Министерство образования и науки Российской Федерации

НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Б.Ю. ЛЕМЕШКО, П.Ю. БЛИНОВ

КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ ОТКЛОНЕНИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ОТ РАВНОМЕРНОГО ЗАКОНА

Руководство по применению

НОВОСИБИРСК
2015

УДК 519.23

Данное руководство предназначено для использования в качестве одного из учебных пособий для магистрантов факультета прикладной математики и информатики Новосибирского государственного технического университета, осваивающих курс “Компьютерные технологии анализа данных и исследования статистических закономерностей”, которое должно способствовать критическому восприятию возможностей множества классических критериев при проверке гипотез о принадлежности выборок равномерному закону, пониманию возможностей методов статистического моделирования при исследовании вероятностных и статистических закономерностей.

Книга рассчитана на специалистов, в той или иной степени сталкивающихся в своей деятельности с вопросами статистического анализа данных, с обработкой результатов экспериментов, применением статистических методов для анализа различных аспектов и тенденций окружающей действительности.

В руководстве рассматриваются вопросы применения статистических критериев, ориентированных на проверку гипотезы о принадлежности анализируемых данных равномерному закону распределения вероятностей. Рассматриваются и сравниваются специальные критерии проверки равномерности, непараметрические критерии согласия и критерий согласия χ^2 Пирсона. Указываются недостатки и преимущества различных критериев.

Приводятся таблицы, содержащие процентные точки и модели распределений статистик, необходимые для корректного применения критериев.

Следование рекомендациям обеспечит корректность и повысит обоснованность статистических выводов при анализе данных.

Книга будет полезна инженерам, научным сотрудникам, специалистам различного профиля (медикам, биологам, социологам, экономистам, и др.), сталкивающимся в своей деятельности с необходимостью статистического анализа результатов экспериментов. Руководство будет полезно преподавателям вузов, аспирантам и студентам.

Оглавление

Предисловие

В прикладной математической статистике равномерный закон распределения вероятностей занимает видное место.

Критериев, которые могут быть использованы для проверки гипотезы о принадлежности выборки равномерному закону, достаточно много. Это и множество специальных критериев, целенаправленно построенных для проверки гипотезы о принадлежности анализируемой выборки равномерному закону (Шермана, Кимбелла, Морана, Ченга–Спиринга, Хегази–Грина, Янга, Фросини, Гринвуда, Гринвуда–Кэсеберри–Миллера, Неймана–Бартона и др.). Это совокупность классических непараметрических критериев согласия Колмогорова, Крамера–Мизеса–Смирнова, Андерсона–Дарлинга, Купера, Ватсона и три не так давно предложенных критерия Жанга. Это, наконец, критерий χ^2 Пирсона. История применения многих критериев насчитывает несколько десятилетий. Появляются публикации с новыми предложениями. Однако не смотря на множество публикаций не хватает объективной информации о действительных свойствах критериев, их достоинствах и недостатках. Можно натолкнуться на авторитетные мнения о целесообразности применения тех или иных критериев, которые не подкрепляются результатами сравнительного анализа и не всегда подтверждаются при проверке.

Специалистов, сталкивающихся в своей практической деятельности с необходимостью статистического анализа результатов экспериментов и, естественно, с проблемой проверки гипотез о принадлежности наблюдений или ошибок измерений равномерному закону, интересует, какие критерии предпочтительнее использовать и почему. Какие критерии обладают большей мощностью? Существуют ли “подводные камни”, отражающиеся на результатах анализа?

Рекомендации по применению критериев проверки гипотезы о равномерности наблюдаемого закона подготовлены с учетом результатов наших исследований свойств специальных критериев [4, 55, 56], однако основной объём необходимых исследований был проведен при подготовке настоящего руководства. Исследования позволили провести сравнительный анализ мощности критериев относительно различных альтернатив, впервые позволили указать на существенные недостатки некоторых популярных критериев, проявляющиеся при проверке этой гипотезы.

Мы не можем утверждать, что проанализированы все существующие (ранее предложенные) критерии проверки равномерности, так как появляются новые публикации. Однако хочется надеяться, что настоящая книга, как и руководство по непараметрическим критериям согласия [77], как и руководство по критериям нормальности [78], или рекомендации по применению критериев типа χ^2 [80], окажет реальную помощь специалистам, заинтересованным в корректности проводимого статистического анализа.

Основная часть исследований, способствующих подготовке данного руководства, выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках проектной части государственного задания (проект № 2.541.2014/К).

Б.Ю. Лемешко
Март 2015

Введение

Проверке гипотез о принадлежности выборки равномерному закону распределения посвящено множество работ, в которых авторами предложен достаточно обширный перечень статистических критериев. В определенной степени обилие критериев обусловлено тем интересом, который проявляется к использованию модели равномерного закона в различных приложениях. Частота применения модели равномерного закона в задачах статистического анализа в приложениях не в последнюю очередь определяется тем, что использование такой простой модели во многих ситуациях позволяет найти решение задачи с опорой только на аналитические методы. Если применение модели равномерного закона обосновано, то многие статистические выводы оказываются проще.

Равномерный закон зачастую используется для описания ошибок измерений некоторых приборов или измерительных систем.

В системах статистического моделирования крайне необходима возможность моделирования псевдослучайных величин в соответствии с различными параметрическими законами, что, как правило, реализуется на базе датчиков равномерных псевдослучайных величин с использованием метода обратных функций. Понятно, что результат в существенной степени зависит от качества датчика равномерных псевдослучайных чисел.

Множество приложений, в которых сталкиваются с использованием модели равномерного закона распределения вероятностей, объясняет повышенный интерес к выбору простых в вычислительном отношении и эффективных критериев проверки гипотез о принадлежности анализируемых выборок равномерному закону.

Если случайные величины $X_1, X_2, ..., X_n$ принадлежат некоторому закону с функцией распределения вероятностей $F(x)$, то случайные величины $Y_i = F(X_i)$, $i = \overline{1,n}$ распределены равномерно на интервале $[0,1]$. Поэтому во многих ситуациях вместо проверки гипотезы о принадлежности выборки $X_1, X_2, ..., X_n$ закону с функцией распределения $F(x)$ зачастую переходят к проверке гипотезы о принадлежности $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ равномерному закону. Не будет лишним заметить, что при подобном переходе использование классических критериев проверки равномерности, ориентированных на проверку простой гипотезы о принадлежности выборки равномерному закону, корректно, если $F(x)$ известно с точностью до значений параметров. Если же вектор параметров θ закона $F(x,\theta)$ оценивался по выборке $X_1, X_2, ..., X_n$, то при справедливости проверяемой гипотезы H_0 распределение статистики любого критерия равномерности будет отличаться от имеющего место при проверке простой гипотезы.

Наличие множества критериев ставит перед практиками не очень простую задачу выбора, так как имеющаяся в публикациях информация не позволяет однозначно отдать предпочтение какому-то определенному критерию.

При подготовке данного руководства множество рассматриваемых критериев равномерности исследовалось методами статистического моделирования. При исследовании распределений статистик соответствующих критериев количество экспериментов, осуществляемых при статистическом моделировании, как правило, принималось равным 1 660 000. Такое количество экспериментов позволяет, с одной стороны, проследить качественную картину, отражающую изменение распределений статистик в зависимости от различных факторов, с другой – обеспечить приемлемую точность получаемых оценок мощности и искомых вероятностей.

Компьютерные методы анализа дают возможность выявить достоинства и недостатки отдельных критериев, оценить при каких объемах выборок отличием действительных распределений статистик (при справедливости проверяемой гипотезы) от асимптотических (предельных) распределений статистик можно практически пренебречь, позволяют провести сравнительный анализ мощности критериев относительно различных конкурирующих гипотез, выделить наиболее предпочтительные критерии.

В первом разделе даны некоторые общие сведения, связанные с проверкой статистических гипотез, позволяющие специалистам, сталкивающимся с необходимостью статистического анализа данных экспериментальных исследований, с пониманием относиться к выбору критерия и результатам статистических выводов, корректно применять соответствующие критерии. Здесь же приводятся законы, близкие к равномерному и рассматриваемые в качестве конкурирующих гипотез, относительно которых в последующих разделах приводятся оценки мощности различных критериев, применяемых при проверке гипотезы о принадлежности анализируемых выборок равномерному закону распределения. Законы, соответствующие конкурирующим гипотезам, подобраны так, чтобы продемонстрировать “узкие места” и реальные возможности критериев, особенно, при ограниченных объёмах выборок.

Во втором разделе рассматривается множество специальных критериев, ориентированных исключительно на проверку гипотезы о принадлежности извлекаемых выборок (анализируемых данных) равномерному закону, подчеркиваются недостатки отдельных критериев, приводятся оценки мощности критериев относительно рассматриваемых конкурирующих гипотез, приводятся результаты сравнительного анализа мощности критериев. Пожалуй, впервые явно демонстрируется (при малых объёмах выборок и малых уровнях значимости) смещённость некоторых критериев относительно определенных конкурирующих гипотез.

В третьем разделе для проверки гипотезы о равномерности рассматривается применение множества классических непараметрических критериев согласия, приводятся оценки мощности критериев и результаты сравнительного анализа. Также впервые показывается, что при малых объёмах выборок целый ряд критериев согласия оказываются смещёнными относительно тех же конкурирующих законов, которые не могут отличать от равномерного и некоторые специальные критерии.

В четвертом разделе рассматриваются вопросы применения для проверки равномерности критерия согласия χ^2 Пирсона. Оценки мощности критерия сравнивается с мощностью непараметрических критериев согласия.

В пятом разделе приведен сравнительный анализ мощности всего множества рассмотренных критериев, даются рекомендации по применению конкретных критериев.

1. Общие положения

1.1. Проверяемая гипотеза и рассматриваемые критерии проверки

Равномерное распределение случайной величины X на интервале [0,1] будем обозначать как $Rav(0,1)$. Функция распределения вероятностей равномерного закона имеет вид $F(x)=x$ при $x \in [0,1]$. Для случайной величины, равномерно распределённой на интервале $[a,b]$, функция распределения имеет вид $F(x)=\dfrac{x-a}{b-a}$ при $x \in [a,b]$.

При проверке гипотезы о принадлежности наблюдаемой случайной величины равномерному закону **простая** проверяемая гипотеза имеет вид H_0: $X \in Rav(0,1)$ или H_0: $X \in Rav(a,b)$, где a и b известны. Эту же гипотезу можно записать как H_0: $F(x)=x$, $x \in [0,1]$ или H_0: $F(x)=\dfrac{x-a}{b-a}$, $x \in [a,b]$.

Проверяемая гипотеза будет **сложной**, если по данной выборке находится и область определения равномерной случайной величины.

Пусть $X_1, X_2, ..., X_n$ – выборка независимых наблюдений случайной величины X.

Для проверки гипотезы о принадлежности выборки независимых одинаково распределенных случайных величин $X_1, X_2, ..., X_n$ равномерному закону может использоваться ряд критериев, построенных специально для проверки этой гипотезы, а также применяться совокупность классических непараметрических критериев согласия (Колмогорова, Купера, Крамера–Мизеса–Смирнова, Ватсона, Андерсона–Дарлинга, Жанга) и критерий согласия χ^2 Пирсона.

В большинстве критериев проверки равномерности опираются на оценки порядковых статистик величины X (элементы $x_{(i)}$ вариационного ряда $x_{(1)} < x_{(2)} < ... < x_{(n)}$, построенного по выборке $X_1, X_2, ..., X_n$), которые в дальнейшем будем обозначать как U_i (то есть, $U_i = x_{(i)}$).

В множестве “специальных” критериев проверки гипотезы о равномерности можно выделить три группы.

Статистики критериев первой группы предусматривают использование разностей последовательных значений вариационного ряда

$$D_i = U_i - U_{i-1},$$

где $U_0 = 0$, $U_{n+1} = 1$, n – объем выборки.

К критериям второй группы относятся различные модификации критериев, использующие разности оценок порядковых статистик, соответствующих анализируемой выборке, и математических ожиданий этих порядковых статистик.

Третью группу составляют, так называемые, энтропийные критерии, опирающиеся на различные оценки энтропии.

Как правило, все "специальные" критерии ориентированы на проверку простой гипотезы H_0.

Четвёртую группу составляют непараметрические критерии согласия, применяемые для проверки равномерности.

Единственным представителем пятой группы является критерий χ^2 Пирсона.

Как увидим в дальнейшем, использование "специальных" критериев проверки равномерности не даёт каких-то явных преимуществ перед использованием "общих" классических непараметрических критериев согласия. При этом наименее мощными, как правило, оказываются представители первой группы критериев, использующие различные разности значений вариационного ряда.

1.2. Общие сведения о проверке статистических гипотез

С каждым из используемых для проверки гипотезы H_0 критериев связана соответствующая статистика S, которая в соответствии с некоторой мерой измеряет расстояние между равномерным законом распределения вероятностей и эмпирическим законом, определяемым выборкой. В силу случайности извлекаемых выборок случайными оказываются и значения статистики S, вычисляемые в соответствии с этими выборками. При справедливости проверяемой гипотезы H_0 статистика S подчиняется некоторому распределению $G(S|H_0)$.

Схема проверки гипотезы заключается в следующем. Область определения статистики разбивается на два подмножества, одно из которых представляет собой критическую область, и попадание в которую при справедливости H_0 маловероятно. При попадании вычисленного по выборке значения S^* статистики S в критическую область проверяемая гипотеза H_0 отклоняется (отвергается). В противном случае – нет оснований для отклонения гипотезы H_0.

Заметим, что не отклонение гипотезы H_0 в процессе проверки не означает, что она справедлива. Истинный закон распределения реальных случайных величин остается всегда неизвестным. Результат проверки свидетельствует лишь о том, что этот закон, возможно, не очень сильно отличается, в данном случае, от равномерного.

С другой стороны, справедливая гипотеза H_0 может быть отклонена и эти самым совершена ошибка 1-го рода. При проверке гипотез вероятность ошибки 1-го рода α (уровень значимости), как правило, задают, допуская тем самым возможность отклонения H_0 и возможность такой ошибки.

При построении критериев стремятся к использованию одномерных статистик, что упрощает построение критической области. При этом критерии могут быть правосторонними, левосторонними и двусторонними, что определяет построение критической области.

Все критерии согласия являются правосторонними, и проверяемая гипотеза H_0 отклоняется при больших значениях статистики. Среди специальных критериев проверки равномерности присутствуют правосторонние и двусторонние.

В случае правостороннего критерия граница критической области (критическое значение) $S_{1-\alpha}$, определяется уравнением

$$\alpha = \int\limits_{S_{1-\alpha}}^{\infty} g(s|H_0)ds = 1 - G(S_{1-\alpha}|H_0)\,, \qquad (1.1)$$

где $g(s|H_0)$ – условная плотность распределения статистики при справедливости H_0.

Для используемых на практике критериев в благоприятных случаях известны асимптотические (предельные) распределения $G(S|H_0)$ соответствующих статистик при условии справедливости гипотезы H_0. В тех ситуациях, когда распределения статистик существенно зависят от объёмов выборок n, информация о законе распределения статистики бывает представлена таблицей процентных точек (квантилей распределения $G(S|H_0)$). Критическое значение $S_{1-\alpha}$ вычисляют в соответствии с $G(S|H_0)$ или берут из соответствующей таблицы процентных точек.

В случае правостороннего критерия в принятой практике статистического анализа обычно полученное значение статистики S^* сравнивают с критическим значением $S_{1-\alpha}$ при заданном уровне значимости α. Проверяемую гипотезу H_0 отклоняют, если $S^* > S_{1-\alpha}$ (см. рис. 1.1).

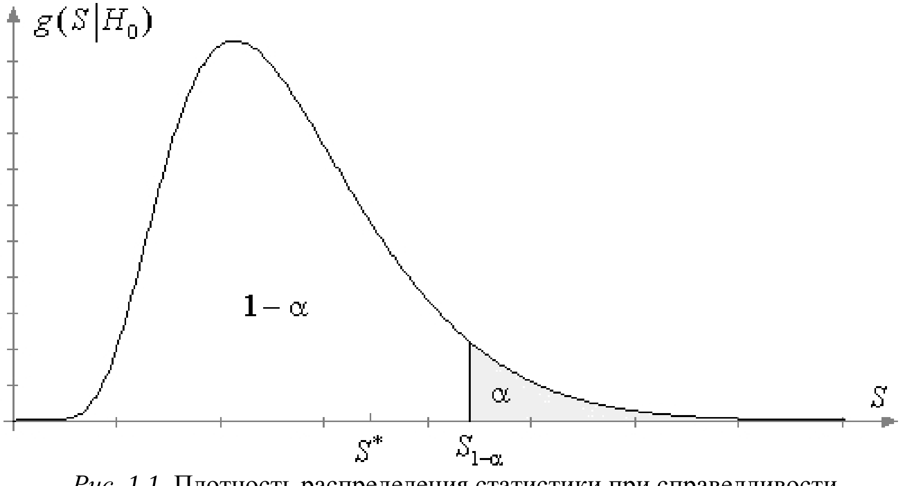

Рис. 1.1. Плотность распределения статистики при справедливости гипотезы H_0 и критическое значение для правостороннего критерия

Больше информации о степени соответствия выборки теоретическому закону можно почерпнуть из «достигнутого уровня значимости» (**p**-value): вероятности возможного превышения полученного значения статистики при справедливости H_0

$$P\{S > S^*\} = \int_{S^*}^{\infty} g(s|H_0)\,ds = 1 - G(S^*|H_0)\,. \qquad (1.2)$$

Именно эта вероятность позволяет судить о том, насколько хорошо выборка согласуется с теоретическим распределением, так как по существу представляет собой вероятность истинности нулевой гипотезы (см. рис. 1.2). Проверяемую гипотезу H_0 не отвергают, если $P\{S > S^*\} > \alpha$.

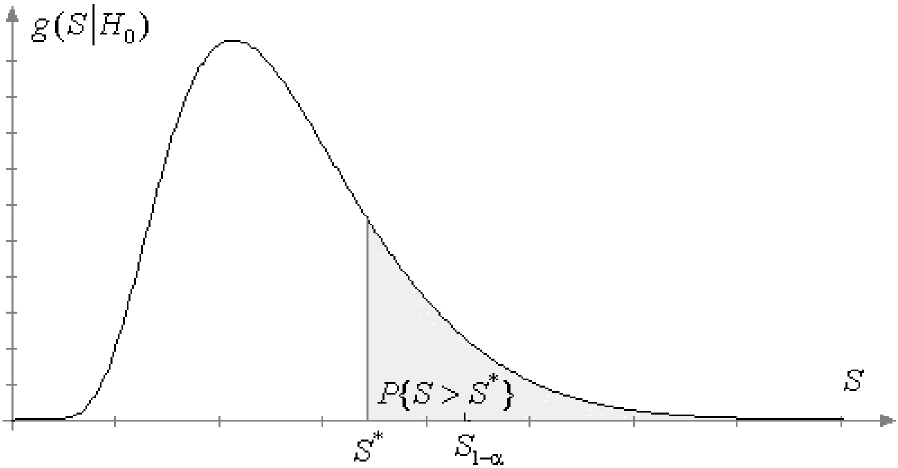

Рис. 1.2. Плотность распределения статистики при справедливости гипотезы H_0 и достигнутый уровень значимости

В случае двустороннего критерия критическая область состоит из двух частей. И проверяемая гипотеза H_0 отклоняется, если $S^* < S_{\alpha/2}$ или $S^* > S_{1-\alpha/2}$ (см. рис. 1.3). А достигнутый уровень значимости (**p**-value) в этом случае определяется соотношением

$$p_{value} = 2\min\left\{G(S^*|H_0),\, 1 - G(S^*|H_0)\right\}. \qquad (1.3)$$

Задачи оценивания параметров и проверки гипотез опираются на выборки независимых случайных величин. Случайность самой выборки предопределяет, что возможны и ошибки в результатах статистических выводов. С результатами проверки гипотез связывают ошибки двух видов: ошибка первого рода состоит в том, что отклоняют гипотезу H_0, когда она верна; ошибка второго рода состоит в том, что принимают (не отклоняют) гипотезу H_0, в то время как справедлива конкурирующая гипотеза H_1. Уровень значимости α задает вероятность ошибки первого рода. Обычно, используя критерии проверки гипотез, не рассматривают конкретную конкурирующую гипотезу. В таком случае при проверке гипотез о виде закона можно считать, что конкурирующая гипотеза имеет вид $H_1: \quad F(x) \neq F(x, \theta_0)$.

