

ИССЛЕДОВАНИЕ КРИТЕРИЕВ ПРОВЕРКИ ГИПОТЕЗ, ИСПОЛЬЗУЕМЫХ В ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ КАЧЕСТВОМ¹

Б.Ю. Лемешко, С.Б. Лемешко, Е.П. Миркин

Новосибирский государственный технический университет

Тел. (383-2) 46-37-54. E-mail: headrd@fpm.ami.nstu.ru

Аннотация. Методами статистического моделирования исследованы распределения статистик и мощность ряда критериев нормальности. Показаны недостатки и преимущества различных критериев. Проведено сравнение мощности рассмотренных критериев с критериями согласия при проверке нормальности. Получены таблицы процентных точек для статистик критериев типа Граббса при проверке на выброс одновременно трех максимальных (трех минимальных) значений и одновременно минимального и максимального значений в выборке. Показано, что при проверке гипотез о математических ожиданиях применение классического F-критерия оказывается корректным при существенных отклонениях наблюдаемого закона от нормального. Для статистик, используемых в критериях Бартлетта и Кохрена, получены таблицы процентных точек, применение которых правомерно при наблюдаемых законах, описываемых экспоненциальным семейством распределений.

Исследование критериев нормальности

Отечественный ГОСТ Р ИСО 5479-2002 [1], представляющий собой аналог международного стандарта ISO 5479-97, не позволяет ориентироваться в том, какой из критериев является предпочтительней, какой из них наиболее мощен и против каких альтернатив, при каких объемах выборок конкретный критерий обладает преимуществом или имеет недостатки.

В данной работе методами статистического моделирования исследованы распределения статистик критериев, включенных в стандарт ISO 5479-97: проверки симметричности, на значение эксцесса, критерии Шапиро-Уилка, Эппса-Палли, модифицированный критерий Шапиро-Уилка. Исследована мощность критериев по отношению к близким альтернативам, показаны достоинства и недостатки критериев, проведено сравнение критериев по мощности с критериями согласия [2], [3]. Исследован ряд критериев, не включенных в стандарт. Показано, что недостатком критериев Шапиро-Уилка, Эппса-Палли и некоторых других при малых объемах выборок является их смещенность по отношению к альтернативам, представляющим собой законы, более плосковершинные по сравнению с нормальным. То есть, при малых объемах выборок они не могут отличать эти альтернативы от нормального закона. Например, на рис. 1 приведены условные распределения $G(S|H_i)$ статистики критерия Шапиро-Уилка при справедливости гипотез H_0 , H_1 , H_2 , H_3 при объеме выборок $n=10$. В качестве гипотез H_0 , H_1 , H_2 рассмотрены распределения экспоненциального семейства с плотностью

$$f(x) = \frac{\theta_2}{2\theta_1\Gamma(1/\theta_2)} \exp \left\{ - \left(\frac{|x - \theta_0|}{\theta_1} \right)^{\theta_2} \right\}. \quad (1)$$

Гипотезе H_0 соответствует нормальный закон – $\theta_1=1$, $\theta_0=0$, $\theta_2=1$; гипотезе H_1 – закон с параметрами $\theta_1=1$, $\theta_0=0$, $\theta_2=4$; гипотезе H_2 – распределение Лапласа $\theta_1=1$, $\theta_0=0$, $\theta_2=1$; гипотезе H_3 – логистическое распределение с плотностью

¹ Работа выполнена при поддержке Минобразования РФ (проект № T02-3.3-3356)

$$f(x) = \frac{\pi}{\theta_1 \sqrt{3}} \exp \left\{ -\frac{\pi(x - \theta_0)}{\theta_1 \sqrt{3}} \right\} / \left[1 + \exp \left\{ -\frac{\pi(x - \theta_0)}{\theta_1 \sqrt{3}} \right\} \right]^2$$

и параметрами $\theta_1 = 1$, $\theta_0 = 0$.

Показано, что распределения статистики модифицированного критерия Шапиро-Уилка, включенного в стандарт ISO 5479-97, очень плохо сходятся к предельному закону. Поэтому применение данного критерия сопряжено с повышенной вероятностью ошибок первого рода и не может быть рекомендовано.

