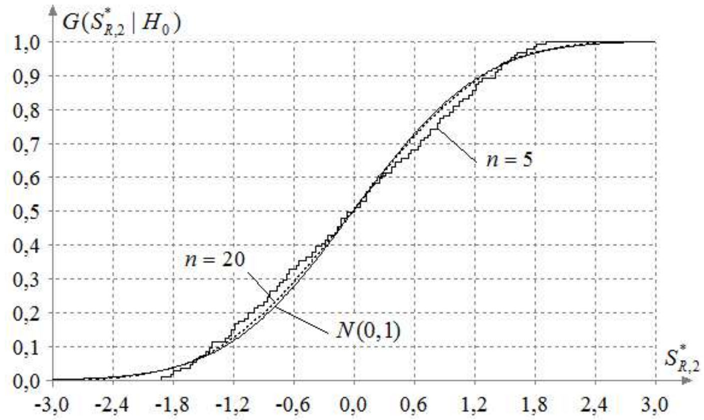

Рис. 6. Сходимость к стандартному нормальному закону распределения статистики $S^*_{R,2}$ рангового критерия с метками Сэвиджа

IV. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Анализ мощности критериев проводился для ситуации принадлежности наблюдаемых случайных величин нормальному закону. Проверяемой гипотезе H_0 соответствует выполнение предположения о независимости наблюдаемых случайных величин (отсутствие тренда). В качестве конкурирующих гипотез рассматривались различные ситуации, соответствующие наличию тренда в дисперсии.

Для критериев обнаружения изменения дисперсии в неизвестной точке при анализе мощности критериев в качестве конкурирующих гипотез (при нормальном распределении случайных величин) рассматривались близкие к H_0 гипотезы, когда в некоторый момент стандартное отклонение увеличивалось на 5, 10, 15%:

$H_1: \ \sigma_1^2 = \ldots = \sigma_k^2 = 1; \ \ \sigma_{k+1}^2 = \ldots = \sigma_n^2 = 1.1025,$

$H_2: \ \sigma_1^2 = \ldots = \sigma_k^2 = 1; \ \ \sigma_{k+1}^2 = \ldots = \sigma_n^2 = 1.21,$

$H_3: \ \sigma_1^2 = \ldots = \sigma_k^2 = 1; \ \ \sigma_{k+1}^2 = \ldots = \sigma_n^2 = 1.3225,$

где $k = n/2$.

В качестве более далекой рассматривалась конкурирующая гипотеза

$H_4: \ \sigma_1^2 = \ldots = \sigma_k^2 = 1; \ \ \sigma_{k+1}^2 = \ldots = \sigma_n^2 = 4.$

Поскольку временной ряд, соответствующий гипотезе H_1, визуально не отличим от рядов, соответствующих гипотезам H_2, H_3, на рис. 7 для сравнения приведен только временной ряд при H_1.

Наличие линейного тренда в характеристиках рассеяния наблюдаемого ряда случайных величин (изменение масштабного параметра) на интервале $t \in [0,1]$ может моделироваться в соответствии с соотношением

$$x_i = \xi_i (1 + c t_i), \qquad (10)$$

где $c \in (-1, \infty)$, $t_i = (i-1)\Delta t$, $\Delta t = 1/n$. Справедливой проверяемой гипотезе H_0 соответствует значение параметра $c = 0$.

В случае наличия периодического тренда в характеристиках рассеяния случайные величины могут моделироваться, например, в соответствии с соотношением

$$x_i = \xi_i (1 + d \cdot \sin(2k\pi t_i))$$

при $|d| < 1$. В случае смешанного тренда – в соответствии с выражением

$$x_i = \xi_i (1 + c t_i + d \sin(2k\pi t_i)),$$

при $|d| < 1$, если $c \geq 0$, и при $|d| < 1 + c$, если $c \in (-1, 0)$. Отсутствию периодической составляющей тренда соответствует значение параметра $d = 0$, а отсутствию линейной – $c = 0$.