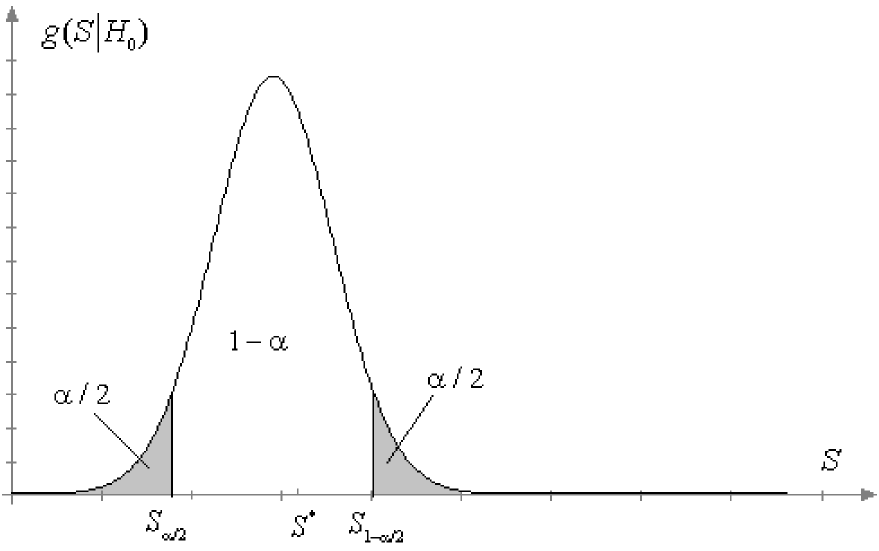

Рис. 1.3. Плотность распределения статистики при справедливости гипотезы H_0 и критические значения для двустороннего критерия

Если же гипотеза H_1 задана и имеет, например, вид H_1: $F(x) = F_1(x, \theta)$, то задание величины α для используемого критерия проверки гипотез определяет и вероятность ошибки второго рода β.

Ошибка второго рода заключается в том, что не отклоняется гипотеза H_0, когда на самом деле справедлива гипотеза H_1.

Вероятность ошибки второго рода β для правостороннего критерия определяется выражением

$$\beta = \int_{-\infty}^{S_{1-\alpha}} g(s|H_1)ds\ , \tag{1.4}$$

а для двустороннего – соотношением

$$\beta = \int_{S_{\alpha/2}}^{S_{1-\alpha/2}} g(s|H_1)ds\ . \tag{1.5}$$

Для конкретной альтернативы H_0 и H_1 задание вероятности ошибки 1-го рода определяет и вероятность ошибки 2-го рода. Рис. 1.4 поясняет это для правостороннего критерия. На рис. 1.4 $g(s\,|\,H_0)$ отображает плотность распределения статистики S при справедливости гипотезы H_0, а $g(s\,|\,H_1)$ – плотность распределения при справедливости H_1.

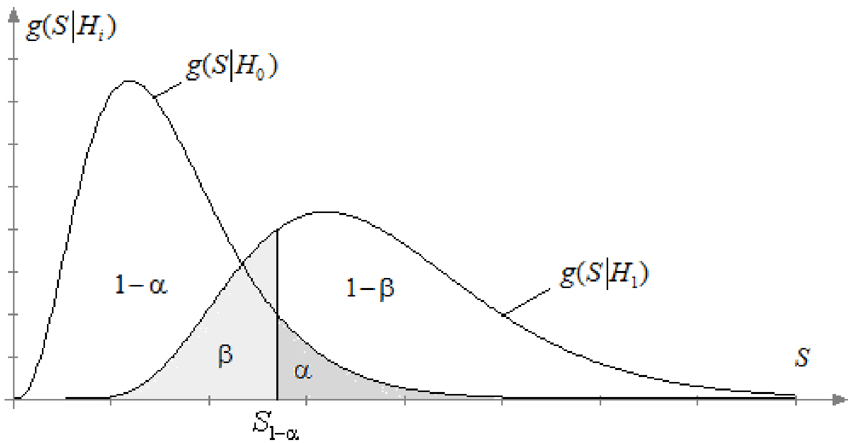

Рис. 1.4. Плотности распределения статистик при справедливости соответственно гипотез H_0 и H_1 в случае правостороннего критерия

Мощность критерия представляет собой величину $1-\beta$. Очевидно, что чем выше мощность используемого критерия при заданном значении α, тем лучше он различает гипотезы H_0 и H_1. Особенно важно, чтобы используемый критерий хорошо различал близкие конкурирующие гипотезы. Графически требование максимальной мощности критерия означает, что на рис. 1.4 плотности распределений статистики $g(s|H_0)$ и $g(s|H_1)$ должны быть максимально “раздвинуты”.

Аналогичным образом можно проиллюстрировать вероятности ошибок второго рода и мощности для двустороннего критериев (см. рис.1.5).

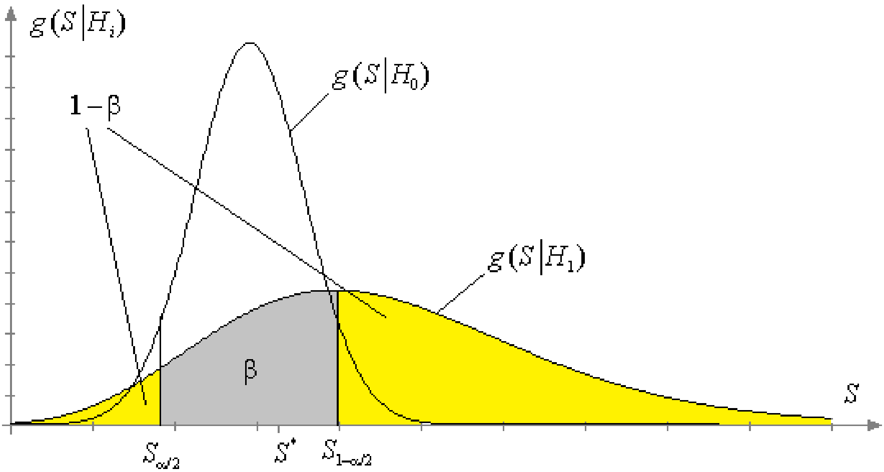

Рис. 1.5. Плотности распределения статистик при справедливости соответственно гипотез H_0 и H_1 в случае двустороннего критерия

Очевидно, что при проверке любой статистической гипотезы желательно использовать наиболее мощный критерий, который для заданной вероятности ошибки первого рода обеспечивает минимальную вероятность ошибки второго рода относительно любой конкурирующей гипотезы H_1. Ещё лучше использовать равномерно наиболее мощный критерий, который для любого заданного α обеспечивает минимальное значение β. Однако существование такого критерия для проверки конкретной гипотезы H_0 является редчайшим исключением. Нет такого и среди критериев, которые могут использоваться для проверки гипотезы о принадлежности наблюдаемой выборки равномерному закону.

В последние годы в публикациях, посвященных предлагаемым критериям или модификациям критериев проверки равномерности, как правило, пытаются сравнивать критерии по мощности, используя методы статистического моделирования. При этом перечень рассматриваемых критериев и рассматриваемых альтернатив бывает достаточно широк. Одним из таких примеров является работа [29].

1.3. Конкурирующие гипотезы, рассматриваемые при анализе мощности критериев

При анализе мощности критериев, используемых для проверки гипотезы вида H_0: $X \in Rav(0,1)$ о принадлежности наблюдаемой случайной величины равномерному закону, в качестве конкурирующих гипотез рассматривалась принадлежность выборок различным законам распределения вероятностей. Естественно, что наиболее интересна способность критериев различать близкие конкурирующие гипотезы. Именно при анализе близких альтернатив удается выяснить тонкие моменты, характеризующие свойства критериев, выявить принципиальные недостатки или достоинства критериев.

В тексте руководства приводятся и сравниваются оценки мощности всех рассмотренных критериев относительно 3-х конкурирующих гипотез, которые соответствуют принадлежности наблюдаемой случайной величины семейству бета-распределений 1-го рода с функцией плотности

$$f(x) = \frac{1}{\theta_2 \mathrm{B}(\theta_0, \theta_1)} \left(\frac{x-\theta_3}{\theta_2} \right)^{\theta_0 - 1} \left(1 - \frac{x-\theta_3}{\theta_2} \right)^{\theta_1 - 1}, \qquad (1.6)$$

где $\mathrm{B}(\theta_0, \theta_1) = \Gamma(\theta_0)\Gamma(\theta_1) / \Gamma(\theta_0 + \theta_1)$ – бета-функция, $\theta_0, \theta_1 \in (0, \infty)$ – параметры формы, $\theta_2 \in (0, \infty)$ – масштабный параметр, $\theta_3 \in (-\infty, \infty)$ – параметр сдвига, $x \in [0, \theta_2]$.

Обозначим функцию бета-распределения 1-го рода при конкретных значениях параметров как $B_I(\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3)$. Тогда три рассматриваемые и достаточно близкие к H_0 конкурирующие гипотезы H_1, H_2, H_3 принимают следующий вид:

$$H_1 : F(x) = B_I(1.5, 1.5, 1, 0), \; x \in [0,1];$$

$$H_2 : F(x) = B_I(0.8, 1, 1, 0), \; x \in [0,1];$$

$$H_3 : F(x) = B_I(1.1, 0.9, 1, 0), \; x \in [0,1].$$

Функции распределения вероятностей, соответствующие рассматриваемым гипотезам представлены на рис. 1.1, а плотности распределений – на рис. 1.2.

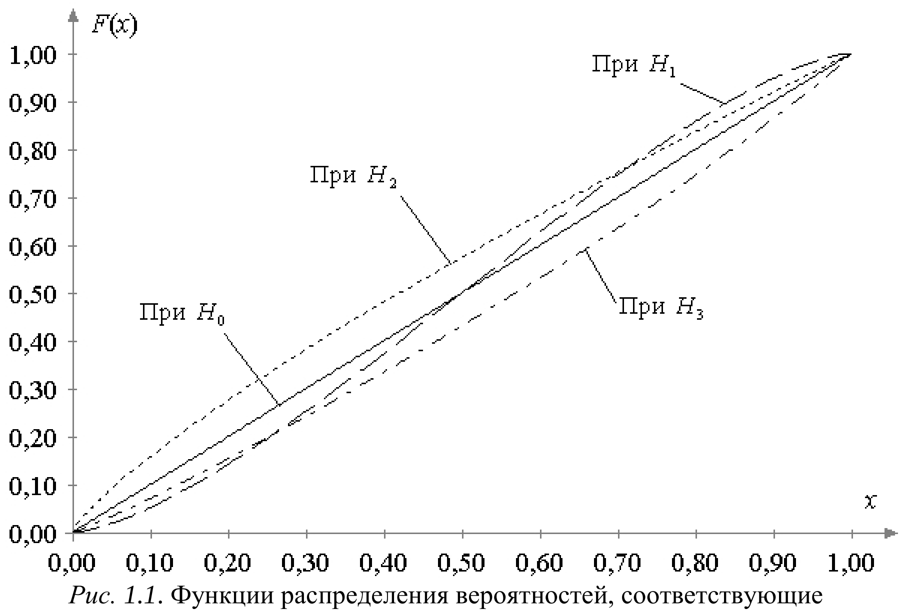

Рис. 1.1. Функции распределения вероятностей, соответствующие конкурирующим гипотезам

Следует обратить внимание, что конкурирующей гипотезе H_1 соответствует закон, функция распределения которого пересекается с функцией распределения равномерного закона, а при H_2 и H_3 функции распределения законов лежат выше и ниже функции равномерного. И способности различать гипотезы H_0 и H_1, и гипотезы H_0 и H_2 или H_3 у критериев оказываются различными.

Заметим, что анализ мощности критериев относительно H_1 позволил выявить неспособность отдельных критериев при малых объёмах выборок n и малых уровнях значимости α отличать эту гипотезу от H_0, то есть показал смещённость соответствующих критериев (мощность $1-\beta$ оказывается меньше α).

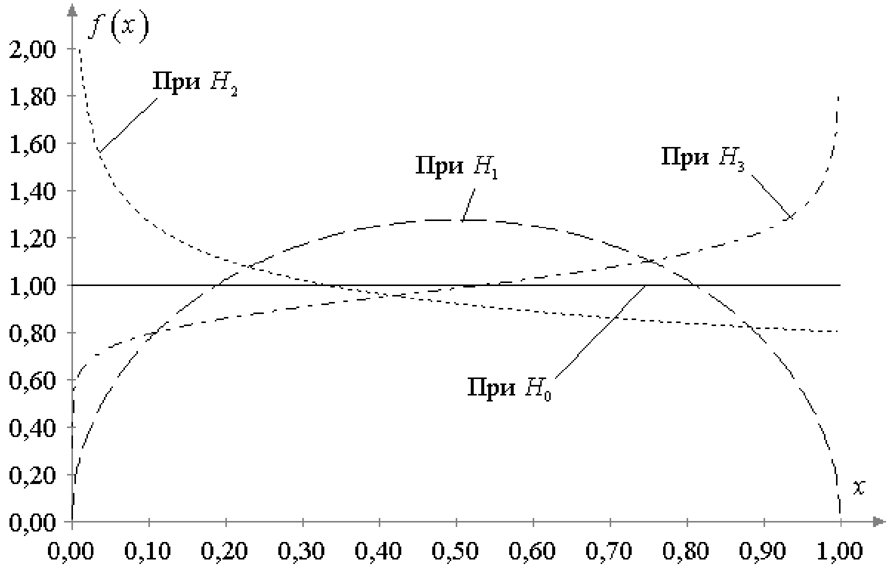

Рис. 1.2. Плотности распределения законов, соответствующих конкурирующим гипотезам

Причем указанный недостаток оказался свойственным не только значительной части специальных критериев проверки равномерности, но и большей части непараметрических критериев согласия.

1.4. Проверка равномерности на интервале [a , b]

Все рассматриваемые в руководстве критерии проверки равномерности изложены для стандартного случая проверки равномерности на интервале [0, 1]. И после формирования по выборке

$X_1, X_2, ..., X_n$ вариационного ряда $0 < x_{(1)} < x_{(2)} < ... < x_{(n)} < 1$ в статистиках критериев используются порядковые статистики следующего вида $U_i = x_{(i)}$, $i = \overline{1, n}$, $U_0 = 0$, $U_{n+1} = 1$.

В случае проверки гипотезы о принадлежности выборки $X_1, X_2, ..., X_n$ равномерному закону с параметром сдвига a и параметром масштаба $b - a$ для использования всех рассматриваемых в руководстве критериев следует поступать следующим образом.

По элементам $x_{(i)}$ вариационного ряда $a < x_{(1)} < x_{(2)} < ... < x_{(n)} < b$, построенного по выборке $X_1, X_2, ..., X_n$ порядковые статистики, используемые в критериях, принимают вид $U_i = \dfrac{x_{(i)} - a}{b - a}$, $i = \overline{1, n}$, $U_0 = 0$, $U_{n+1} = 1$.

Весь дальнейший порядок применения рассматриваемых критериев проверки равномерности остаётся неизменным (как и на [0, 1]).

1.5. Проверка сложных гипотез о равномерности закона

В общем случае при проверке гипотезы о принадлежности наблюдаемой случайной величины равномерному закону **простая** проверяемая гипотеза имеет вид H_0: $F(x) = \dfrac{x - a}{b - a}$, $x \in [a, b]$. где a и b известны.

Проверяемая гипотеза будет **сложной**, если по данной выборке находится и область определения равномерной случайной величины, то есть находятся оценки параметра сдвига a и параметра масштаба $b - a$.

Пусть $X_1, X_2, ..., X_n$ – выборка независимых наблюдений случайной величины X, по элементам которой построен вариационный ряд $x_{(1)} < x_{(2)} < ... < x_{(n)}$. Напомним, что $x_{(1)} = \min\left(X_1, X_2, ..., X_n\right)$, $x_{(n)} = \max\left(X_1, X_2, ..., X_n\right)$. Очевидно, что хорошей оценкой параметра сдвига является

$$\hat{a} = x_{(1)} - \frac{x_{(n)} - x_{(1)}}{n - 1}, \tag{1.7}$$

а оценкой правой границы области определения равномерной случайной величины будет

$$\hat{b} = x_{(n)} + \frac{x_{(n)} - x_{(1)}}{n-1}. \tag{1.8}$$

Следовательно, оценка параметра масштаба равномерного закона принимает вид

$$\hat{b} - \hat{a} = \frac{n+1}{n-1}\left(x_{(n)} - x_{(1)}\right). \tag{1.9}$$

Очевидно, что проверка сложной гипотезы о принадлежности $X_1, X_2, ..., X_n$ равномерному закону на интервале $[\hat{a}, \hat{b}]$, полученному по данной выборке, эквивалентна проверке простой гипотезы о принадлежности части выборки меньшего объёма $n-2$, соответствующей ряду $x_{(2)} < x_{(3)} < ... < x_{(n-1)}$, равномерному закону на интервале $\left[x_{(1)}, x_{(n)}\right]$, который соответствует размаху выборки.

В этом случае при использовании всех рассматриваемых в руководстве критериев значения порядковых статистик находим в соответствии с соотношениями $U_{i-1} = \frac{x_{(i)} - x_{(1)}}{x_{(n)} - x_{(1)}}$, $i = \overline{2,(n-1)}$, $U_0 = 0$, $U_{n-1} = 1$ и вычисляем статистику применяемого критерия при объеме выборки $n-2$.

А далее решение о результатах проверки принимаем, опираясь на распределение статистики критерия при объеме выборки $n-2$, или сравнивая значение статистики с критическим, взятым из соответствующей таблицы процентных точек при $n-2$. При справедливости проверяемой гипотезы элементы вариационного ряда U_i, $i = \overline{1,(n-2)}$, распределены равномерно на интервале [0, 1].

2. Критерии, ориентированные на проверку гипотезы о принадлежности выборки равномерному закону

2.1. Критерий Шермана

Критерий Шермана [38, 39, 63] относится к первой группе специальных критериев, использующей разности элементов вариационного ряда. Статистика критерия имеет вид

$$\omega_n = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n+1}\left|U_i - U_{i-1} - \frac{1}{n+1}\right|, \tag{2.1}$$

где U_i – элементы вариационного ряда, построенного по выборке $X_1, X_2, ..., X_n$ объёмом n, $U_0 = 0$, $U_{n+1} = 1$.

Критерий правосторонний: гипотеза H_0 отклоняется при больших значениях статистики ω_n. Критические значения статистики (2.1), полученные в результате статистического моделирования и расширяющие таблицу процентных точек, приведенную в [38, 39, 63], представлены в таблице 2.1.