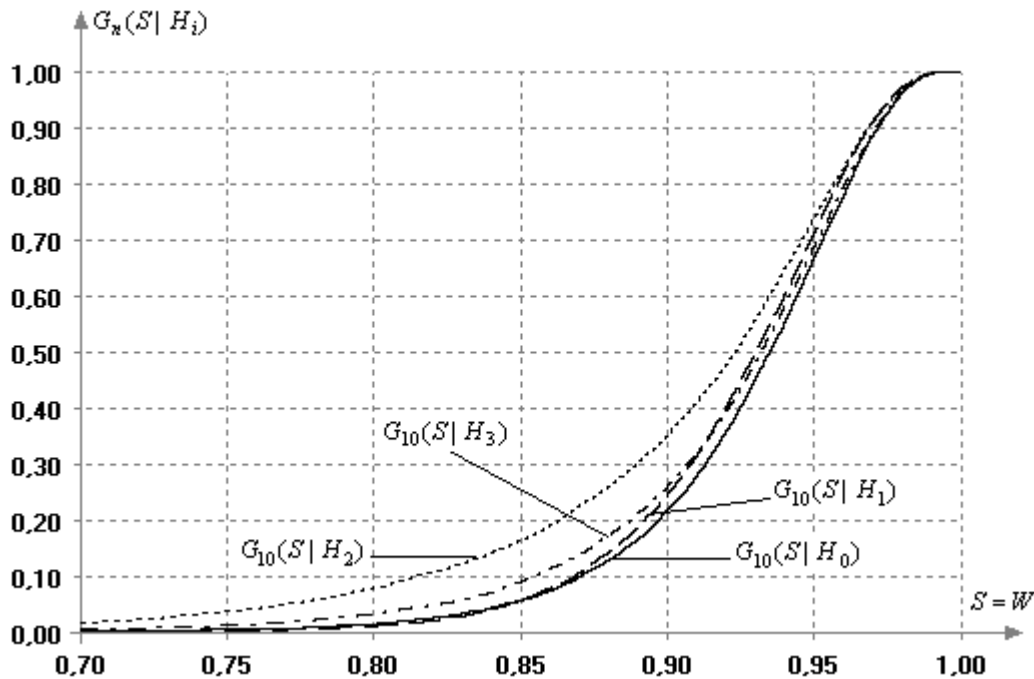


Рис. 1. Условные распределения $G(S|H_i)$ статистики критерия Шапиро-Уилка при объеме выборок $n=10$

Показано, что наиболее предпочтительным (по мощности) критерием проверки нормальности, у которого отсутствуют указанные недостатки, является критерий со статистикой z_2 , предложенный D'Agostino [4], не попавший в стандарт ISO 5479-97.

Исследование критериев типа Граббса

Подход, использованный при построении статистик критерия Граббса [5-7], естественно развивается на построение критериев, предназначенных для проверки на аномальность одновременно большего числа крайних значений в выборке.

Например, статистика для проверки на аномальность одновременно минимального и максимального значений формируется в соответствии с соотношением:

$$G_{1,n} = \frac{S_{1,n}^2}{S_0^2}, \quad (2)$$

где

$$S_{1,n}^2 = \sum_{j=2}^{n-1} (X_j - \bar{X}_{1,n})^2, \quad \bar{X}_{1,n} = \frac{1}{n-2} \sum_{j=2}^{n-1} X_j, \quad S_0^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X})^2.$$

Оба значения считаются выбросами при заданном уровне значимости α , если вычисленное по выборке значение статистики (2) окажется ниже критического: $G_{1,n} < G_{1,n,\alpha}$.

Вид построенных условных распределений $F(G_{1,n}|H_0)$ статистики (2) $G_{1,n}$ в зависимости от объема n в случае извлечения анализируемой выборки из нормальной генеральной совокупности представлен на рис. 2.