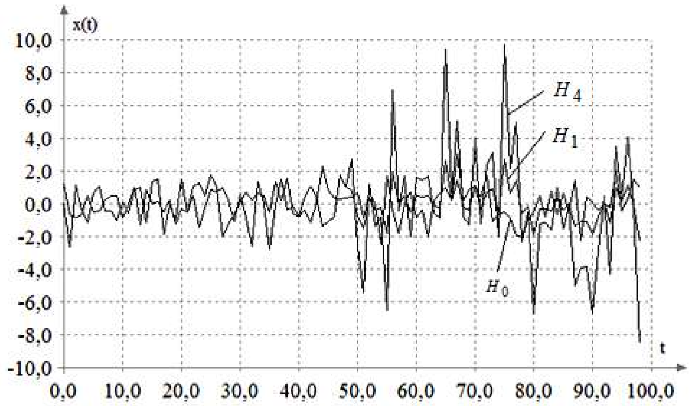

Рис. 7. Тренд, соответствующий гипотезам H_0, H_1, H_4

При анализе мощности относительно линейного, периодического и смешанного тренда в характеристиках рассеяния (в дисперсии) случайной величины рассматривались конкурирующие гипотезы:

$H_5: \ x_i = \xi_i (1 + c t_i), \quad c = 1;$

$H_6: \ x_i = \xi_i (1 + d \cdot \sin(2k\pi t_i)), \quad d = 0.8, \quad k = 2;$

$H_7: x_i = \xi_i (1 + c t_i + d \sin(2k\pi t_i)), \ c = 1, \ d = 0.8, \ k = 2.$

Вид соответствующих процессов демонстрируется на рис.◦8 – 10.

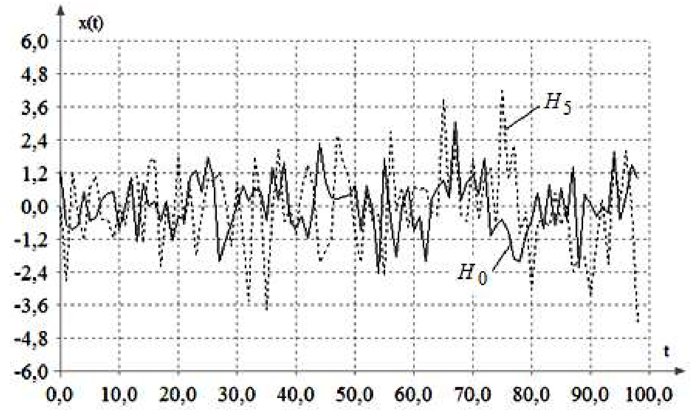

Рис. 8. Линейный тренд в характеристиках рассеяния при H_5

В ходе работы методами статистического моделирования (для вероятностей ошибок первого рода $\alpha = 0.15, 0.1, 0.05, 0.01$) были получены оценки мощности исследуемых критериев относительно конкурирующих гипотез H_1, H_2, H_3 и H_4, соответствующих сдвигу величины дисперсии. Была исследована мощность критериев относительно конкурирующих гипотез H_5, H_6, H_7, соответствующих наличию линейного или нелинейного тренда в характеристиках рассеяния анализируемых процессов.