Таблица 2.1

Критические значения статистики (2.1) критерия Шермана

n	$1-\alpha$				
	0.8	0.85	0.9	0.95	0.99
4	0.416	0.440	0.468	0.509	0.589
5	0.416	0.436	0.462	0.502	0.574
6	0.415	0.434	0.458	0.494	0.563
7	0.415	0.432	0.454	0.488	0.551
8	0.414	0.430	0.451	0.482	0.542
9	0.412	0.428	0.448	0.478	0.535
10	0.411	0.426	0.445	0.474	0.528
11	0.410	0.424	0.443	0.470	0.521
12	0.409	0.423	0.440	0.466	0.516
13	0.408	0.422	0.438	0.463	0.510

Окончание таблицы 2.1

n	$1-\alpha$				
	0.8	0.85	0.9	0.95	0.99
14	0.407	0.420	0.436	0.460	0.506
15	0.407	0.419	0.434	0.458	0.502
16	0.406	0.418	0.433	0.456	0.498
17	0.405	0.417	0.431	0.453	0.495
18	0.404	0.416	0.430	0.451	0.492
19	0.404	0.415	0.429	0.449	0.489
20	0.403	0.414	0.427	0.448	0.486
30	0.398	0.407	0.418	0.435	0.466
40	0.395	0.403	0.412	0.427	0.454
50	0.393	0.400	0.408	0.421	0.445
100	0.386	0.391	0.397	0.406	0.423
150	0.383	0.387	0.392	0.399	0.413
200	0.381	0.385	0.389	0.395	0.407
300	0.379	0.382	0.385	0.390	0.400

При справедливости H_0 и больших объёмах выборок n статистика ω_n приближенно подчиняется нормальному распределению. Зависимость распределений статистики (2.1) от объёма выборки иллюстрирует рис. 2.1.

Нормализованная статистика

$$\omega_n^* = \frac{\omega_n - E[\omega_n]}{\sqrt{D[\omega_n]}}, \tag{2.2}$$

где математическое ожидание и дисперсия статистики (2.1) определяются выражениями

$$E[\omega_n] = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}, \quad D[\omega_n] = \frac{2n^{n+2} + n(n-1)^{n+2}}{(n+2)(n+1)^{n+2}} - \left(\frac{n}{n+1}\right)^{2n+2},$$

при $n \to \infty$ сходится к стандартному нормальному закону [38, 39, 63].

Отметим, что оценки математического ожидания и дисперсии распределений статистики (2.1), получаемые при статистическом моделировании, совпадают со значениями, вычисляемыми по приведенным формулам для $E[\omega_n]$ и $D[\omega_n]$, с точностью до 3-го знака.

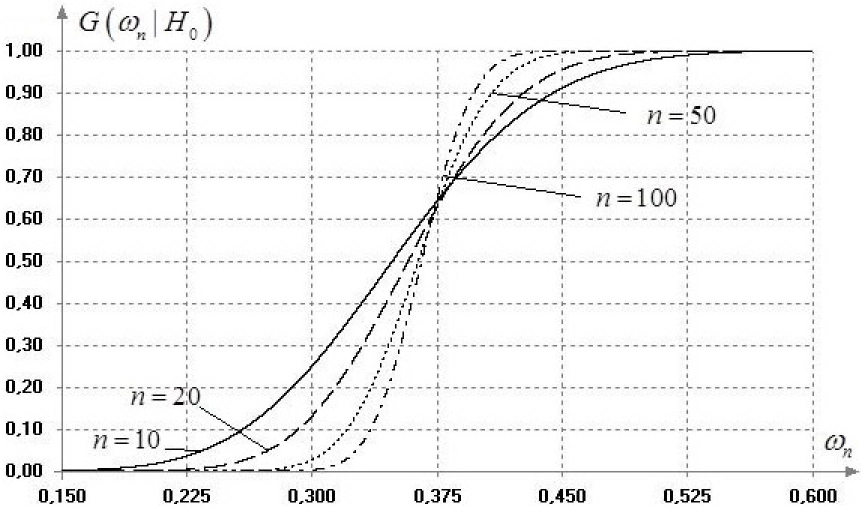

Рис. 2.1. Зависимость распределения статистики (2.1) Шермана от n

Отличием распределения статистики (2.2) от стандартного нормального закона можно пренебрегать при $n \geq 20$.

В тех же источниках приводится ещё одна модификация статистики, задаваемая выражением

$$\tilde{\omega}_n = V - \frac{0,0955}{\sqrt{n}}\left(V^2 - 1\right), \tag{2.3}$$

где

$$V = \frac{\omega_n - 0,3679\left(1 - \dfrac{1}{2n}\right)}{\dfrac{0,2431}{\sqrt{n}}\left(1 - \dfrac{0,605}{n}\right)}.$$

Распределение модифицированной статистики (2.3) ещё быстрее сходится к стандартному нормальному закону (см. рис. 2.2).

Если объём выборки позволяет использовать нормальную аппроксимацию, то оценка достигнутого уровня значимости (p-value), задаваемая соотношением (1.2), определяется выражением

$$P\{S \geq S^*\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{S^*}^{\infty} \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\} dt ,$$

где S^* – значение используемой статистики (2.2 или 2.3), вычисленное по анализируемой выборке. Проверяемая гипотеза H_0 не отклоняется, если для заданной вероятности α ошибки 1-го рода $P\{S \geq S^*\} > \alpha$.

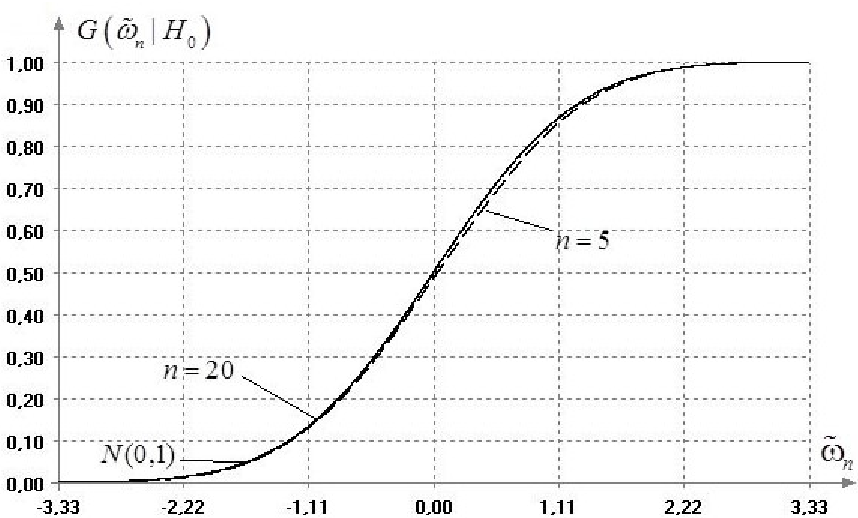

Рис. 2.2. Сходимость распределения статистики (2.3) Шермана к стандартному нормальному закону $N(0,1)$

Оценки мощности критерия равномерности Шермана для значений вероятностей ошибок 1-го рода $\alpha = 0.15, 0.1, 0.05, 0.025, 0.01$, полученные в результате статистического моделирования, по отношению к конкурирующей гипотезе H_1 приведены в таблице 2.2, оценки мощности по отношению к гипотезам H_2 и H_3 – в таблицах 2.3 и 2.4 соответственно.

По отношению к конкурирующей гипотезе H_1 при малых n и α отмечена смещённость критерия Шермана (мощность $1-\beta$ оказывается меньше заданной вероятности ошибки 1-го рода α). Чтобы подчеркнуть это, в таблице 2.2 соответствующие оценки мощности выделены серым цветом.

Таблица 2.2

Мощность критерия Шермана относительно гипотезы H_1

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.104	0.065	0.029	0.013	0.005
20	0.138	0.091	0.045	0.022	0.009
30	0.166	0.112	0.057	0.029	0.012
40	0.189	0.130	0.068	0.036	0.015
50	0.210	0.147	0.079	0.043	0.018
100	0.292	0.215	0.126	0.073	0.035
150	0.358	0.272	0.167	0.102	0.051
200	0.415	0.325	0.208	0.131	0.069
300	0.510	0.415	0.283	0.188	0.107

Таблица 2.3

Мощность критерия Шермана относительно гипотезы H_2

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.207	0.147	0.081	0.044	0.020
20	0.219	0.156	0.087	0.048	0.022
30	0.229	0.164	0.092	0.051	0.024
40	0.237	0.171	0.096	0.054	0.025
50	0.245	0.177	0.101	0.057	0.027
100	0.277	0.204	0.119	0.069	0.033
150	0.304	0.226	0.135	0.080	0.039
200	0.328	0.248	0.150	0.090	0.045
300	0.370	0.285	0.178	0.110	0.057

Таблица 2.4

Мощность критерия Шермана относительно гипотезы H_3

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.171	0.117	0.061	0.032	0.013
20	0.179	0.123	0.065	0.034	0.015
30	0.186	0.129	0.068	0.036	0.016
40	0.192	0.134	0.071	0.038	0.016
50	0.197	0.137	0.074	0.039	0.017
100	0.218	0.154	0.084	0.046	0.020
150	0.234	0.167	0.093	0.051	0.023
200	0.249	0.180	0.101	0.056	0.026
300	0.274	0.201	0.115	0.065	0.031

Для иллюстрации факта смещённости на рис. 2.3 показаны распределения $G(\omega_n | H_i)$ статистики (2.1) Шермана, соответствующие справедливости H_0 и H_1, при объёмах выборок $n = 10$ и $n = 50$.

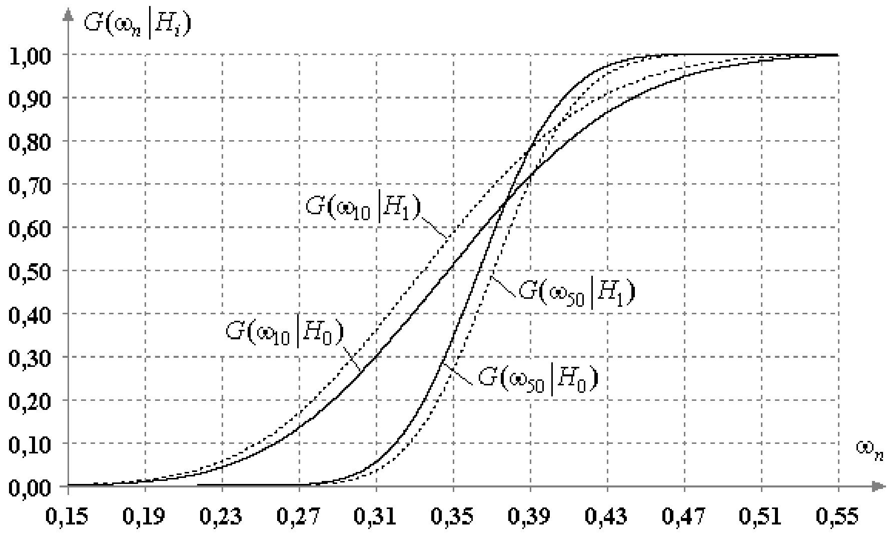

Рис. 2.3. Распределения $G(\omega_n | H_i)$ статистики (2.1) Шермана

Критерий правосторонний, и проверяемая гипотеза отклоняется при больших значениях статистики. Как можно видеть, распределение статистики $G(\omega_{10}|H_1)$, имеющее место при справедливости H_1, сдвинуто относительно $G(\omega_{10}|H_0)$ не вправо, а влево. Следовательно, мощность $1-\beta$ оказывается меньше соответствующего α. С ростом n смещённость исчезает (см. $G(\omega_{50}|H_0)$ и $G(\omega_{50}|H_1)$ на рис. 2.3).

В качестве недостатка критерия Шермана, наряду с возможной смещённостью, можно указать, как правило, невысокую мощность.

2.2. Критерий Кимбелла

Статистика критерия Кимбелла [17] похожа на статистику критерия Шермана и имеет вид

$$A=\sum_{i=1}^{n+1}\left(U_i-U_{i-1}-\frac{1}{n+1}\right)^2, \tag{2.4}$$

где, как и в критерии Шермана, U_i – элементы вариационного ряда, построенного по выборке $X_1, X_2, ..., X_n$ объёмом n, $U_0=0$, $U_{n+1}=1$.

Проверяемая гипотеза H_0 отклоняется при больших значениях статистики (2.4) (критерий правосторонний). Критические значения статистики Кимбелла, полученные в результате статистического моделирования, представлены в таблице 2.5.

Таблица 2.5

Критические значения статистики (2.4) критерия Кимбелла

n	$1-\alpha$				
	0.8	0.85	0.9	0.95	0.99
2	0.263	0.304	0.358	0.437	0.557
3	0.223	0.252	0.295	0.367	0.506
4	0.192	0.216	0.250	0.309	0.440
5	0.168	0.188	0.216	0.265	0.381
6	0.149	0.166	0.190	0.232	0.333

Окончание таблицы 2.5

n	$1-\alpha$				
	0.8	0.85	0.9	0.95	0.99
7	0.133	0.148	0.168	0.205	0.293
8	0.120	0.133	0.151	0.183	0.260
9	0.110	0.121	0.137	0.165	0.234
10	0.101	0.111	0.125	0.150	0.210
11	0.093	0.102	0.115	0.137	0.191
12	0.087	0.095	0.106	0.126	0.176
13	0.081	0.088	0.098	0.116	0.161
14	0.076	0.082	0.092	0.108	0.149
15	0.071	0.077	0.086	0.101	0.139
16	0.067	0.073	0.081	0.095	0.129
17	0.064	0.069	0.076	0.089	0.121
18	0.060	0.065	0.072	0.084	0.114
19	0.057	0.062	0.068	0.080	0.107
20	0.055	0.059	0.065	0.075	0.101
30	0.037	0.040	0.043	0.049	0.063
40	0.028	0.030	0.032	0.036	0.045
50	0.022	0.024	0.025	0.028	0.035
100	0.011	0.012	0.012	0.013	0.015
150	0.0073	0.0076	0.0079	0.0084	0.0096
200	0.0055	0.0056	0.0058	0.0062	0.0069
300	0.0036	0.0037	0.0038	0.0040	0.0043

Зависимость распределения статистики от объема выборок n иллюстрирует рис. 2.4.

Полученные в результате статистического моделирования оценки мощности критерия Кимбелла при проверке равномерности по отношению к конкурирующей гипотезе H_1 представлены в таблице

2.6, оценки мощности по отношению к гипотезам H_2 и H_3 – в таблицах 2.7 и 2.8 соответственно.

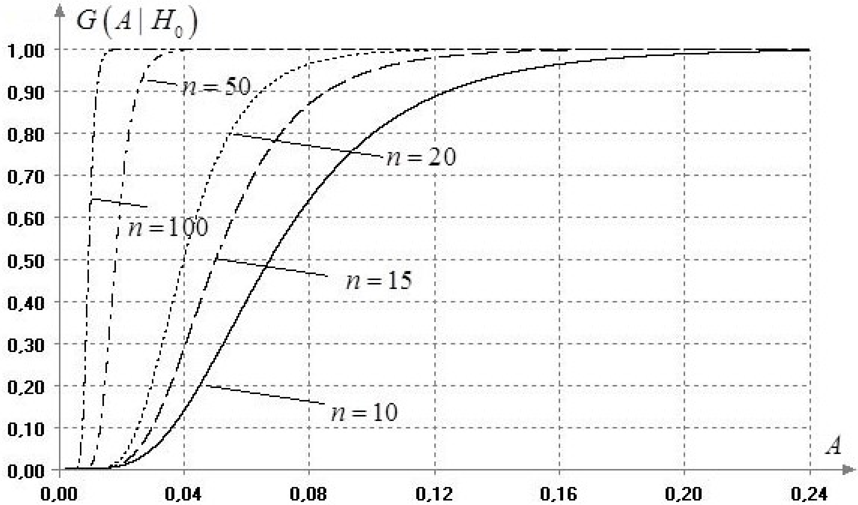

Рис. 2.4. Распределения статистики (2.4) критерия Кимбелла в зависимости от n

Таблица 2.6

Мощность критерия Кимбелла относительно гипотезы H_1

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.097	0.059	0.025	0.010	0.003
20	0.131	0.084	0.040	0.018	0.006
30	0.164	0.110	0.055	0.027	0.011
40	0.195	0.134	0.071	0.037	0.015
50	0.225	0.160	0.088	0.048	0.021
100	0.361	0.279	0.177	0.110	0.057
150	0.475	0.388	0.268	0.182	0.107
200	0.573	0.485	0.357	0.257	0.163
300	0.720	0.642	0.516	0.406	0.287

Таблица 2.7

Мощность критерия Кимбелла относительно гипотезы H_2

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.203	0.143	0.078	0.042	0.019
20	0.216	0.152	0.084	0.046	0.020
30	0.226	0.160	0.088	0.049	0.022
40	0.234	0.167	0.093	0.052	0.023
50	0.242	0.174	0.098	0.055	0.025
100	0.276	0.201	0.116	0.066	0.030
150	0.303	0.225	0.133	0.077	0.037
200	0.328	0.246	0.148	0.087	0.042
300	0.371	0.284	0.176	0.107	0.054

Таблица 2.8

Мощность критерия Кимбелла относительно гипотезы H_3

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.170	0.116	0.060	0.031	0.013
20	0.180	0.124	0.065	0.034	0.015
30	0.189	0.131	0.070	0.037	0.016
40	0.196	0.137	0.073	0.040	0.017
50	0.203	0.142	0.077	0.042	0.018
100	0.231	0.165	0.092	0.051	0.023
150	0.252	0.183	0.105	0.059	0.028
200	0.272	0.199	0.116	0.067	0.032
300	0.306	0.229	0.137	0.081	0.040

Как и критерий Шермана, по отношению к конкурирующей гипотезе H_1 при малых n и α критерий Кимбелла оказывается смещенным (мощность $1-\beta$ оказывается меньше заданной вероятности ошибки 1-го рода α). В таблице 2.6 такие оценки мощности выделены серым цветом.

В целом же критерий Кимбелла показывает несколько большую мощность по сравнению с критерием Шермана.

Недостатком при использовании критерия является зависимость распределения статистики от объема выборки n и необходимость использования таблицы процентных точек.

По своим статистическим свойствам критерий Кимбелла эквивалентен критерию Морана со статистикой (2.5) и критерию Гринвуда со статистикой (2.21).

2.3. Критерий Морана 1

Статистика предложенного в [30] критерия очень близка к статистике критерия Кимбелла и имеет вид

$$B=\sum_{i=1}^{n+1}\left(U_i-U_{i-1}\right)^2 , \qquad (2.5)$$

где также $U_0=0$, $U_{n+1}=1$.

Критерий правосторонний. Процентные точки распределения статистики (2.5), полученные при статистическом моделировании представлены в таблице 2.9. Зависимость распределений статистики критерия от объёма выборок n при справедливости проверяемой гипотезы H_0 иллюстрирует рис. 2.5.

Естественно, распределения статистики (2.5) при справедливости проверяемой гипотезы H_0 или справедливости конкурирующих гипотез отличаются от соответствующих распределений статистики (2.4), однако выводы при использовании данного критерия всегда будут идентичны выводам по критерию Кимбелла. Аналогично, относительно тех же конкурирующих гипотез критерии эквивалентны по мощности. Критерий эквивалентен критерию Гринвуда (2.21).

В частности, оценки мощности критерия со статистикой (2.5) относительно конкурирующих гипотез H_1, H_2 и H_3 полностью совпадают с соответствующими оценкам для критерия Кимбелла (см. таблицы 2.6–2.8).