В работе с использованием методики статистического моделирования вычислены нижние процентные точки распределений статистики (2) при $5 \leq n \leq 150$. Рассмотрены статистики и построены таблицы процентных точек для статистик типа (2) для проверки гипотез о принадлежности к аномальным одновременно трех наименьших или трех наибольших элементов в выборке, построены соответствующие таблицы процентных точек.

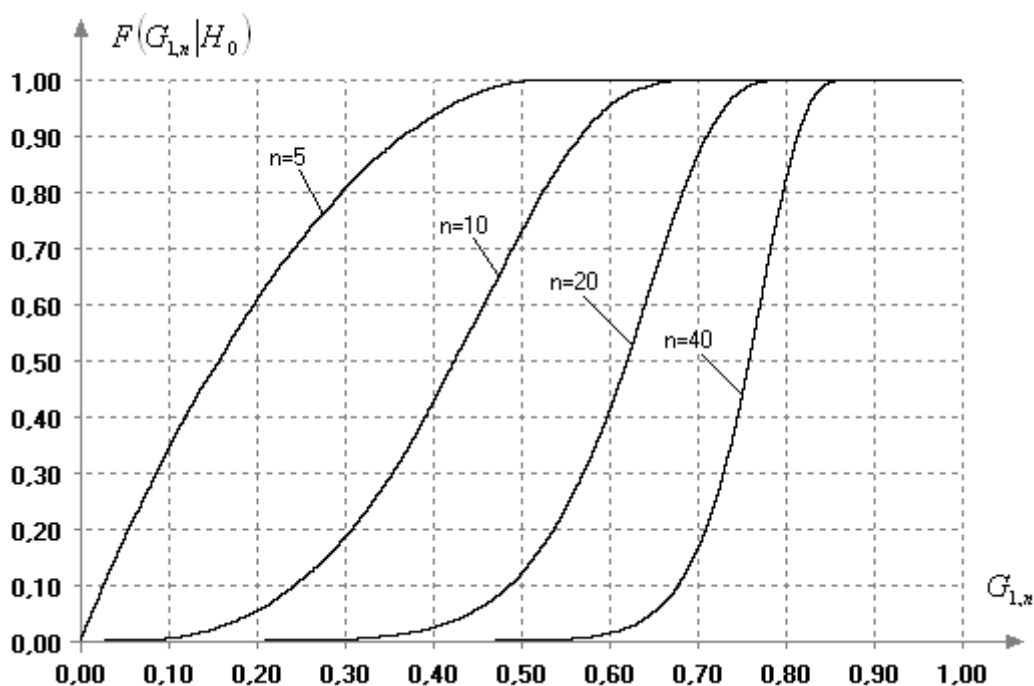


Рис. 2. Зависимость распределения статистики (2) от объема выборки (в случае нормального закона)

Предложенные в данной работе модификации статистик критерия типа Граббса, построенные таблицы соответствующих процентных точек существенно расширяют возможности критерия и позволяют корректно отбраковывать аномальные наблюдения (выбросы) в случае выполнения предположения о нормальности наблюдаемого закона.

Исследование устойчивости критериев Бартлетта, Кохрена и F-критерия

Критерии Бартлетта [8,9] и Кохрена [10,9] предназначены для проверки гипотезы вида $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_m^2$. Предельным распределением статистики Бартлетта при нормальном законе случайных величин является χ^2_{m-1} -распределение [8]. Численные исследования условных распределений $G(\chi^2 | H_0)$ статистики Бартлетта показали, что они сильно зависят от наблюдаемого закона (рис. 3). Аналогично были исследованы распределения статистики Кохрена. В результате исследований построены таблицы процентных точек статистик Бартлетта и Кохрена в случае принадлежности наблюдаемых величин закону (1) при различных значениях параметра θ_2 .

Исследования распределений статистики F-критерия, используемого для проверки гипотез вида $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_m$, показали, что на распределениях статистики практически не отражается вид законов, которым принадлежат наблюдаемые данные.