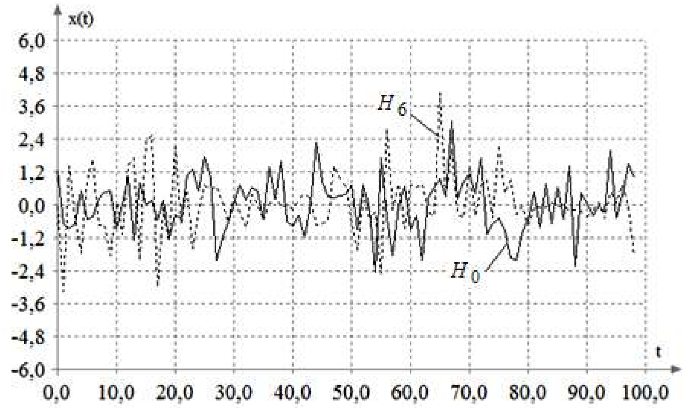

Рис. 9. Периодический тренд в характеристиках рассеяния при H_6

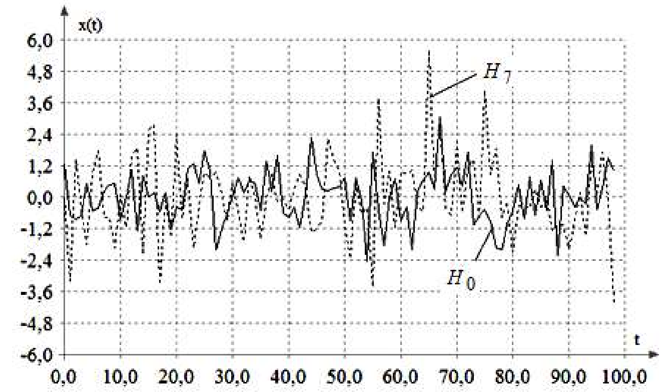

Рис. 10. Смешанный тренд в характеристиках рассеяния при H_7

На рисунке 11 приведены оценки мощности критериев Кокса-Стюарта, относительно конкурирующих гипотез H_1, H_2, H_3 и H_4 при уровне значимости $\alpha = 0.05$.

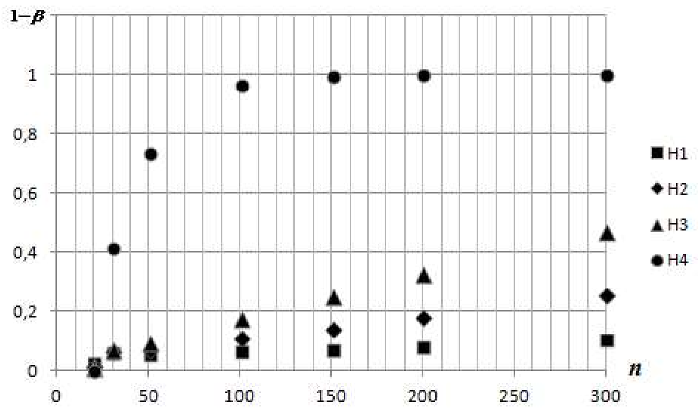

Рис. 11. Оценки мощности критерия Кокса-Стюарта

Для сравнительного анализа мощности относительно конкурирующих гипотез H_1, H_2, H_3 и H_4 на рис. 12 приведены оценки мощности только при уровне значимости $\alpha = 0.1$ и объеме выборок n=100. При близких конкурирующих гипотезах критерии Хсу с H и G статистиками, а также критерий Клотца показали наиболее высокую мощность относительно рассмотренного множества конкурирующих гипотез. Они показали способность обнаружить тренд в характеристиках рассеяния при его 10% увеличении.

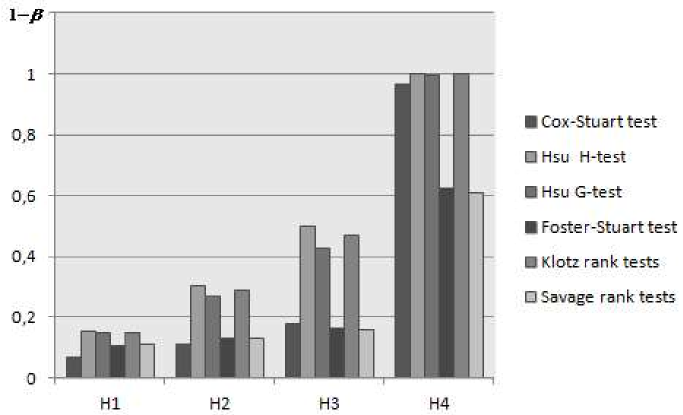

Рис. 12. Оценки мощности при близких конкурирующих гипотезах

Для сравнительного анализа мощности относительно конкурирующих гипотез H_5, H_6 и H_7 в таблице I вынесены оценки мощности только при уровне значимости $\alpha = 0.1$ и объеме выборок n=100. Критерии расположены в порядке убывания мощности $1-\beta$. Критерии Хсу с H- и G-статистиками и критерий Клотца также хорошо отличают нулевую гипотезу от конкурирующих, которым соответствует наличие линейного или периодического тренда в характеристиках рассеяния (от гипотез H_5, H_6).