Таблица 2.9

Критические значения статистики (2.5) критерия Морана

n	$1-\alpha$				
	0.8	0.85	0.9	0.95	0.99
3	0.472	0.502	0.545	0.617	0.756
4	0.392	0.416	0.450	0.509	0.640
5	0.334	0.355	0.383	0.432	0.547
6	0.291	0.308	0.332	0.374	0.476
7	0.258	0.273	0.293	0.330	0.418
8	0.231	0.244	0.262	0.294	0.371
9	0.210	0.221	0.237	0.265	0.334
10	0.192	0.202	0.216	0.240	0.301
11	0.176	0.185	0.198	0.220	0.275
12	0.163	0.171	0.183	0.203	0.253
13	0.152	0.159	0.170	0.188	0.233
14	0.142	0.149	0.158	0.175	0.216
15	0.134	0.140	0.148	0.164	0.201
16	0.126	0.132	0.140	0.154	0.188
17	0.119	0.124	0.132	0.145	0.177
18	0.113	0.118	0.125	0.137	0.166
19	0.107	0.112	0.118	0.129	0.157
20	0.102	0.107	0.113	0.123	0.149
30	0.069	0.072	0.075	0.081	0.096
40	0.052	0.054	0.056	0.060	0.070
50	0.042	0.043	0.045	0.048	0.054
100	0.0210	0.0215	0.0220	0.0230	0.0253
150	0.0140	0.0142	0.0145	0.0150	0.0162
200	0.0104	0.0106	0.0108	0.0111	0.0118
300	0.0069	0.0070	0.0071	0.0073	0.0077

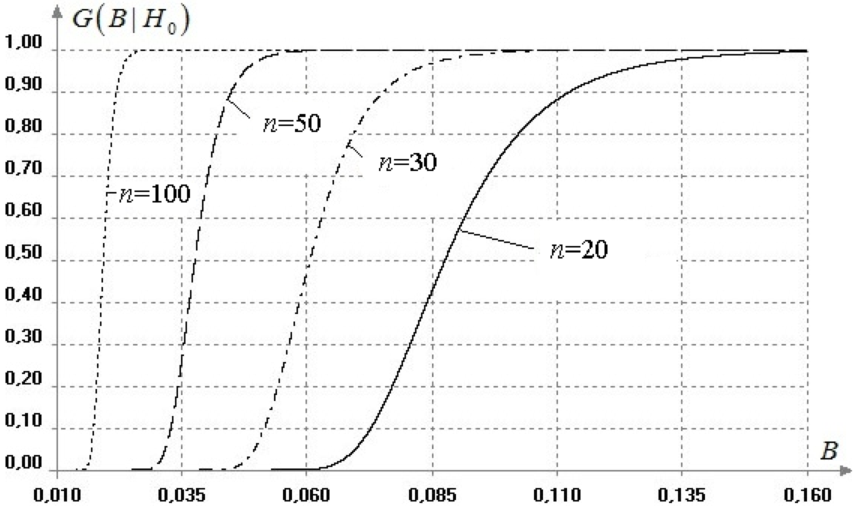

Рис. 2.5. Распределения статистики (2.5) критерия Морана в зависимости от n

Недостаток у критерия Морана тот же, что и у критерия Кимбелла: зависимость распределения статистики от объема выборки n и необходимость использования таблицы процентных точек.

2.4. Критерий Морана 2

Статистика критерия, предложенного Мораном в [31] имеет вид

$$M_n = -\sum_{i=1}^{n+1} \ln\left[(n+1)(U_i - U_{i-1})\right], \tag{2.6}$$

где $U_0 = 0$, $U_{n+1} = 1$.

Хотя в [63] говорится, что критерий двусторонний, на самом деле он правосторонний. При заданном уровне значимости α проверяемая гипотеза H_0 о равномерности не отклоняется при $M_n \le M_{n,\alpha}$. Критические значения статистики (2.6), полученные в результате статистического моделирования, несколько расширяющие и уточняющие результаты [6], представлены в таблице 2.10.

Оценки мощности критерия Морана со статистикой (2.6) относительно конкурирующих гипотез H_1, H_2 и H_3 представлены в таблицах 2.11–2.13 соответственно.

Таблица 2.10

Критические значения статистики (2.6) Морана

n	$1-\alpha$				
	0.8	0.85	0.9	0.95	0.99
3	2.770	3.162	3.698	4.589	6.579
4	3.545	3.980	4.573	5.547	7.681
5	4.290	4.769	5.410	6.462	8.705
6	5.019	5.528	6.213	7.316	9.684
7	5.741	6.281	7.008	8.170	10.638
8	6.445	7.013	7.768	8.979	11.545
9	7.144	7.741	8.534	9.803	12.480
10	7.834	8.458	9.285	10.592	13.358
11	8.515	9.161	10.010	11.366	14.201
12	9.191	9.858	10.745	12.153	15.071
13	9.870	10.562	11.476	12.910	15.916
14	10.543	11.255	12.195	13.673	16.745
15	11.203	11.939	12.903	14.422	17.569
16	11.873	12.628	13.615	15.173	18.373
17	12.539	13.316	14.329	15.914	19.187
18	13.196	13.984	15.023	16.652	19.971
19	13.849	14.658	15.723	17.380	20.756
20	14.499	15.326	16.417	18.114	21.587
21	15.157	16.005	17.110	18.836	22.359
22	15.804	16.669	17.794	19.560	23.159
23	16.457	17.339	18.489	20.262	23.922
24	17.104	18.000	19.168	20.984	24.673
25	17.742	18.658	19.844	21.692	25.444
30	20.961	21.944	23.233	25.215	29.210
40	27.316	28.436	29.884	32.115	36.573
50	33.585	34.821	36.415	38.860	43.719
100	64.431	66.127	68.306	71.612	78.113

Окончание таблицы 2.10

n	$1-\alpha$				
	0.8	0.85	0.9	0.95	0.99
150	94.824	96.869	99.496	103.460	111.119
200	124.966	127.296	130.297	134.832	143.549
300	184.842	187.676	191.296	196.771	207.32

Таблица 2.11

Мощность критерия Морана 2 относительно гипотезы H_1

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.113	0.072	0.034	0.016	0.006
20	0.141	0.093	0.046	0.023	0.009
30	0.161	0.108	0.055	0.028	0.011
40	0.179	0.122	0.063	0.032	0.013
50	0.195	0.135	0.071	0.037	0.016
100	0.260	0.187	0.105	0.058	0.026
150	0.313	0.232	0.136	0.078	0.038
200	0.359	0.272	0.166	0.099	0.049
300	0.438	0.344	0.222	0.139	0.073

В [34] показано, что статистика

$$\tilde{M}_n = \frac{12(n+1)}{7n+8} M_n \tag{2.7}$$

подчиняется χ^2-распределению с n степенями свободы. Тогда при заданном уровне значимости α проверяемая гипотеза H_0 о равномерности не отклоняется при $\tilde{M}_n \le \chi^2_{n,1-\alpha}$, где $\chi^2_{n,1-\alpha}$ – соответствующая квантиль χ^2_n-распределения. Опираясь на χ^2_n-распределение в соответствии с соотношением (1.2) может быть найдено приближенное значение достигнутого уровня значимости (p-value).

Т а б л и ц а 2.12

Мощность критерия Морана 2 относительно гипотезы H_2

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.212	0.150	0.083	0.046	0.021
20	0.221	0.157	0.087	0.048	0.022
30	0.228	0.162	0.090	0.050	0.023
40	0.234	0.168	0.094	0.052	0.024
50	0.240	0.172	0.097	0.054	0.025
100	0.266	0.193	0.111	0.063	0.029
150	0.287	0.211	0.123	0.071	0.034
200	0.307	0.228	0.135	0.078	0.038
300	0.341	0.258	0.156	0.093	0.046

Т а б л и ц а 2.13

Мощность критерия Морана 2 относительно гипотезы H_3

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.170	0.116	0.060	0.031	0.013
20	0.177	0.121	0.063	0.033	0.014
30	0.182	0.124	0.065	0.034	0.014
40	0.186	0.128	0.067	0.035	0.015
50	0.190	0.131	0.069	0.036	0.015
100	0.206	0.143	0.077	0.041	0.018
150	0.219	0.154	0.084	0.045	0.020
200	0.231	0.163	0.090	0.048	0.021
300	0.251	0.180	0.100	0.055	0.025

Однако действительное распределение статистики (2.7) заметно отличается от χ_n^2-распределения. На рис. 2.6 показано распределение $G(\tilde{M}_n | H_0)$ статистики (2.7) при $n = 50$ и соответствующее χ_{50}^2-

распределение, которые существенно отличаются, что, вообще говоря, может приводить к некорректности вывода.

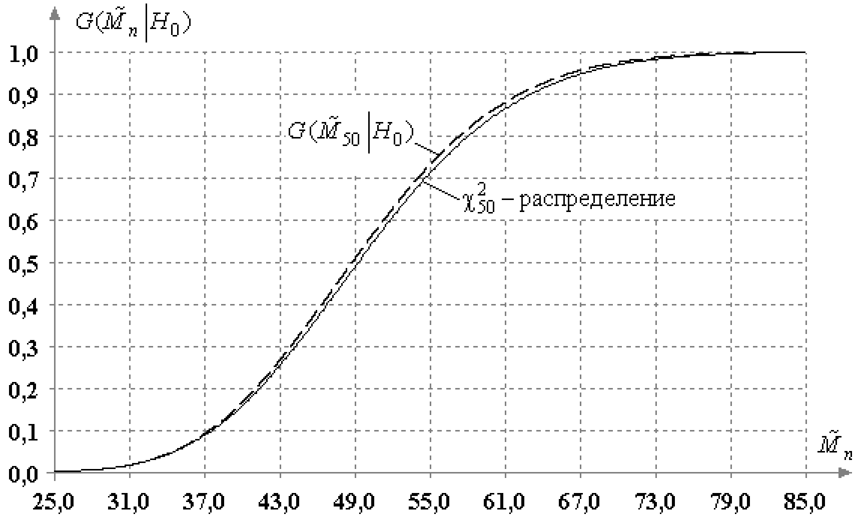

Рис. 2.6. Распределение статистики (2.7) при $n = 50$ и аппроксимирующее χ^2_{50} -распределение

В [63] говорится, что, используя аппроксимацию Вилсона-Хилферти, можно перейти к статистике

$$z = \frac{\sqrt[3]{\tilde{M}_n} - \left(1 - \frac{2}{9n}\right)}{\sqrt{\frac{2}{9n}}}, \qquad (2.8)$$

которая должна подчиняться стандартному нормальному закону. В этом случае проверяемая гипотеза H_0 о равномерности не отклоняется, если $z \le N_{1-\alpha}$, где $N_{1-\alpha}$ – соответствующая квантиль стандартного нормального закона. Оценка достигнутого уровня значимости может быть найдена по соотношению (1.2) в соответствии со стандартным нормальным законом.

Однако в данном случае распределение статистики (2.8) также существенно отличается от стандартного нормального закона. На рис. 2.7 показано распределение $G(z_n|H_0)$ статистики (2.8) при $n = 50$ и функция распределения стандартного нормального закона. Подобное различие может приводить к некорректности вывода.

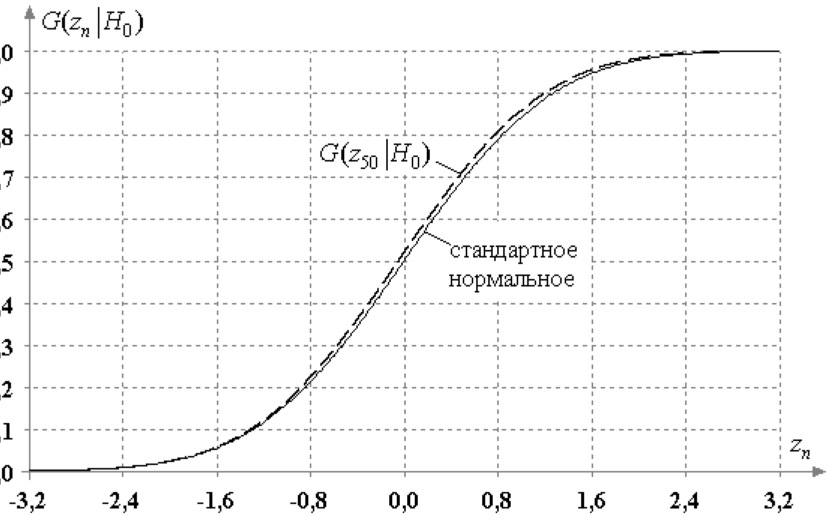

Рис. 2.7. Распределение статистики (2.8) при $n = 50$
и стандартное нормальное распределение

Следует заметить, что возможны проблемы с вычислением статистики, если в анализируемой выборке встретятся повторяющиеся значения.

Как можно заметить, во всех случаях критерий обладает не очень высокой мощностью. Учитывая это и другие нюансы можно считать, что критерий не относится к предпочтительным для применения.

2.5. Критерий Ченга-Спиринга

Данный критерий предложен в работе [7]. Статистика критерия имеет вид:

$$W_p = \frac{\left[\left(U_n - U_1\right)\frac{n+1}{n-1}\right]^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(U_i - \bar{U}\right)^2} \tag{2.9}$$

где разность $U_n - U_1$ представляет собой выборочный размах, а

$$\bar{U} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} U_i \, .$$

При справедливости проверяемой гипотезы H_0 всегда выполняются неравенства [63]:

$$\frac{2(n+1)^2}{(n-1)^2} \geq W_p \geq \frac{4(n+1)^2}{n(n-1)^2} \quad \text{(для четных } n\text{)}$$

$$\frac{2(n+1)^2}{(n-1)^2} \geq W_p \geq \frac{4n(n+1)}{(n-1)^3} \quad \text{(для нечетных } n\text{)}.$$

Зависимость распределений статистики (2.9) при справедливости H_0 от объема выборок n демонстрируется на рис. 2.8.

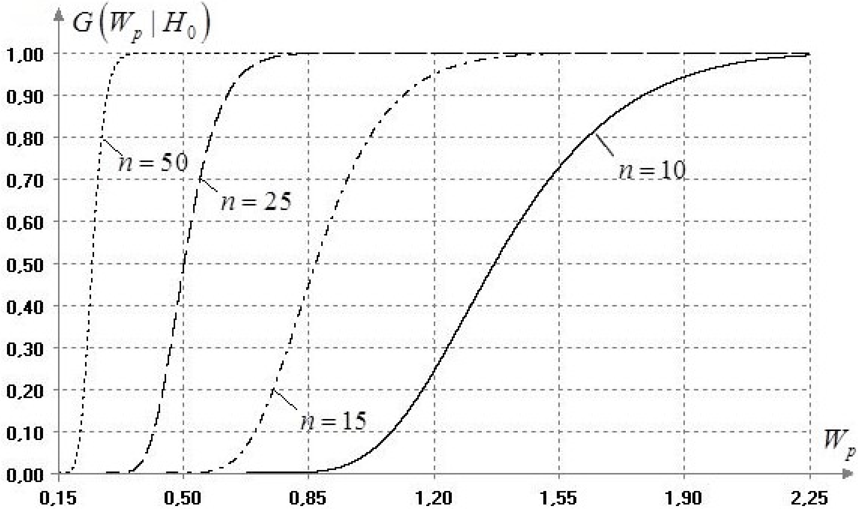

Рис. 2.8. Распределения статистики (2.9) критерия Ченга-Спиринга в зависимости от n

Критерий двусторонний: проверяемая гипотеза H_0 не отклоняется, если $W_{\alpha/2} \leq W_p \leq W_{1-\alpha/2}$. Критические значения в виде $W_1 = W_{\alpha/2}$ и $W_2 = W_{1-\alpha/2}$ для уровней значимости $\alpha = 0.2, 0.15, 0.1, 0.05, 0.01$, полученные в результате статистического моделирования и расширяющие таблицу критических значений, приведенную в [7] и [63], представлены в таблице 2.14.

Таблица 2.14

Критические значения статистики (2.9) критерия Ченга-Спиринга

n	$1-\alpha$									
	0.8		0.85		0.9		0.95		0.99	
	W_1	W_2	W_1	W_2	W_1	W_2	W_1	W_2	W_1	W_2
3	6.300	7.974	6.224	7.985	6.149	7.993	6.075	7.998	6.015	7.99993
4	3.738	5.316	3.605	5.374	3.448	5.433	3.243	5.494	2.978	5.543
5	2.581	4.010	2.506	4.088	2.420	4.179	2.309	4.293	2.129	4.427
6	2.007	3.222	1.954	3.301	1.891	3.400	1.801	3.537	1.651	3.739
7	1.651	2.697	1.607	2.769	1.554	2.863	1.479	3.005	1.347	3.244
8	1.404	2.316	1.367	2.383	1.321	2.470	1.255	2.606	1.146	2.858
9	1.222	2.024	1.190	2.087	1.150	2.169	1.093	2.297	0.9998	2.548
10	1.084	1.791	1.056	1.850	1.021	1.928	0.972	2.048	0.889	2.287
11	0.975	1.602	0.950	1.657	0.920	1.729	0.876	1.842	0.802	2.070
12	0.887	1.448	0.864	1.497	0.837	1.564	0.798	1.671	0.731	1.886
13	0.814	1.319	0.794	1.364	0.769	1.425	0.734	1.524	0.673	1.727
14	0.753	1.210	0.735	1.251	0.712	1.307	0.680	1.398	0.624	1.589
15	0.700	1.118	0.684	1.155	0.663	1.206	0.633	1.290	0.582	1.469
16	0.655	1.037	0.640	1.071	0.621	1.118	0.593	1.195	0.546	1.363
17	0.615	0.967	0.601	0.999	0.583	1.042	0.558	1.113	0.514	1.268
18	0.581	0.906	0.567	0.935	0.551	0.975	0.527	1.040	0.486	1.186
19	0.550	0.852	0.537	0.878	0.522	0.915	0.500	0.976	0.461	1.111
20	0.522	0.803	0.510	0.828	0.496	0.862	0.475	0.919	0.439	1.045
21	0.497	0.760	0.486	0.783	0.473	0.815	0.453	0.867	0.419	0.986
22	0.475	0.720	0.464	0.742	0.451	0.772	0.433	0.821	0.400	0.931
23	0.454	0.685	0.444	0.705	0.432	0.733	0.415	0.779	0.384	0.881
24	0.435	0.653	0.426	0.672	0.415	0.698	0.398	0.742	0.369	0.837
25	0.418	0.623	0.409	0.641	0.398	0.666	0.383	0.706	0.355	0.797
30	0.349	0.507	0.343	0.521	0.334	0.540	0.322	0.570	0.300	0.639
40	0.264	0.368	0.259	0.377	0.253	0.389	0.245	0.408	0.230	0.451
50	0.213	0.288	0.209	0.294	0.205	0.303	0.198	0.316	0.187	0.345

Окончание таблицы 2.14

Критические значения статистики (2.9) критерия Ченга-Спиринга

n	$1-\alpha$									
	0.8		0.85		0.9		0.95		0.99	
	W_1	W_2	W_1	W_2	W_1	W_2	W_1	W_2	W_1	W_2
100	0.109	0.136	0.108	0.138	0.106	0.141	0.103	0.145	0.099	0.155
150	0.0738	0.0886	0.0730	0.0897	0.0720	0.0911	0.0706	0.0934	0.0679	0.0982
200	0.0558	0.0655	0.0553	0.0662	0.0547	0.0671	0.0537	0.0685	0.0519	0.0715
300	0.0377	0.0429	0.0374	0.0433	0.0370	0.0438	0.0365	0.0445	0.0354	0.0461

Полученные в результате статистического моделирования оценки мощности критерия Ченга-Спиринга при проверке равномерности по отношению к конкурирующей гипотезе H_1 представлены в таблице 2.15, оценки мощности по отношению к гипотезам H_2 и H_3 – в таблицах 2.16 и 2.17 соответственно.

Таблица 2.15

Мощность критерия Ченга-Спиринга относительно гипотезы H_1

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.161	0.109	0.056	0.029	0.012
20	0.222	0.160	0.091	0.050	0.023
30	0.303	0.231	0.141	0.085	0.042
40	0.389	0.309	0.204	0.131	0.070
50	0.472	0.388	0.271	0.183	0.105
100	0.789	0.722	0.605	0.490	0.355
150	0.931	0.898	0.828	0.745	0.623
200	0.980	0.968	0.936	0.891	0.813
300	0.999	0.997	0.994	0.986	0.969

По сравнению с критериями Шермана и Кимбелла критерий Ченга-Спиринга демонстрирует очень высокую мощность относительно конкурирующей гипотезы H_1.