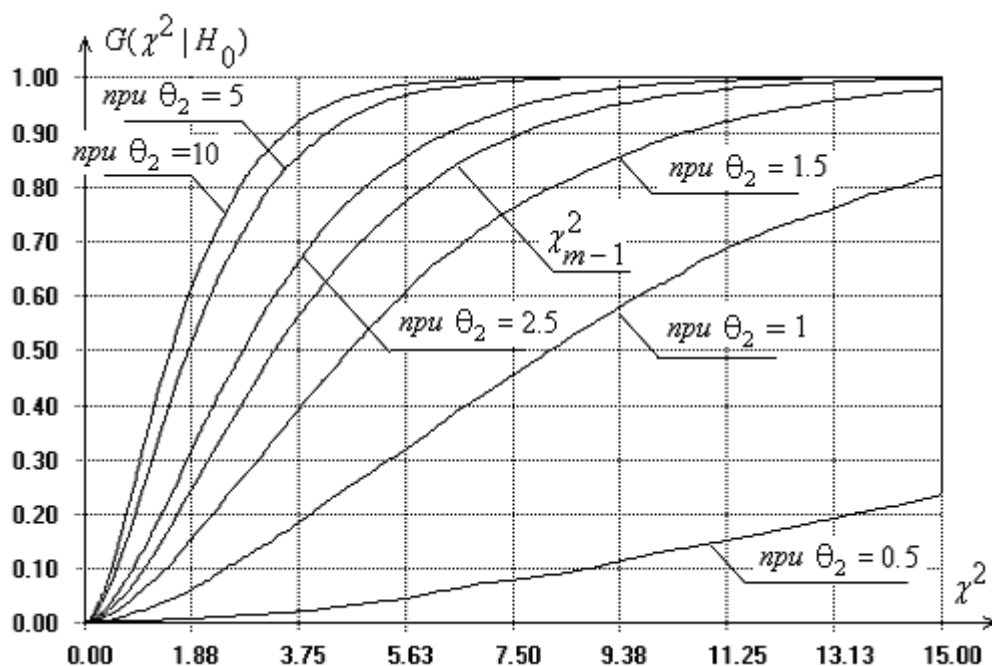


Рис. 3. Функции распределения статистики Бартлетта при $m=5$ в случае принадлежности наблюдаемых величин закону (1) при различных значениях θ_2

Подробные результаты данных исследований представлены на странице по адресу http://www.ami.nstu.ru/~headrd/seminar/Kontrol_Q/krit_zad.htm.

Литература

1. ГОСТ Р ИСО 5479-2002. Статистические методы. Проверка отклонения распределения вероятностей от нормального распределения. - М.: Изд-во стандартов. 2002. - 30 с.
2. Р 50.1.033-2001. Рекомендации по стандартизации. Прикладная статистика. Правила проверки согласия опытного распределения с теоретическим. Часть I. Критерии типа хи-квадрат. - М.: Изд-во стандартов. 2002. - 87 с.
3. Р 50.1.037-2002. Рекомендации по стандартизации. Прикладная статистика. Правила проверки согласия опытного распределения с теоретическим. Часть II. Непараметрические критерии. - М.: Изд-во стандартов. 2002. - 64 с.
4. D'Agostino R.B. Transformation to normality of the null distribution of g_1 // Biometrika. 1970. Vol. 57. - P. 679-681.
5. Frank E. Grubbs. Sample Criteria for Testing Outlying observations // Ann. Math. Statist. 1950. - Vol. 21. - No. 1. - P.27-58.
6. Frank E. Grubbs. Procedures for Detecting Outlying Observations in Samples // Technometrics. 1969. - Vol. 11. - No. 1. - P.1-21
7. Frank E. Grubbs, Glenn Beck. Extension of sample sizes and percentage points for significance tests of outlying observations // Technometrics. 1972. - Vol. 14. - No. 4. - P.847-854.
8. Bartlett M.S. Properties of sufficiency of statistical tests // Proc. Roy. Soc. 1937. A160. - P. 268-282.
9. Большев Л.Н., Смирнов Н.В. Таблицы математической статистики. - М.: Наука, 1983. - 416 с.
10. Cochran W.G. The distribution of the largest of a set of estimated variances as a fraction of their total // Ann. of Eugenics. 1941. - Vol. 11. - P. 47-52.