В то же время критерии Кокса–Стюарта, Сэвиджа, Фостера–Стюарта не могут достаточно надежно обнаружить периодический тренд в дисперсии (мала мощность относительно рассмотренной гипотезы H_6).

К сожалению, ни один из рассмотренных критериев не показал способности обнаружить смешанный тренд в дисперсии (относительно рассмотренной гипотезы H_7 критерии показали чрезвычайно малую мощность).

ТАБЛИЦА I
СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ МОЩНОСТИ ВСЕХ КРИТЕРИЕВ ПРОВЕРКИ СЛУЧАЙНОСТИ И ОТСУТСТВИЯ ТРЕНДА В ДИСПЕРСИЯХ

№	**Против** H_5	$1-\beta$	**Против** H_6	$1-\beta$
1	Хсу H	0.836	Хсу H	0.711
2	Хсу G	0.818	Клотц	0.678
3	Клотц	0.807	Хсу G	0.545
4	Кокс-Стюарт	0.489	Сэвидж	0.196
5	Фостер-Стюарт	0.346	Кокс-Стюарт	0.143
6	Сэвидж	0.246	Фостер-Стюарт	0.048

№	**Против** H_7	$1-\beta$
1	Хсу H	0.162
2	Сэвидж	0.095
3	Фостер-Стюарт	0.082
4	Хсу G	0.057
5	Кокс-Стюарт	0.052
6	Клотц	0.104

V. ВЫВОДЫ И ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, методами статистического моделирования исследованы распределения статистик множества параметрических и непараметрических критериев случайности и отсутствия тренда в характеристиках рассеяния; для ситуации нарушения стандартных предположений. В рамках развиваемого программного обеспечения ISW реализован интерактивный режим исследования распределений статистик. Проведен сравнительный анализ мощности критериев относительно некоторых конкурирующих гипотез, что позволяет судить о предпочтительности применения тех или других критериев. Отмечены недостатки отдельных критериев.

Исследование выполнено при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (проект №2.541.2014К).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Кобзарь А.И. Прикладная математическая статистика. Для инженеров и научных работников. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 816 с.
[2] Веретельникова И.В., Лемешко Б.Ю. Аналитический обзор критериев проверки случайности и отсутствия тренда // Труды XII международной конференции “Актуальные проблемы электронного приборостроения” АПЭП-2014. Т.6, Новосибирск, 2014. – С.16-23.
[3] Лемешко Б.Ю., Комиссарова А.С., Щеглов А.Е. Применение некоторых критериев проверки гипотез случайности и отсутствия тренда // Метрология. 2010. № 12. – С. 3-25.
[4] Cox D.R., Stuart A. Quick sign tests for trend in location and dispersion // Biometrica. 1955. – V.42. – P.80-95.
[5] Hsu D. A. Test for variance shift at an unknown time point / D. A. Hsu // Appl. Statist., 1977. V.26, № 3. P.279–284.
[6] Лемешко Б.Ю., Комиссарова А.С., Щеглов А.Е. Свойства и мощность некоторых критериев случайности и отсутствия тренда // Научный вестник НГТУ. – 2012. – № 1(46). – С. 53-66.

Веретельникова Ирина Викторовна
Аспирант кафедры теоретической и прикладной информатики НГТУ

Борис Юрьевич Лемешко
Профессор кафедры теоретической и прикладной информатики НГТУ, д.т.н.