Таблица 2.16

Мощность критерия Ченга-Спиринга относительно гипотезы H_2

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.157	0.106	0.053	0.027	0.011
20	0.167	0.114	0.060	0.031	0.013
30	0.176	0.122	0.065	0.035	0.015
40	0.183	0.128	0.070	0.038	0.017
50	0.191	0.134	0.074	0.041	0.018
100	0.229	0.168	0.098	0.057	0.028
150	0.266	0.200	0.123	0.074	0.038
200	0.301	0.232	0.147	0.092	0.049
300	0.369	0.295	0.198	0.131	0.074

Таблица 2.17

Мощность критерия Ченга-Спиринга относительно гипотезы H_3

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.151	0.100	0.050	0.0249	0.0099
20	0.153	0.103	0.052	0.026	0.011
30	0.154	0.103	0.052	0.026	0.011
40	0.155	0.104	0.053	0.027	0.011
50	0.155	0.105	0.053	0.027	0.011
100	0.157	0.106	0.054	0.028	0.011
150	0.158	0.107	0.055	0.028	0.012
200	0.159	0.108	0.055	0.028	0.012
300	0.161	0.109	0.056	0.029	0.012

По отношению к конкурирующей гипотезе H_2 показывает мощность аналогичную с теми же критериями. И в то же время этот критерий ***практически неспособен*** отличать от равномерного закона распределение, соответствующее гипотезе H_3.

К недостаткам использования критерия относится также зависимость распределения статистики от объема выборки n и необходимость использования таблицы процентных точек.

2.6. Критерии Хегази–Грина

Эти критерии имеют сходство с одноименными критериями нормальности и опираются на аналогичные статистики [16]:

$$T_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|U_i - \eta_i\right|, \tag{2.10}$$

$$T_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(U_i - \eta_i\right)^2, \tag{2.11}$$

где U_i – элементы вариационного ряда, построенного по выборке $X_1, X_2, ..., X_n$ объёмом n, а $\eta_i = E[U_i]$ – математическое ожидание соответствующей порядковой статистики.

При проверке гипотезы на [0, 1] статистики принимают вид:

$$T_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|U_i - \frac{i}{n+1}\right|, \tag{2.12}$$

$$T_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(U_i - \frac{i}{n+1}\right)^2. \tag{2.13}$$

В той же работе [16] рассмотрены модифицированные статистики, в которых вместо математического ожидания i-й порядковой статистики $\eta_i = \dfrac{i}{n+1}$, учитывая несимметричность распределения этой статистики, используются её модальные значения $\xi_i = \dfrac{i-1}{n-1}$. В этом случае статистики критерия принимают вид:

$$T_1^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|U_i - \frac{i-1}{n-1}\right|, \tag{2.14}$$

$$T_2^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(U_i - \frac{i-1}{n-1}\right)^2 . \qquad (2.15)$$

Критерии применимы для случайных величин, распределенных на любом интервале $[a,b]$, но в этом случае необходимо перейти к величинам $y_i = (U_i - U_1)/(U_n - U_1)$, заменив на них U_i в выражениях для статистик при объёме выборки $n-2$.

Заметим, что отличие статистик (2.14) – (2.15) от статистик (2.12) – (2.13) сказывается на распределениях этих статистик. При справедливости проверяемой гипотезы H_0 отличие распределений заметно при ограниченных объемах выборок и практически не сказывается при $n \ge 300$ (см. таблицу 2.18).

В то же время имеет место различие в мощности критериев, опирающихся на статистики (2.12) – (2.13) и (2.14) – (2.15), по крайней мере, относительно некоторых альтернатив (относительно некоторых конкурирующих законов).

Распределения статистик (2.12), (2.13) критериев Хегази–Грина при различных объемах выборок n показаны, соответственно, на рис. 2.9 и 2.10**.**

Критерии правосторонние. Проверяемая гипотеза о равномерности распределения случайных величин X_i принимается на уровне значимости α, если $T_1 < T_1(\alpha)$, $T_1^* < T_1^*(\alpha)$ или $T_2 < T_2(\alpha)$, $T_2^* < T_2^*(\alpha)$.

Полученные методами статистического моделирования критические значения, представленные в таблице 2.18, расширяют таблицу критических значений, приведенную в [63].

Для критериев со статистиками (2.12) – (2.15), как указано в [63], для поиска критических значений существует следующая аппроксимация:

$$T(\alpha) = a + \frac{b}{\sqrt{n}} + \frac{c}{n} . \qquad (2.16)$$

Коэффициенты a, b и c для $\alpha = 0{,}95$ и $\alpha = 0{,}99$ приведены в таблице 2.19. Критические значения, получаемые в результате статистического моделирования, совпадают с точностью до $2-3$ знаков после запятой со значениями, полученными по формуле (2.16).

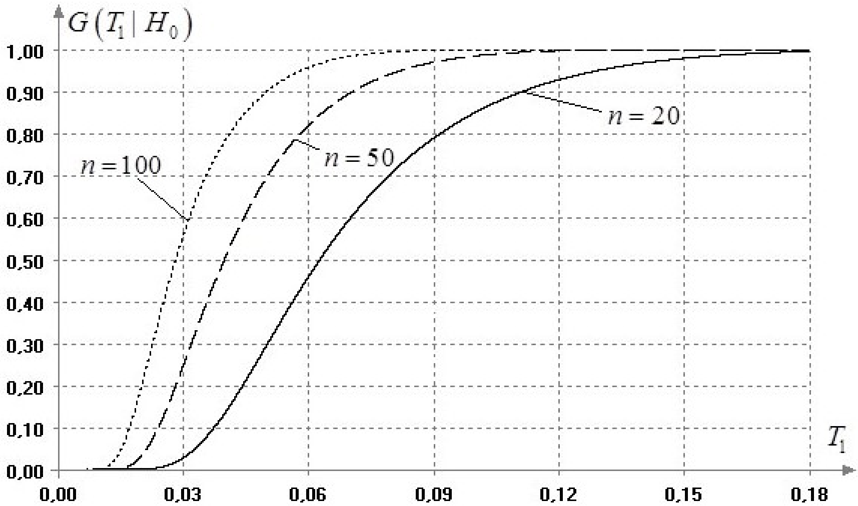

Рис. 2.9. Распределения статистики T_1 критерия Хегази–Грина в зависимости от n

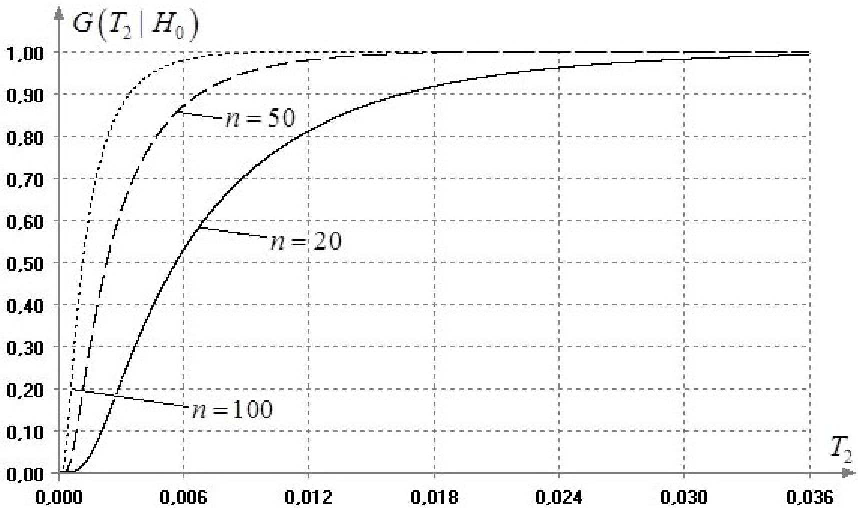

Рис. 2.10. Распределения статистики T_2 критерия Хегази–Грина в зависимости от n

Таблица 2.18

Критические значения статистик критериев Хегази–Грина

n	$1-\alpha$							
	0.85				0.9			
	T_1	T_1^*	T_2	T_2^*	T_1	T_1^*	T_2	T_2^*
3	0.2528	0.3229	0.0755	0.1439	0.2802	0.3455	0.0906	0.1671
8	0.1574	0.1701	0.0322	0.0407	0.1750	0.1868	0.0393	0.0490
10	0.1411	0.1499	0.0263	0.0317	0.1569	0.1651	0.0320	0.0382
18	0.1054	0.1088	0.0151	0.0167	0.1173	0.1206	0.0184	0.0203
20	0.1000	0.1029	0.0136	0.0150	0.1114	0.1141	0.0166	0.0182
30	0.0817	0.0832	0.0092	0.0098	0.0910	0.0924	0.0112	0.0119
38	0.0727	0.0737	0.0073	0.0077	0.0809	0.0819	0.0089	0.0094
40	0.0708	0.0718	0.0070	0.0073	0.0790	0.0799	0.0085	0.0089
50	0.0634	0.0641	0.0056	0.0058	0.0706	0.0713	0.0068	0.0071
78	0.0507	0.0510	0.0037	0.0037	0.0565	0.0568	0.0045	0.0045
100	0.0448	0.0451	0.0028	0.0029	0.0500	0.0502	0.0034	0.0035
150	0.0366	0.0367	0.0019	0.0019	0.0408	0.0409	0.0023	0.0023
200	0.0317	0.0318	0.0014	0.0014	0.0353	0.0354	0.0017	0.0017
300	0.0259	0.0259	0.0009	0.0009	0.0288	0.0289	0.0011	0.0012
n	$1-\alpha$							
	0.95				0.99			
	T_1	T_1^*	T_2	T_2^*	T_1	T_1^*	T_2	T_2^*
3	0.3231	0.3774	0.1181	0.2065	0.3967	0.4283	0.1793	0.2827
8	0.2030	0.2132	0.0518	0.0635	0.2579	0.2658	0.0812	0.0979
10	0.1821	0.1892	0.0422	0.0497	0.2318	0.2376	0.0665	0.0773
18	0.1365	0.1393	0.0244	0.0267	0.1748	0.1771	0.0388	0.0422
20	0.1296	0.1319	0.0221	0.0240	0.1662	0.1680	0.0351	0.0379
30	0.1059	0.1072	0.0149	0.0157	0.1363	0.1373	0.0239	0.0251
38	0.0944	0.0952	0.0119	0.0124	0.1213	0.1220	0.0190	0.0198
40	0.0919	0.0927	0.0113	0.0118	0.1183	0.1189	0.0181	0.0188

Окончание таблицы 2.18

Критические значения статистик критериев Хегази–Грина

n	$1-\alpha$							
	0.85				0.9			
	T_1	T_1^*	T_2	T_2^*	T_1	T_1^*	T_2	T_2^*
50	0.0822	0.0828	0.0091	0.0094	0.1059	0.1064	0.0146	0.0150
78	0.0658	0.0661	0.0060	0.0060	0.0850	0.0852	0.0096	0.0096
100	0.0582	0.0584	0.0046	0.0046	0.0751	0.0752	0.0074	0.0075
150	0.0475	0.0476	0.0030	0.0031	0.0613	0.0614	0.0049	0.0050
200	0.0411	0.0412	0.0023	0.0023	0.0531	0.0532	0.0037	0.0037
300	0.0336	0.0336	0.0015	0.0015	0.0433	0.0434	0.0025	0.0025

Таблица 2.19

Значения a, b и c для вычисления критических значений статистик (2.12) – (2.15) критериев Хегази–Грина

Статистика	Уровень значимости α					
	0.95			0.99		
	a	b	c	a	b	c
T_1	0.0003	0.5876	-0.0425	-0.0070	0.8373	-0.2500
T_1^*	0.0064	0.5066	0.2364	-0.0090	0.7949	-0.0782
T_2	-0.0068	0.0783	0.2419	-0.0148	0.1701	0.2745
T_2^*	0.0214	0.0214	0.8212	0.0047	-0.0607	0.9330

Оценки мощности критерия Хегази–Грина со статистикой T_1 относительно конкурирующих гипотез H_1, H_2 и H_3 при проверке равномерности представлены в таблицах 2.20–2.22, а со статистикой T_2 – в таблицах 2.23–2.25 соответственно. При этом критерий со статистикой T_1 показывает несколько большую мощность, чем критерий со статистикой T_2.

По отношению к конкурирующей гипотезе H_1 при малых n и α оба критерия Хегази–Грина оказывается смещёнными (см. таблицы

2.20 и 2.23, где оценки мощности меньше вероятности ошибки 1-го рода α выделены серым цветом). В то же время смещённость критерия со статистикой T_1 проявляется более заметно.

Таблица 2.20

Мощность критерия Хегази–Грина T_1 относительно гипотезы H_1

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.092	0.054	0.022	0.009	0.003
20	0.116	0.067	0.026	0.010	0.003
30	0.148	0.085	0.032	0.012	0.003
40	0.185	0.106	0.039	0.014	0.004
50	0.226	0.133	0.049	0.018	0.004
100	0.474	0.322	0.142	0.053	0.013
150	0.698	0.546	0.301	0.138	0.039
200	0.849	0.734	0.492	0.274	0.098
300	0.973	0.933	0.801	0.599	0.326

Таблица 2.21

Мощность критерия Хегази–Грина T_1 относительно гипотезы H_2

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.242	0.178	0.105	0.061	0.030
20	0.307	0.236	0.093	0.093	0.049
30	0.368	0.293	0.194	0.127	0.071
40	0.425	0.346	0.239	0.162	0.095
50	0.478	0.397	0.284	0.200	0.121
100	0.685	0.610	0.490	0.383	0.266
150	0.817	0.760	0.654	0.549	0.420
200	0.897	0.856	0.775	0.685	0.562
300	0.969	0.952	0.912	0.859	0.774

Таблица 2.22

Мощность критерия Хегази–Грина T_1 относительно гипотезы H_3

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.207	0.149	0.084	0.047	0.022
20	0.261	0.196	0.119	0.072	0.036
30	0.313	0.243	0.155	0.097	0.051
40	0.360	0.286	0.190	0.124	0.069
50	0.407	0.330	0.227	0.153	0.088
100	0.600	0.522	0.402	0.301	0.197
150	0.737	0.670	0.555	0.446	0.321
200	0.831	0.778	0.678	0.576	0.445
300	0.933	0.905	0.844	0.769	0.660

Таблица 2.23

Мощность критерия Хегази–Грина T_2 относительно гипотезы H_1

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.099	0.060	0.025	0.010	0.003
20	0.124	0.074	0.030	0.012	0.004
30	0.154	0.092	0.037	0.015	0.005
40	0.188	0.112	0.045	0.018	0.006
50	0.226	0.137	0.056	0.022	0.007
100	0.453	0.308	0.141	0.058	0.017
150	0.670	0.517	0.284	0.133	0.042
200	0.828	0.705	0.462	0.254	0.094
300	0.967	0.920	0.773	0.564	0.298

Таблица 2.24

Мощность критерия Хегази–Грина T_2 относительно гипотезы H_2

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.239	0.175	0.102	0.060	0.029
20	0.302	0.231	0.145	0.090	0.048
30	0.362	0.287	0.189	0.123	0.068
40	0.418	0.339	0.232	0.156	0.091
50	0.470	0.389	0.277	0.192	0.115
100	0.677	0.602	0.480	0.371	0.256
150	0.811	0.752	0.644	0.536	0.406
200	0.893	0.850	0.767	0.673	0.548
300	0.968	0.950	0.908	0.853	0.763

Таблица 2.25

Мощность критерия Хегази–Грина T_2 относительно гипотезы H_3

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.205	0.147	0.083	0.046	0.022
20	0.257	0.192	0.116	0.069	0.034
30	0.307	0.237	0.150	0.093	0.049
40	0.354	0.279	0.183	0.118	0.065
50	0.399	0.322	0.218	0.145	0.082
100	0.588	0.508	0.386	0.285	0.184
150	0.724	0.654	0.535	0.424	0.300
200	0.819	0.762	0.657	0.550	0.417
300	0.926	0.894	0.826	0.745	0.627

Оценки мощности относительно конкурирующих гипотез H_1, H_2 и H_3 при проверке равномерности для критерия Хегази–Грина со статистикой T_1^* представлены в таблицах 2.26–2.28, а для критерия Хегази–Грина со статистикой T_2^* – в таблице 2.29–2.31.

Таблица 2.26

Мощность критерия Хегази–Грина T_1^* относительно гипотезы H_1

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.172	0.101	0.038	0.014	0.004
20	0.214	0.126	0.048	0.017	0.005
30	0.258	0.156	0.060	0.021	0.006
40	0.305	0.189	0.074	0.026	0.007
50	0.355	0.226	0.092	0.033	0.008
100	0.601	0.443	0.222	0.093	0.024
150	0.788	0.653	0.403	0.205	0.066
200	0.901	0.809	0.590	0.361	0.146
300	0.984	0.957	0.855	0.676	0.404

Таблица 2.27

Мощность критерия Хегази–Грина T_1^* относительно гипотезы H_2

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.216	0.160	0.096	0.056	0.028
20	0.281	0.217	0.139	0.087	0.047
30	0.343	0.274	0.184	0.121	0.068
40	0.401	0.326	0.228	0.155	0.091
50	0.454	0.378	0.273	0.192	0.116
100	0.667	0.595	0.478	0.373	0.261
150	0.806	0.748	0.644	0.540	0.413
200	0.890	0.848	0.767	0.677	0.555
300	0.967	0.949	0.908	0.854	0.770

Таблица 2.28

Мощность критерия Хегази–Грина T_1^* относительно гипотезы H_3

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.202	0.145	0.082	0.046	0.021
20	0.257	0.193	0.117	0.070	0.035
30	0.309	0.240	0.153	0.096	0.051
40	0.357	0.283	0.188	0.122	0.068
50	0.403	0.327	0.225	0.151	0.086
100	0.597	0.520	0.401	0.300	0.196
150	0.735	0.668	0.554	0.445	0.320
200	0.830	0.777	0.677	0.574	0.444
300	0.933	0.904	0.843	0.768	0.660

Таблица 2.29

Мощность критерия Хегази–Грина T_2^* относительно гипотезы H_1

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.163	0.097	0.039	0.015	0.005
20	0.201	0.121	0.048	0.019	0.006
30	0.242	0.148	0.060	0.023	0.007
40	0.285	0.177	0.073	0.029	0.008
50	0.331	0.210	0.089	0.035	0.010
100	0.565	0.409	0.204	0.089	0.026
150	0.757	0.615	0.369	0.187	0.063
200	0.882	0.779	0.550	0.327	0.132
300	0.980	0.946	0.828	0.637	0.365

Таблица 2.30

Мощность критерия Хегази–Грина T_2^* относительно гипотезы H_2

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.216	0.159	0.094	0.055	0.027
20	0.279	0.214	0.135	0.084	0.044
30	0.339	0.269	0.178	0.115	0.064
40	0.396	0.320	0.220	0.148	0.086
50	0.448	0.371	0.263	0.183	0.109
100	0.660	0.585	0.465	0.359	0.246
150	0.799	0.740	0.632	0.525	0.396
200	0.885	0.842	0.757	0.663	0.537
300	0.965	0.947	0.903	0.846	0.756

Таблица 2.31

Мощность критерия Хегази–Грина T_2^* относительно гипотезы H_3

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.201	0.144	0.081	0.045	0.021
20	0.254	0.190	0.114	0.068	0.034
30	0.304	0.235	0.148	0.092	0.048
40	0.351	0.277	0.182	0.117	0.064
50	0.396	0.319	0.216	0.143	0.081
100	0.586	0.506	0.385	0.283	0.182
150	0.723	0.653	0.533	0.422	0.298
200	0.818	0.761	0.655	0.548	0.416
300	0.926	0.894	0.825	0.743	0.626

Как можно заметить, относительно H_1 смещённость критериев меньше, а мощность критериев заметно выше мощности критериев со статистиками T_1 и T_2, оценки которой приведены в таблицах 2.20 и 2.23.

В то же время оценки мощности критериев Хегази–Грина со статистиками T_1^* и T_2^* относительно конкурирующих гипотез H_2 и H_3 слегка уступают соответствующим оценкам мощности критериев со статистиками T_1 и T_2, но при этом очень близки к последним.

К недостаткам критериев Хегази–Грина, затрудняющим их использование, является зависимость распределений статистик от объема выборки n и необходимость пользоваться таблицами процентных точек, а также смещённость критериев относительно конкурирующих гипотез вида H_1. В то же время критерии обладают достаточно высокой мощностью относительно других конкурирующих гипотез.

2.7. Критерий Янга

Критерий предназначен для проверки равномерности выборок, распределенных на отрезке длиной l с началом в нуле.

Статистика Янга [47] в общем виде описывается формулой

$$M = \frac{1}{l}\sum_{i=1}^{n}\min(D_i, D_{i+1}), \tag{2.17}$$

где $D_1 = U_1$, $D_i = U_i - U_{i-1}$, $D_{n+1} = 1 - U_n$.

Очевидно, что $0 \le M \le \dfrac{n}{n+1}$. При проверке равномерности на интервале [0,1] имеем $l = 1$. Характер изменения распределения статистки (2.17) при справедливости проверяемой гипотезы H_0 в зависимости от n показан на рис. 2.11.

При неизвестном l (при проверке сложной гипотезы) используется статистика вида

$$M^* = \frac{1}{U_n - U_1}\sum_{i=2}^{n-1}\min(D_i, D_{i+1}). \tag{2.18}$$

Распределение статистики (2.18) при справедливости проверяемой гипотезы и объеме выборки n совпадает с распределением статистики (2.17) при объеме выборки $n-2$.

Критерий двусторонний. Гипотеза о равномерности не отклоняется, если вычисленное значение статистики (2.17) удовлетворяет неравенству $M_1(\alpha) \le M \le M_2(\alpha)$.

Полученные с использованием статистического моделирования критические значения представлены в таблице 2.32, которая несколько расширяет таблицу, приведенную в [47, 63].

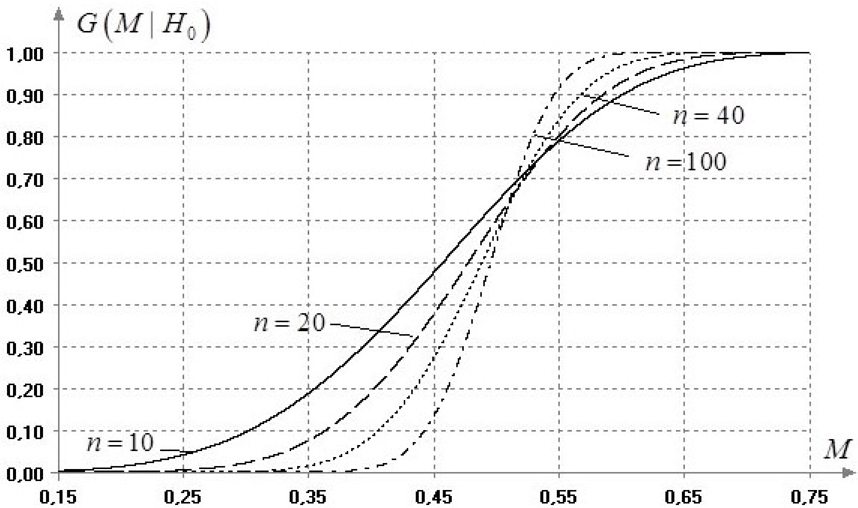

Рис. 2.11. Распределения статистики (2.17) критерия Янга в зависимости от n

Математическое ожидание и дисперсия статистики (2.17) определяются выражениями:

$$E[M] = \frac{n}{2(n+1)}, \ D[M] = \frac{2n-1}{12(n+1)^2}.$$

В качестве распределения нормализованной статистики, которую можно представить в виде

$$\tilde{M} = 2(n+1)M\sqrt{\frac{3}{2n-1}} - n\sqrt{\frac{3}{2n-1}}, \tag{2.19}$$

при $n \ge 15$ [47, 63] можно использовать стандартный нормальный закон $N(0,1)$.

Таблица 2.32

Критические значения статистики (2.17) критерия Янга

n	$1-\alpha$									
	0.8		0.85		0.9		0.95		0.99	
	M_1	M_2	M_1	M_2	M_1	M_2	M_1	M_2	M_1	M_2
2	0.090	0.545	0.069	0.561	0.047	0.581	0.024	0.606	0.005	0.639
3	0.151	0.589	0.130	0.607	0.105	0.627	0.073	0.654	0.032	0.694
4	0.192	0.603	0.169	0.622	0.142	0.646	0.105	0.677	0.051	0.722
5	0.221	0.605	0.199	0.625	0.172	0.649	0.134	0.683	0.077	0.735
10	0.303	0.602	0.284	0.618	0.261	0.638	0.226	0.668	0.166	0.721
15	0.341	0.593	0.325	0.607	0.305	0.625	0.275	0.652	0.219	0.700
20	0.364	0.586	0.345	0.599	0.332	0.615	0.305	0.639	0.254	0.682
30	0.391	0.575	0.379	0.586	0.364	0.600	0.341	0.620	0.297	0.659
40	0.406	0.568	0.396	0.577	0.383	0.589	0.363	0.607	0.324	0.642
50	0.417	0.562	0.408	0.571	0.396	0.582	0.378	0.598	0.343	0.630
100	0.443	0.547	0.436	0.553	0.428	0.561	0.415	0.573	0.390	0.596
150	0.454	0.539	0.449	0.544	0.442	0.551	0.431	0.561	0.410	0.580
200	0.461	0.534	0.456	0.539	0.450	0.544	0.441	0.553	0.423	0.570
300	0.468	0.523	0.464	0.532	0.459	0.537	0.452	0.544	0.437	0.558

На рис. 2.12 демонстрируется близость распределения статистики (2.19) к стандартному нормальному закону при $n=20$. В то же время заметим, что различие между распределением статистики (2.19) и $N(0,1)$ прослеживается и при $n=50$, но практического значения при использовании критерия такое расхождение не имеет.

В [63, стр. 329] утверждается, что более точно распределение статистики (2.17) аппроксимируется бета-распределением 1-го рода (см. соотношение (1.6) при $\theta_2=1$, $\theta_3=0$) с параметрами

$$\theta_0=\theta_1=\frac{3n^2}{2(2n-1)}-\frac{1}{2}.$$

Однако на самом деле нормальная аппроксимация всегда лучше данной. В то же время бета-распределение 1-го рода действительно оказывается хорошей моделью для распределения статистики (2.17), но при значениях параметров формы $\theta_0 \neq \theta_1$, отличающихся от значения, задаваемого вышеприведенным соотношением.

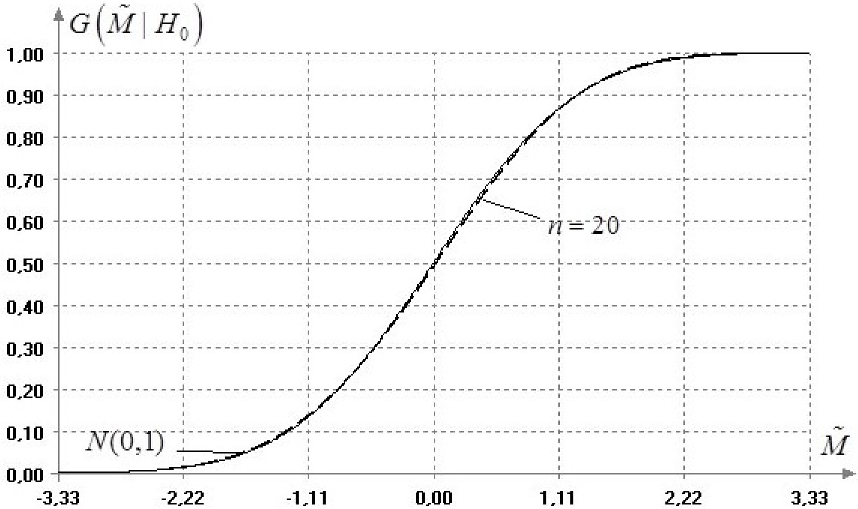

Рис. 2.12. Функция распределения стандартного нормального закона и распределение статистики (2.19) критерия Янга при $n = 20$

Оценки мощности критерия Янга со статистикой (2.17) относительно конкурирующей гипотезы H_1 представлены в таблице 2.33, а относительно конкурирующих гипотез H_2 и H_3 – в таблицах 2.34 и 2.35.

Как можно видеть, при малых n и α относительно гипотезы H_1 критерий оказывается смещённым и обладает очень невысокой мощностью. А гипотезы H_2 и H_3 от H_0, как показывают приведенные оценки мощности, практически **не может отличать**.

Всё это характеризует критерий Янга как не очень удачный критерий, способный в какой то мере отличать от равномерного лишь более далёкие (по сравнению с рассматриваемыми в данном руководстве) конкурирующие законы.

То, что нормализованная статистика (2.19) хорошо аппроксимируется стандартным нормальным законом, который может использоваться для оценки достигнутого уровня значимости, в данном случае оказывается слабым утешением.

Таблица 2.33

Мощность критерия Янга относительно гипотезы H_1

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.138	0.090	0.043	0.021	0.008
20	0.146	0.097	0.048	0.024	0.009
30	0.151	0.101	0.051	0.026	0.010
40	0.156	0.105	0.053	0.027	0.011
50	0.159	0.108	0.055	0.028	0.012
100	0.167	0.115	0.060	0.031	0.013
150	0.172	0.118	0.063	0.033	0.014
200	0.174	0.120	0.064	0.034	0.015
300	0.177	0.123	0.066	0.036	0.016

Таблица 2.34

Мощность критерия Янга относительно гипотезы H_2

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.160	0.108	0.055	0.028	0.012
20	0.160	0.108	0.056	0.028	0.012
30	0.160	0.108	0.056	0.029	0.012
40	0.160	0.108	0.056	0.029	0.012
50	0.160	0.108	0.055	0.029	0.012
100	0.159	0.108	0.055	0.028	0.012
150	0.159	0.108	0.055	0.028	0.012
200	0.159	0.108	0.055	0.028	0.012
300	0.159	0.108	0.055	0.028	0.012

Таблица 2.35

Мощность критерия Янга относительно гипотезы H_3

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.153	0.102	0.052	0.026	0.0105
20	0.154	0.103	0.052	0.026	0.011
30	0.154	0.104	0.052	0.027	0.011
40	0.155	0.104	0.052	0.027	0.011
50	0.155	0.104	0.053	0.027	0.011
100	0.155	0.104	0.053	0.027	0.011
150	0.156	0.105	0.053	0.027	0.011
200	0.156	0.105	0.053	0.027	0.011
300	0.156	0.105	0.054	0.027	0.011

Вследствие низкой мощности критерий Янга способен отличать от H_0 лишь очень далёкие конкурирующие гипотезы. Это не позволяет рекомендовать его для применения.

2.8. Критерий Фросини

В случае проверки равномерности статистика критерия Фросини [13] имеет вид

$$B_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \left| U_i - \frac{i - 0.5}{n} \right| . \qquad (2.20)$$

Критерий правосторонний. Критические значения статистики, полученные методами статистического моделирования, представлены в таблице 2.36, которая расширяет таблицу, приведенную в [13] и [63].

Распределения статистики (2.20) при справедливости H_0 в зависимости от объема выборок n показаны на рис. 2.13.

При $n \geq 50$ критические значения статистики практически не меняются, что говорит о существовании предельного распределения. Мы предлагаем в качестве модели предельного распределения статистики использовать бета-распределение III рода с плотностью

$$f(x)=\frac{\theta_2^{\theta_0}}{\theta_3 B(\theta_0,\theta_1)}\frac{\left(\dfrac{x-\theta_4}{\theta_3}\right)^{\theta_0-1}\left(1-\dfrac{x-\theta_4}{\theta_3}\right)^{\theta_1-1}}{\left[1+(\theta_2-1)\dfrac{x-\theta_4}{\theta_3}\right]^{\theta_0+\theta_1}}$$

и значениями параметров $\theta_0=3.6064$, $\theta_1=4.0008$, $\theta_2=5.4476$, $\theta_3=1.33$, $\theta_4=0.095$, которое было построено по результатам статистического моделирования при $n=1000$.

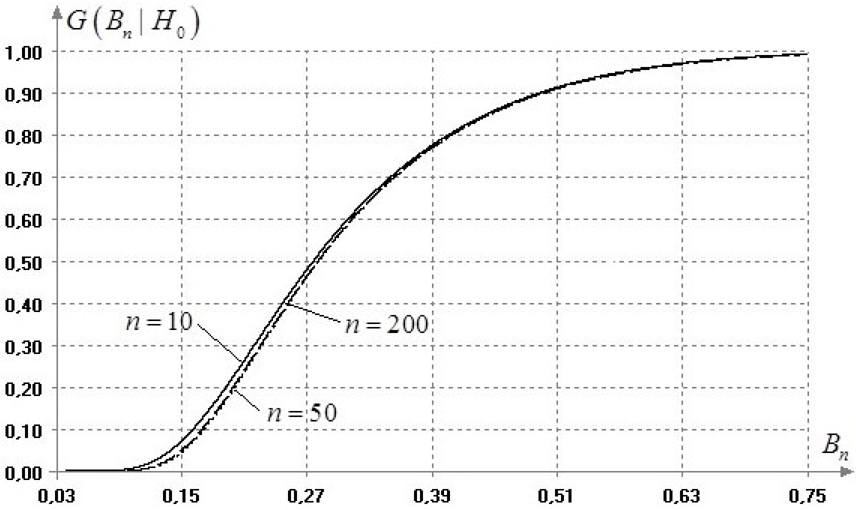

Рис. 2.13. Распределения статистики (2.20) критерия Фросини в зависимости от n

Данной моделью можно пользоваться для оценки достигнутого уровня значимости (для оценки **p**-value) $P\left(B_n \geq B_n^* \middle| H_0\right)$, где B_n^* – значение статистики, вычисленное по выборке, при объёмах выборок $n>50$.

Полученные в результате статистического моделирования оценки мощности критерия Фросини при проверке равномерности по отношению к конкурирующей гипотезе H_1 представлены в таблице 2.37, а по отношению к гипотезам H_2 и H_3 – в таблицах 2.38 и 2.39.

Т а б л и ц а 2.36

Критические значения статистики (2.20) критерия Фросини

n	$1-\alpha$				
	0.8	0.85	0.9	0.95	0.99
3	0.3981	0.4345	0.4836	0.5596	0.6872
4	0.4016	0.4385	0.4878	0.5641	0.7054
5	0.4027	0.4397	0.4895	0.5675	0.7161
6	0.4038	0.4413	0.4916	0.5701	0.7216
7	0.4048	0.4423	0.4925	0.5726	0.7261
8	0.4052	0.4426	0.4931	0.5730	0.7292
9	0.4060	0.4433	0.4938	0.5737	0.7330
10	0.4064	0.4439	0.4943	0.5743	0.7326
11	0.4065	0.4439	0.4947	0.5752	0.7355
12	0.4070	0.4442	0.4951	0.5759	0.7373
13	0.4066	0.4440	0.4949	0.5761	0.7371
14	0.4072	0.4450	0.4957	0.5769	0.7397
15	0.4075	0.4451	0.4958	0.5768	0.7398
16	0.4077	0.4453	0.4963	0.5772	0.7409
17	0.4079	0.4453	0.4964	0.5780	0.7407
18	0.4079	0.4454	0.4962	0.5779	0.7411
19	0.4082	0.4457	0.4964	0.5779	0.7423
20	0.4083	0.4456	0.4966	0.5785	0.7428
30	0.4085	0.4462	0.4971	0.5795	0.7462
40	0.4093	0.4471	0.4987	0.5809	0.7476
50	0.4095	0.4472	0.4986	0.5808	0.7485
100	0.4100	0.4477	0.4991	0.5815	0.7506
150	0.4102	0.4477	0.4990	0.5815	0.7506
200	0.4100	0.4477	0.4990	0.5816	0.7509
300	0.4102	0.4477	0.4992	0.5821	0.7506
1000	0.4100	0.4479	0.4993	0.5822	0.7520

Таблица 2.37

Мощность критерия Фросини относительно гипотезы H_1

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.126	0.072	0.028	0.011	0.003
20	0.162	0.093	0.034	0.013	0.004
30	0.201	0.117	0.043	0.016	0.004
40	0.244	0.144	0.054	0.019	0.005
50	0.291	0.177	0.068	0.024	0.006
100	0.541	0.384	0.180	0.072	0.018
150	0.747	0.603	0.353	0.170	0.052
200	0.878	0.775	0.543	0.317	0.121
300	0.979	0.946	0.830	0.639	0.366

Как видим по таблице 2.37, при малых n и α относительно конкурирующей гипотезы H_1 критерий оказывается смещённым.

Таблица 2.38

Мощность критерия Фросини относительно гипотезы H_2

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.231	0.171	0.102	0.060	0.030
20	0.296	0.228	0.145	0.091	0.048
30	0.357	0.285	0.190	0.125	0.070
40	0.414	0.337	0.234	0.159	0.094
50	0.467	0.389	0.279	0.196	0.119
100	0.677	0.603	0.485	0.378	0.264
150	0.812	0.755	0.650	0.545	0.417
200	0.893	0.852	0.771	0.681	0.559
300	0.968	0.951	0.910	0.857	0.772

Таблица 2.39

Мощность критерия Фросини относительно гипотезы H_3

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.206	0.148	0.084	0.047	0.022
20	0.260	0.196	0.119	0.072	0.036
30	0.312	0.242	0.154	0.097	0.051
40	0.360	0.286	0.190	0.123	0.069
50	0.406	0.330	0.227	0.152	0.087
100	0.599	0.522	0.402	0.301	0.197
150	0.736	0.670	0.555	0.446	0.321
200	0.830	0.777	0.678	0.575	0.445
300	0.933	0.905	0.844	0.769	0.660

Несмотря на смещённость и невысокую мощность критерия относительно конкурирующей гипотезы H_1, критерий показывает достаточно высокую мощность относительно H_2 и H_3.

Положительным фактором является возможность при $n \geq 50$ отказаться от использования таблицы процентных точек и воспользоваться предложенной выше моделью бета-распределения в качестве предельного распределения статистики.

2.9. Критерий Гринвуда

Статистика критерия равномерности Гринвуда [15] имеет вид

$$G = (n+1)\sum_{i=1}^{n+1}\left(U_i - U_{i-1}\right)^2 , \qquad (2.21)$$

где, как и ранее, U_i – элементы вариационного ряда, построенного по выборке $X_1, X_2, ..., X_n$ объёмом n, $U_0 = 0$, $U_{n+1} = 1$. Статистика (2.21) отличается от статистики (2.5) только множителем $(n+1)$.

Критерий правосторонний. Критические значения статистики (2.21) для уровней значимости $\alpha = 0.2, 0.15, 0.1, 0.05, 0.01$, полученные в результате статистического моделирования, представлены в таблице 2.40. Проверяемая гипотеза H_0 не отклоняется, если $G \le G_\alpha$.

Таблица 2.40

Критические значения статистики (2.21) критерия Гринвуда

n	$1-\alpha$				
	0.8	0.85	0.9	0.95	0.99
3	1.890	2.007	2.181	2.470	3.026
4	1.961	2.081	2.250	2.543	3.199
5	2.007	2.128	2.298	2.593	3.284
6	2.040	2.159	2.327	2.621	3.329
7	2.065	2.181	2.346	2.637	3.341
8	2.083	2.198	2.361	2.643	3.337
9	2.098	2.210	2.368	2.647	3.336
10	2.109	2.218	2.374	2.645	3.314
11	2.117	2.224	2.376	2.639	3.296
12	2.125	2.230	2.378	2.638	3.284
15	2.137	2.236	2.376	2.617	3.219
20	2.150	2.240	2.365	2.582	3.123
30	2.153	2.230	2.337	2.521	2.969
40	2.151	2.220	2.314	2.475	2.861
50	2.146	2.208	2.292	2.435	2.777
100	2.123	2.167	2.227	2.326	2.552
150	2.108	2.145	2.193	2.271	2.443
200	2.097	2.128	2.170	2.236	2.381
300	2.083	2.108	2.141	2.194	2.306

В [63] говорится, что критические значения статистики (2.21) совпадают с критическими значениями одноименного критерия показательности [42, 5, 63], но с учетом замены n на $n-1$. На самом деле это не так, и критические значения статистики существенно отличаются от значений, представленных в [63, табл. 99] для критерия проверки принадлежности выборки экспоненциальному закону. Тем более, что данный критерий правосторонний.

Вид распределений $G(G|H_0)$ статистики (2.21) при справедливости проверяемой гипотезы H_0 в зависимости от объёма выборок n демонстрируется на рис. 2.14. В [30] показано, что распределение статистики (2.21) медленно сходится к нормальному закону. Однако численные исследования показали, что даже при $n=1000$ распределение статистики настолько существенно отличается от её нормальной аппроксимации, что последней лучше не пользоваться.

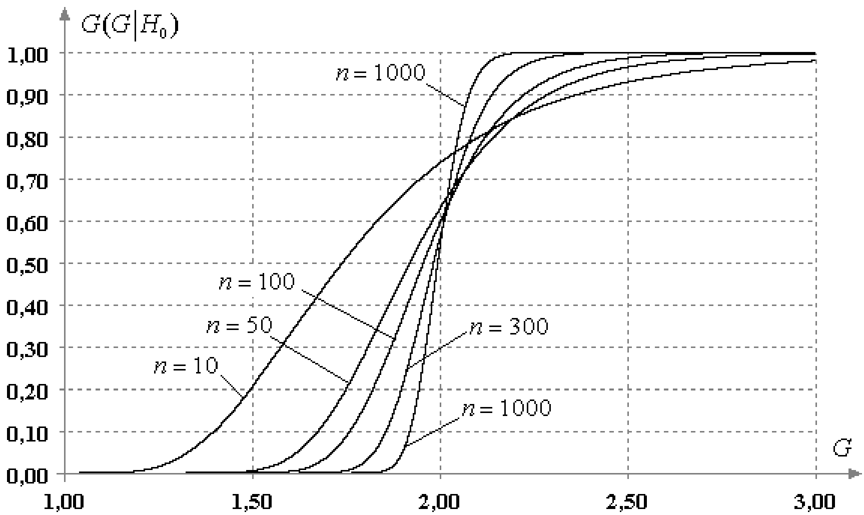

Рис. 2.14. Распределения статистики (2.21) критерия Гринвуда в зависимости от n

Естественно, что мощность критерия относительно рассматриваемых конкурирующих гипотез совпадает с мощностью критерия Морана со статистикой (2.5) и с мощностью критерия Кимбелла со статистикой (2.4). Оценки мощности критерия Гринвуда по отношению к конкурирующей гипотезе H_1 можно увидеть в соответствующей таблице 2.6 для критерия Кимбелла, а по отношению к гипотезам H_2 и H_3 – в таблицах 2.7 и 2.8.

Как можно заметить ниже, критерий Гринвуда заметно уступает в мощности другому критерию Гринвуда–Кэсенберри–Миллера.

2.10. Критерий Гринвуда–Кэсенберри–Миллера

Предложенный в [36] критерий Гринвуда–Кэсенберри–Миллера, как утверждается в [63], представляет собой более мощный критерий равномерности. Статистика критерия имеет вид

$$Q = \sum_{i=1}^{n+1} \left(U_i - U_{i-1}\right)^2 + \sum_{i=1}^{n} \left(U_{i+1} - U_i\right)\left(U_i - U_{i-1}\right), \qquad (2.22)$$

где $U_0 = 0,\ U_{n+1} = 1$.

Критерий правосторонний. Зависимость распределений статистики (2.22) от объема выборки n демонстрирует рис. 2.15.

В таблице 2.44 представлены полученные с использованием методов статистического моделирования критические значения статистики Гринвуда-Кэсенберри-Миллера. Она содержит более широкий спектр значений по сравнению с таблицей, приведенной в [63].

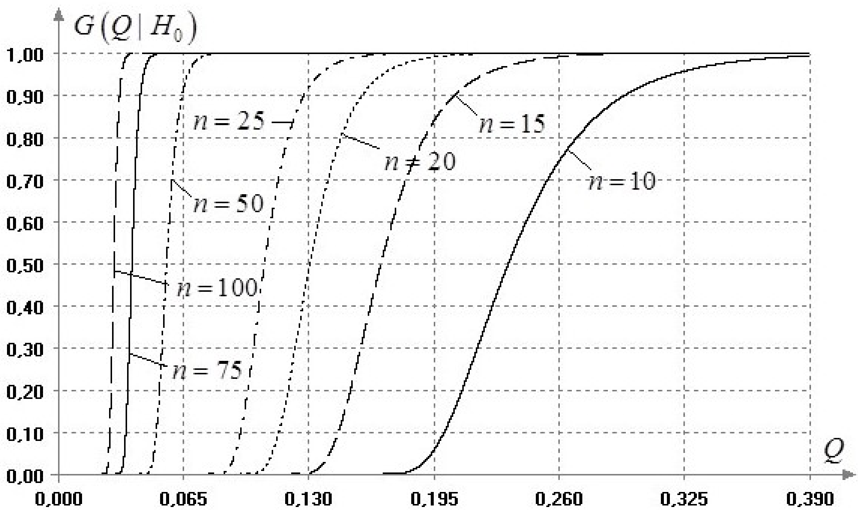

Рис. 2.15. Распределения статистики (2.22) критерия Гринвуда–Кэсенберри–Миллера в зависимости от n

Т а б л и ц а 2.41

Критические значения статистики критерия Гринвуда–Кэсенберри–Миллера

n	$1-\alpha$				
	0.8	0.85	0.9	0.95	0.99
2	0.755	0.779	0.811	0.859	0.933
3	0.631	0.657	0.689	0.737	0.831
4	0.530	0.554	0.586	0.636	0.732
5	0.456	0.476	0.505	0.552	0.647
6	0.401	0.418	0.443	0.484	0.574
7	0.358	0.373	0.394	0.430	0.512
8	0.323	0.336	0.354	0.386	0.460
9	0.294	0.306	0.322	0.350	0.418
10	0.270	0.280	0.295	0.320	0.381
11	0.249	0.258	0.272	0.295	0.350
12	0.231	0.240	0.252	0.273	0.323
13	0.216	0.224	0.235	0.254	0.299
14	0.202	0.209	0.220	0.237	0.279
15	0.191	0.197	0.206	0.222	0.261
16	0.180	0.186	0.194	0.209	0.245
17	0.170	0.176	0.184	0.198	0.231
18	0.162	0.167	0.174	0.187	0.218
19	0.154	0.159	0.166	0.178	0.207
20	0.147	0.151	0.158	0.169	0.196
21	0.140	0.145	0.151	0.161	0.187
22	0.134	0.139	0.144	0.154	0.178
23	0.129	0.133	0.138	0.148	0.170
24	0.124	0.128	0.133	0.142	0.162
25	0.119	0.123	0.128	0.136	0.156
26	0.115	0.118	0.123	0.131	0.150
27	0.111	0.114	0.119	0.126	0.144

Продолжение таблицы 2.41

n	$1-\alpha$				
	0.8	0.85	0.9	0.95	0.99
28	0.107	0.110	0.114	0.122	0.139
29	0.104	0.107	0.111	0.117	0.134
30	0.100	0.103	0.107	0.113	0.129
31	0.097	0.100	0.104	0.110	0.124
32	0.094	0.097	0.100	0.106	0.120
33	0.092	0.094	0.097	0.103	0.117
34	0.089	0.091	0.095	0.100	0.113
35	0.087	0.089	0.092	0.097	0.110
36	0.084	0.086	0.089	0.094	0.106
37	0.082	0.084	0.087	0.092	0.103
38	0.080	0.082	0.085	0.089	0.100
39	0.078	0.080	0.083	0.087	0.098
40	0.076	0.078	0.081	0.085	0.095
41	0.074	0.076	0.079	0.083	0.092
42	0.073	0.074	0.077	0.081	0.090
43	0.071	0.073	0.075	0.079	0.088
44	0.069	0.071	0.073	0.077	0.086
45	0.068	0.070	0.072	0.075	0.084
46	0.067	0.068	0.070	0.074	0.082
47	0.065	0.067	0.069	0.072	0.080
48	0.064	0.065	0.067	0.070	0.078
49	0.063	0.064	0.066	0.069	0.076
50	0.061	0.063	0.065	0.068	0.075
55	0.056	0.057	0.059	0.061	0.068
60	0.051	0.052	0.054	0.056	0.062
65	0.047	0.048	0.050	0.052	0.056
70	0.044	0.045	0.046	0.048	0.052
75	0.041	0.042	0.043	0.045	0.048

Окончание таблицы 2.41

n	$1-\alpha$				
	0.8	0.85	0.9	0.95	0.99
80	0.0386	0.0392	0.040	0.042	0.045
85	0.036	0.037	0.038	0.039	0.042
90	0.034	0.035	0.036	0.037	0.040
95	0.0325	0.0330	0.034	0.035	0.038
100	0.0309	0.0314	0.032	0.033	0.036
150	0.0206	0.0209	0.0212	0.0218	0.023
200	0.0154	0.0156	0.0158	0.0161	0.017
300	0.01025	0.01035	0.01047	0.01067	0.01107

Полученные в результате статистического моделирования оценки мощности критерия Гринвуда–Кэсенберри–Миллера при проверке равномерности по отношению к конкурирующей гипотезе H_1 представлены в таблице 2.42, а оценки мощности по отношению к гипотезам H_2 и H_3 – в таблицах 2.43 и 2.44 соответственно.

Таблица 2.42

Мощность критерия Гринвуда–Кэсенберри–Миллера относительно гипотезы H_1

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.062	0.036	0.014	0.005	0.002
20	0.095	0.059	0.026	0.011	0.004
30	0.131	0.086	0.041	0.019	0.007
40	0.167	0.113	0.058	0.029	0.012
50	0.202	0.142	0.077	0.041	0.017
100	0.373	0.290	0.186	0.116	0.062
150	0.519	0.430	0.305	0.212	0.128
200	0.638	0.553	0.423	0.316	0.208
300	0.803	0.738	0.623	0.514	0.386

Т а б л и ц а 2.43

Мощность критерия Гринвуда–Кэсенберри–Миллера относительно гипотезы H_2

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.224	0.159	0.088	0.048	0.022
20	0.242	0.173	0.097	0.054	0.025
30	0.255	0.185	0.105	0.059	0.027
40	0.267	0.194	0.111	0.063	0.029
50	0.278	0.204	0.118	0.068	0.032
100	0.325	0.244	0.147	0.086	0.042
150	0.364	0.278	0.172	0.104	0.052
200	0.399	0.310	0.195	0.121	0.062
300	0.458	0.366	0.241	0.155	0.083

Т а б л и ц а 2.44

Мощность критерия Гринвуда–Кэсенберри–Миллера относительно гипотезы H_3

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.174	0.119	0.062	0.032	0.014
20	0.188	0.130	0.069	0.037	0.016
30	0.199	0.140	0.075	0.040	0.018
40	0.209	0.147	0.081	0.044	0.019
50	0.219	0.155	0.086	0.047	0.021
100	0.257	0.186	0.107	0.061	0.028
150	0.287	0.213	0.125	0.073	0.035
200	0.314	0.236	0.142	0.085	0.042
300	0.362	0.279	0.174	0.107	0.055

При малых n относительно конкурирующей гипотезы H_1 критерий отличается существенным смещением. Критерий не отличается высокой мощностью и по отношению к другим конкурирующим гипотезам, но всё-таки его мощность заметно выше предшествующего критерия Гринвуда.

К недостаткам критерия относятся: зависимость распределений статистики от n и необходимость пользоваться таблицей процентных точек; смещённость критерия относительно конкурирующих гипотез вида H_1; невысокая мощность.

2.11. Критерии Неймана–Бартона

Семейство критериев основано на отношении правдоподобия [32]. По элементам U_i вариационного ряда, построенного по выборке $X_1, X_2, ..., X_n$, вычисляют величины

$$V_j = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \pi_j \left(U_i - 0.5 \right), \tag{2.23}$$

где $\pi_j \left(y \right)$ – полиномы Лежандра, ортогональные на отрезке $\left[0,1 \right]$.

Как правило, ограничиваются использованием первых 4-х полиномов:

$$\pi_1 \left(y \right) = 2\sqrt{3} y; \quad \pi_2 \left(y \right) = \sqrt{5} \left(6y^2 - 0,5 \right);$$

$$\pi_3 \left(y \right) = \sqrt{7} \left(20y^3 - 3y \right); \quad \pi_4 \left(y \right) = 3 \left(70y^4 - 15y^2 + 0,375 \right).$$

Статистики критерия имеет вид

$$N_K = \sum_{j=1}^{K} V_j^2 . \tag{2.24}$$

Проверяемая гипотеза H_0 о равномерности наблюдаемой выборки отклоняется при больших значениях статистик. Вид распределений статистик при $n = 200$ иллюстрирует рис. 2.16.

Критические значения $N_K \left(\alpha \right)$ для $K = 2, 3, 4$ приведены в таблицах 2.45–2.47. Эти таблицы несколько расширяют таблицу процентных точек, приведенную в [63].

При $K = 1$ получается маломощный критерий, поэтому применять его нецелесообразно.

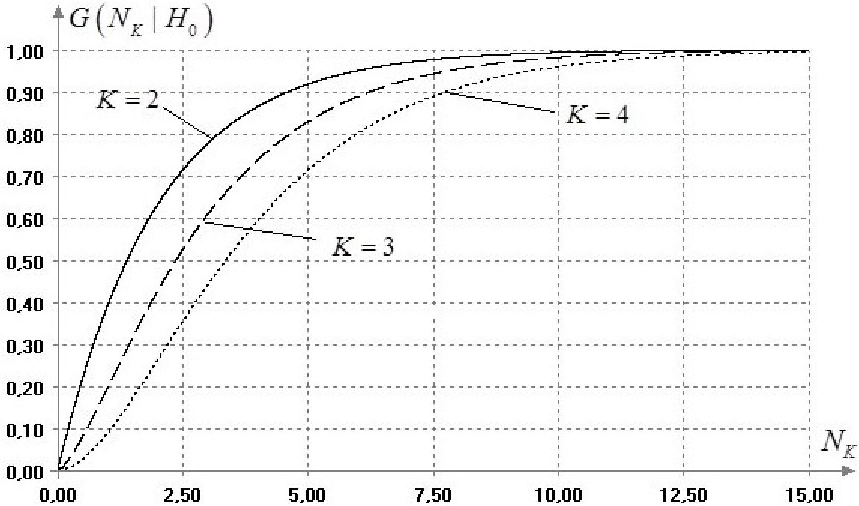

Рис. 2.16. Распределения статистик N_K Неймана-Бартона при $n = 200$

В [10] показано, что при $n > 20$ распределения статистик хорошо аппроксимируется χ^2 – распределениями с K степенями свободы. Действительно, распределения статистик быстро сходятся к соответствующим χ_K^2 -распределениям и при $n > 20$ отличием реальных распределений статистик Неймана–Бартона от соответствующих χ_K^2 -распределений можно практически пренебречь.

В таблице 2.48 в качестве примера демонстрируется отличие от заданных величин $1-\alpha$ вероятностей вида $P\left(N_K \le \chi_{K,1-\alpha}^2\right)$, вычисленных в соответствии с действительными распределениями статистик N_K, полученными в результате статистического моделирования при объемах выборок $n = 20, 50$. Это позволяет судить о величине погрешности при вычислении **p**-value по соответствующему χ_K^2 -распределению.

Т а б л и ц а 2.45

Критические значения статистики N_2 критерия Неймана–Бартона

n	$1-\alpha$				
	0.8	0.85	0.9	0.95	0.99
2	2.450	3.013	4.034	5.932	10.077
3	2.865	3.276	4.015	5.669	9.723
4	3.030	3.448	4.113	5.571	9.602
5	3.118	3.568	4.227	5.554	9.519
6	3.154	3.637	4.311	5.601	9.400
7	3.180	3.681	4.380	5.651	9.315
8	3.188	3.702	4.418	5.680	9.270
9	3.190	3.720	4.452	5.730	9.237
10	3.192	3.726	4.469	5.759	9.186
11	3.194	3.733	4.486	5.792	9.171
12	3.197	3.743	4.601	5.815	9.168
14	3.200	3.749	4.516	5.843	9.152
16	3.203	3.757	4.530	5.861	9.150
18	3.205	3.760	4.540	5.872	9.158
20	3.206	3.764	4.546	5.887	9.152
25	3.210	3.769	4.561	5.912	9.160
30	3.212	3.774	4.567	5.926	9.146
40	3.214	3.782	4.580	5.945	9.160
50	3.214	3.785	4.585	5.951	9.175
100	3.214	3.789	4.591	5.969	9.200
200	3.216	3.789	4.595	5.985	9.211
300	3.218	3.790	4.600	5.987	9.202
∞	3.219	3.794	4.605	5.991	9.210

Таблица 2.46

Критические значения статистики N_3 критерия Неймана–Бартона

n	$1-\alpha$				
	0.8	0.85	0.9	0.95	0.99
2	4.118	4.475	5.606	7.495	13.570
3	4.440	5.036	5.780	7.358	12.936
4	4.446	5.098	6.028	7.550	12.314
5	4.435	5.101	6.034	7.666	12.118
6	4.459	5.105	6.028	7.674	11.960
7	4.474	5.124	6.052	7.674	11.845
8	4.481	5.137	6.068	7.688	11.812
9	4.501	5.153	6.078	7.699	11.805
10	4.509	5.161	6.087	7.702	11.746
11	4.520	5.172	6.099	7.704	11.717
12	4.536	5.184	6.108	7.712	11.667
14	4.550	5.199	6.119	7.716	11.651
16	4.569	5.216	6.128	7.722	11.608
18	4.579	5.230	6.145	7.724	11.569
20	4.581	5.239	6.153	7.725	11.542
25	4.600	5.259	6.172	7.740	11.510
30	4.607	5.268	6.191	7.751	11.457
40	4.618	5.281	6.204	7.770	11.425
50	4.622	5.289	6.214	7.773	11.413
100	4.633	5.305	6.232	7.793	11.367
200	4.634	5.310	6.244	7.806	11.360
300	4.638	5.310	6.246	7.807	11.347
∞	4.641	5.317	6.251	7.814	11.345

Таблица 2.47

Критические значения статистики N_4 критерия Неймана–Бартона

n	$1-\alpha$				
	0.8	0.85	0.9	0.95	0.99
2	5.648	6.462	7.220	9.731	16.129
3	5.674	6.329	7.382	9.328	16.208
4	5.741	6.469	7.464	9.348	15.507
5	5.729	6.500	7.567	9.459	15.015
6	5.742	6.499	7.590	9.489	14.735
7	5.770	6.531	7.600	9.499	14.511
8	5.780	6.541	7.611	9.477	14.396
9	5.794	6.551	7.618	9.490	14.315
10	5.802	6.560	7.633	9.476	14.238
11	5.809	6.568	7.632	9.480	14.135
12	5.819	6.576	7.638	9.478	14.066
14	5.832	6.589	7.649	9.470	13.990
16	5.849	6.598	7.652	9.465	13.920
18	5.865	6.614	7.663	9.468	13.855
20	5.872	6.621	7.667	9.461	13.798
25	5.898	6.641	7.683	9.453	13.707
30	5.913	6.657	7.692	9.455	13.626
40	5.930	6.677	7.709	9.453	13.554
50	5.944	6.689	7.722	9.456	13.492
100	5.970	6.719	7.752	9.469	13.371
200	5.976	6.730	7.763	9.479	13.352
300	5.985	6.738	7.770	9.481	13.276
∞	5.989	6.745	7.779	9.488	13.277

Таблица 2.48

Вероятности $P\left(N_K \le \chi^2_{K,1-\alpha}\right)$, соответствующие заданным $\chi^2_{K,1-\alpha}$-квантилям χ^2_K-распределений, вычисленные по реальным распределениям статистик критерия Неймана–Бартона

$1-\alpha$	N_2		N_3		N_4	
	$n=20$	$n=50$	$n=20$	$n=50$	$n=20$	$n=50$
0.85	0.8522	0.8509	0.8547	0.8518	0.8571	0.8534
0.9	0.9027	0.9013	0.9040	0.9016	0.9044	0.9023
0.95	0.9527	0.9511	0.9517	0.9509	0.9506	0.9506
0.975	0.9765	0.9757	0.9751	0.9751	0.9735	0.9746
0.99	0.9903	0.9901	0.9892	0.9897	0.9880	0.9891

Полученные в результате статистического моделирования оценки мощности критериев Неймана–Бартона при проверке равномерности по отношению к конкурирующим гипотезам H_1, H_2 и H_3 со статистикой N_2 представлены в таблицах 2.49, 2.50 и 2.51 соответственно, со статистикой N_3 – в таблицах 2.52, 2.53 и 2.54, со статистикой N_4 – в таблицах 2.55, 2.56 и 2.57.

При малых n относительно конкурирующей гипотезы H_1 для всех критериев характерно наличие смещения, которое выражено менее заметно по сравнению с некоторыми выше рассмотренными критериями.

Как можно судить по оценкам мощности, наиболее предпочтительно использование критерия Неймана–Бартона со статистикой N_2.

Хорошая аппроксимация распределений статистик соответствующими χ^2_K-распределениями и достаточно высокая мощность делают критерии проверки равномерности Неймана–Бартона одними из наиболее перспективных для применения.

Т а б л и ц а 2.49

Мощность критерия Неймана-Бартона N_2 относительно гипотезы H_1

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.187	0.116	0.043	0.012	0.001
20	0.314	0.224	0.117	0.055	0.017
30	0.429	0.330	0.199	0.112	0.047
40	0.533	0.432	0.286	0.178	0.087
50	0.622	0.525	0.374	0.252	0.137
100	0.889	0.837	0.731	0.613	0.458
150	0.973	0.954	0.908	0.843	0.733
200	0.994	0.989	0.973	0.946	0.891
300	1.000	0.999	0.998	0.996	0.988

Т а б л и ц а 2.50

Мощность критерия Неймана-Бартона N_2 относительно гипотезы H_2

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.236	0.177	0.109	0.068	0.035
20	0.296	0.229	0.149	0.098	0.055
30	0.353	0.282	0.129	0.129	0.077
40	0.408	0.333	0.234	0.163	0.101
50	0.460	0.383	0.277	0.199	0.126
100	0.669	0.597	0.481	0.382	0.276
150	0.808	0.751	0.650	0.552	0.433
200	0.892	0.852	0.774	0.691	0.579
300	0.968	0.952	0.915	0.868	0.794

Таблица 2.51

Мощность критерия Неймана-Бартона N_2 относительно гипотезы H_3

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.194	0.137	0.076	0.043	0.020
20	0.236	0.172	0.101	0.059	0.029
30	0.277	0.208	0.127	0.077	0.040
40	0.317	0.243	0.154	0.097	0.052
50	0.356	0.279	0.182	0.117	0.064
100	0.531	0.447	0.326	0.232	0.145
150	0.670	0.591	0.465	0.357	0.244
200	0.772	0.704	0.588	0.478	0.352
300	0.898	0.856	0.773	0.682	0.559

Таблица 2.52

Мощность критерия Неймана-Бартона N_3 относительно гипотезы H_1

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.145	0.087	0.033	0.011	0.002
20	0.246	0.166	0.080	0.036	0.011
30	0.347	0.254	0.141	0.074	0.028
40	0.444	0.344	0.211	0.123	0.055
50	0.533	0.431	0.285	0.179	0.088
100	0.834	0.766	0.639	0.511	0.353
150	0.952	0.923	0.855	0.769	0.636
200	0.988	0.978	0.951	0.909	0.830
300	0.999	0.999	0.996	0.990	0.975

Таблица 2.53

Мощность критерия Неймана-Бартона N_3 относительно гипотезы H_2

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.237	0.177	0.108	0.066	0.035
20	0.292	0.226	0.146	0.095	0.054
30	0.346	0.275	0.186	0.125	0.074
40	0.397	0.323	0.226	0.158	0.098
50	0.446	0.370	0.266	0.191	0.121
100	0.651	0.577	0.464	0.367	0.264
150	0.791	0.732	0.630	0.534	0.418
200	0.880	0.837	0.758	0.674	0.563
300	0.964	0.946	0.907	0.858	0.783

Таблица 2.54

Мощность критерия Неймана-Бартона N_3 относительно гипотезы H_3

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.189	0.133	0.074	0.041	0.019
20	0.226	0.163	0.094	0.055	0.027
30	0.263	0.194	0.117	0.070	0.036
40	0.298	0.226	0.141	0.087	0.046
50	0.334	0.258	0.165	0.104	0.057
100	0.501	0.416	0.297	0.208	0.127
150	0.638	0.556	0.429	0.324	0.217
200	0.744	0.672	0.552	0.442	0.318
300	0.881	0.834	0.745	0.650	0.523

Таблица 2.55

Мощность критерия Неймана-Бартона N_4 относительно гипотезы H_1

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.121	0.072	0.028	0.010	0.002
20	0.197	0.127	0.058	0.026	0.008
30	0.291	0.200	0.101	0.049	0.018
40	0.389	0.284	0.158	0.083	0.033
50	0.483	0.371	0.224	0.127	0.056
100	0.818	0.739	0.592	0.447	0.283
150	0.950	0.918	0.840	0.738	0.583
200	0.989	0.979	0.949	0.902	0.808
300	0.9996	0.999	0.997	0.991	0.976

Таблица 2.56

Мощность критерия Неймана-Бартона N_4 относительно гипотезы H_2

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.238	0.177	0.109	0.067	0.035
20	0.290	0.224	0.144	0.094	0.053
30	0.339	0.270	0.182	0.122	0.072
40	0.388	0.315	0.220	0.153	0.093
50	0.435	0.359	0.257	0.183	0.116
100	0.632	0.557	0.445	0.350	0.251
150	0.773	0.712	0.609	0.512	0.399
200	0.865	0.820	0.737	0.653	0.541
300	0.938	0.937	0.895	0.843	0.765

Т а б л и ц а 2.57

Мощность критерия Неймана-Бартона N_4 относительно гипотезы H_3

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.186	0.130	0.072	0.040	0.018
20	0.218	0.157	0.090	0.052	0.025
30	0.250	0.184	0.109	0.065	0.033
40	0.282	0.212	0.130	0.080	0.041
50	0.314	0.240	0.151	0.094	0.050
100	0.466	0.381	0.267	0.183	0.110
150	0.598	0.514	0.388	0.286	0.187
200	0.706	0.629	0.505	0.396	0.277
300	0.853	0.799	0.700	0.599	0.470

2.12. Энтропийный критерий Дудевича–ван дер Мюлена

Для случайной величины X с функцией плотности $f(x)$ энтропия $H(f)$ этой величины, предложенная Шенноном [37], определяется соотношением

$$H(f) = -\int_{-\infty}^{\infty} \ln\big(f(x)\big) f(x)\,dx .$$

Используя то, что выражение для энтропии можно записать как

$$H(f) = \int_{0}^{1} \ln\left\{\frac{d}{dp} F^{-1}(p)\right\} dp ,$$

в [44] была получена оценка энтропии следующего вида

$$H(m,n) = -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln\left\{\frac{n}{2m}\left(U_{i+m} - U_{i-m}\right)\right\}, \qquad (2.25)$$

которую было предложено использовать в качестве статистики критерия, предназначенного для проверки нормальности.

В качестве статистики критерия проверки равномерности оценка (2.25) была предложена в работе [11]. При вычислении оценки энтропии (2.25) в качестве размера окна m выбирается целое число $m \le \frac{n}{2}$, при этом, если $i+m \ge n$, то $U_{i+m} = U_n$, а если $i-m \le 1$, то $U_{i-m} = U_1$.

Критерий правосторонний. Проверяемая гипотеза отклоняется при значениях статистики (2.25) $H(m,n) > H_\alpha(m,n)$.

Критические значения статистики (2.25) представлены в таблице 2.58. Они несколько уточняют соответствующие значения, приведенные в работе [11].

Зависимость распределений статистики от выбора m при объёме выборок $n = 50$ демонстрирует рис. 2.17.

Т а б л и ц а 2.58

Критические значения статистики $H(m,n)$ критерия Дудевича–ван дер Мюлена

n	m	$1-\alpha$				
		0.8	0.85	0.9	0.95	0.99
10	1	0.700	0.758	0.835	0.960	1.225
	2	0.547	0.592	0.653	0.754	0.971
	3	0.542	0.584	0.642	0.735	0.942
	4	0.575	0.617	0.673	0.765	0.969
20	1	0.505	0.538	0.582	0.651	0.795
	2	0.350	0.375	0.409	0.463	0.579
	3	0.322	0.345	0.376	0.426	0.532
	4	0.325	0.346	0.376	0.423	0.525
	5	0.339	0.360	0.388	0.435	0.535
	6	0.359	0.380	0.408	0.454	0.554
	7	0.383	0.404	0.432	0.477	0.576
	8	0.410	0.431	0.459	0.504	0.603
	9	0.439	0.459	0.487	0.532	0.631

Продолжение таблицы 2.58

n	m	$1-\alpha$				
		0.8	0.85	0.9	0.95	0.99
30	1	0.437	0.462	0.494	0.544	0.648
	2	0.283	0.301	0.326	0.364	0.445
	3	0.248	0.264	0.286	0.321	0.395
	4	0.242	0.257	0.277	0.310	0.381
	5	0.246	0.261	0.281	0.313	0.381
	6	0.256	0.271	0.290	0.321	0.389
	7	0.269	0.283	0.303	0.333	0.401
	8	0.285	0.299	0.317	0.348	0.415
	9	0.301	0.315	0.334	0.364	0.431
	10	0.319	0.333	0.351	0.382	0.448
40	1	0.403	0.423	0.449	0.490	0.573
	2	0.249	0.264	0.283	0.314	0.378
	3	0.211	0.224	0.241	0.268	0.327
	4	0.200	0.212	0.228	0.254	0.309
	5	0.200	0.211	0.226	0.251	0.305
	6	0.205	0.216	0.231	0.255	0.307
	7	0.213	0.224	0.238	0.262	0.314
	8	0.223	0.234	0.248	0.272	0.322
	9	0.234	0.245	0.259	0.282	0.333
	10	0.246	0.257	0.271	0.294	0.345
	15	0.316	0.326	0.341	0.364	0.413
50	1	0.382	0.399	0.421	0.456	0.526
	2	0.229	0.241	0.258	0.283	0.337
	3	0.188	0.199	0.214	0.236	0.284
	4	0.175	0.185	0.198	0.219	0.265
	5	0.172	0.181	0.194	0.214	0.258
	6	0.174	0.183	0.195	0.215	0.258
	7	0.179	0.188	0.200	0.219	0.261

Окончание таблицы 2.58

n	m	$1-\alpha$				
		0.8	0.85	0.9	0.95	0.99
50	8	0.186	0.195	0.206	0.226	0.267
	9	0.194	0.203	0.214	0.234	0.274
	10	0.203	0.212	0.223	0.242	0.283
	15	0.256	0.264	0.276	0.294	0.335
	20	0.315	0.324	0.335	0.354	0.394
100	1	0.337	0.348	0.362	0.384	0.427
	2	0.186	0.194	0.204	0.220	0.251
	3	0.142	0.149	0.157	0.171	0.199
	4	0.123	0.129	0.137	0.150	0.175
	5	0.115	0.120	0.128	0.139	0.164
	6	0.111	0.116	0.123	0.135	0.158
	7	0.110	0.115	0.122	0.134	0.156
	8	0.111	0.116	0.123	0.133	0.156
	9	0.113	0.118	0.125	0.135	0.157
	10	0.116	0.121	0.127	0.138	0.159
	15	0.138	0.142	0.148	0.158	0.179
	20	0.164	0.169	0.175	0.184	0.205
	30	0.222	0.227	0.233	0.242	0.263
	40	0.283	0.288	0.295	0.305	0.325

В работе [49], для аналогичного критерия (с несколько другими оценками энтропии) в зависимости от объёмов n анализируемых выборок предложены оптимальные значения m^* для размера окна m, которые приведены в таблице 2.59.

Полученные в результате статистического моделирования оценки мощности критерия Дудевича–ван дер Мюлена при проверке равномерности по отношению к конкурирующим гипотезам H_1, H_2 и H_3 при таких оптимальных значениях m^* представлены в таблицах 2.60, 2.61 и 2.62 соответственно.

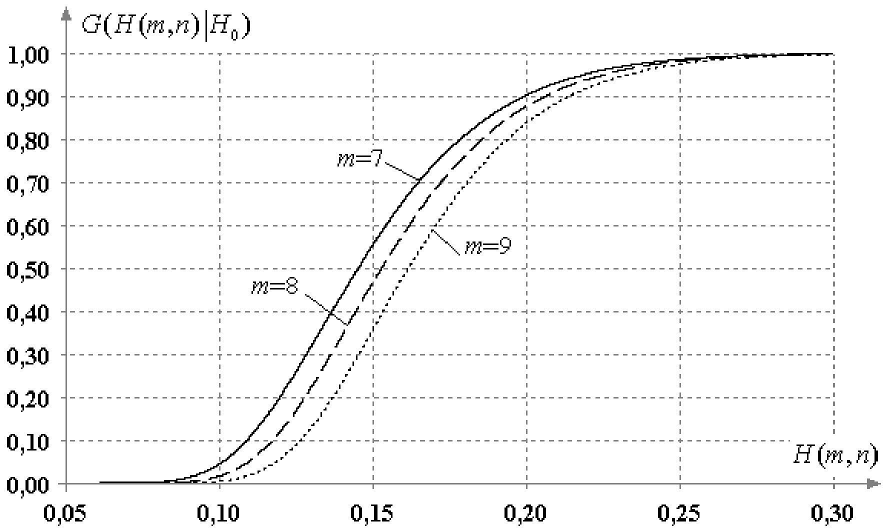

Рис. 2.17. Зависимость распределений статистики Дудевича–ван дер Мюлена от выбора m при $n = 50$

Таблица 2.59

Оптимальные значения m^*

n	$m*$	n	$m*$
$n \le 5$	1	$40 \le n \le 100$	6
$6 \le n \le 8$	2	$101 \le n \le 150$	7
$9 \le n \le 18$	3	$151 \le n \le 200$	8
$19 \le n \le 29$	4	$n > 200$	9
$30 \le n \le 39$	5		

Выбор оптимального размера окна m для критериев, в качестве статистик которых используются различные оценки энтропии, представляет собой актуальную проблему. Большинство авторов предлагают использовать такие m, при которых значения соответствующих непараметрических оценок энтропии ближе к её теоретическому значению.

Таблица 2.60

Мощность критерия Дудевича-ван дер Мюлена $H(m^*,n)$ относительно гипотезы H_1

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.347	0.254	0.145	0.080	0.035
20	0.464	0.361	0.228	0.140	0.071
30	0.562	0.459	0.311	0.204	0.112
40	0.648	0.548	0.395	0.273	0.160
50	0.696	0.601	0.449	0.324	0.199
100	0.853	0.790	0.669	0.546	0.399
150	0.942	0.909	0.835	0.746	0.615
200	0.980	0.965	0.928	0.874	0.783
300	0.997	0.995	0.987	0.973	0.941

Таблица 2.61

Мощность критерия Дудевича-ван дер Мюлена $H(m^*,n)$ относительно гипотезы H_2

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.144	0.097	0.050	0.026	0.011
20	0.166	0.115	0.062	0.033	0.015
30	0.192	0.136	0.076	0.042	0.020
40	0.217	0.158	0.092	0.053	0.026
50	0.252	0.188	0.113	0.069	0.035
100	0.407	0.327	0.224	0.151	0.088
150	0.531	0.449	0.332	0.242	0.156
200	0.637	0.560	0.440	0.339	0.235
300	0.790	0.729	0.623	0.522	0.401

Следует отметить, что относительно гипотезы H_2 при малых n наблюдается небольшое смещение (см. таблицу 2.64)..

Таблица 2.62

Мощность критерия Дудевича-ван дер Мюлена $H(m^*,n)$ относительно гипотезы H_3

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.169	0.115	0.060	0.031	0.013
20	0.192	0.134	0.071	0.038	0.017
30	0.215	0.152	0.084	0.046	0.021
40	0.237	0.172	0.098	0.055	0.026
50	0.260	0.191	0.111	0.064	0.031
100	0.355	0.275	0.175	0.110	0.058
150	0.442	0.356	0.242	0.162	0.093
200	0.522	0.435	0.313	0.219	0.135
300	0.650	0.568	0.440	0.334	0.224

Но размер окна m влияет также на мощность критериев. Причём оптимальное m зависит и от конкурирующей гипотезы. В данном случае нами были получены оптимальные значения m, при которых критерий Дудевича–ван дер Мюлена (2.25) показывает наибольшую мощность относительно конкурирующих гипотез H_1, H_2 и H_3. Полученные результаты относительно гипотез H_2 и H_3 представлены в таблицах 2.63 и 2.64. А относительно гипотезы H_1 мощность всегда возрастает при увеличении m, другими словами максимальная мощность в этом случае всегда будет при $m = \left[\frac{n-1}{2}\right]$.

Критерии, базирующиеся на оценках энтропии, представляют собой достаточно эффективные критерии проверки гипотез о принадлежности наблюдений равномерному закону. В частности они, как правило, существенно превосходят критерии равномерности, в которых используются разности последовательных порядковых статистик (например, критерии Шермана, Кимбелла, Морана, Янга).

Таблица 2.63

Оптимальные значения m относительно гипотезы H_2

n	m	n	m
$n \le 17$	1	$55 \le n \le 68$	4
$17 \le n \le 34$	2	$69 \le n \le 89$	5
$35 \le n \le 54$	3	$89 \le n \le 100$	6

Таблица 2.64

Оптимальные значения m относительно гипотезы H_3

n	m	n	m
$5 \le n \le 10$	2	$51 \le n \le 60$	7
$11 \le n \le 21$	3	$61 \le n \le 72$	8
$22 \le n \le 30$	4	$73 \le n \le 82$	9
$31 \le n \le 38$	5	$83 \le n \le 97$	10
$39 \le n \le 50$	6	98-100	11

Относительно конкурирующих гипотез вида H_2 или H_3 эти критерии несколько уступают в мощности критериям типа Хегази–Грина, Фросини, Неймана–Бартона, но у них отсутствует смещённость относительно конкурирующих гипотез вида H_1 и, даже более того, относительно такого рода гипотез они имеют преимущество в мощности перед большинством критериев, включая непараметрические критерии согласия, особенно при больших размерах окна m.

Недостатками при использовании критерия Дудевича–ван дер Мюлена является зависимость распределения статистики от объема выборки n и необходимость использования таблицы процентных точек, а также некоторая неопределенность с выбором m. В то же время критерий обладает достаточно высокой мощностью относительно конкурирующих гипотез вида H_1 и неплохой мощностью относительно других конкурирующих гипотез.

2.13. Модификации энтропийного критерия

В работе [49] был предложен энтропийный критерий проверки отклонения распределения от нормального закона, базирующийся на использовании двух новых оценок энтропии [12, 48, 33], а в [50] предложены два варианта критерия проверки равномерности, аналогичных критерию Дудевича–ван дер Мюлена.

Используемые в критериях статистики имеют вид [50]:

$$HY_1(m,n) = -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\left(\frac{U_{i+m}-U_{i-m}}{\hat{F}(U_{i+m})-\hat{F}(U_{i-m})}\right), \tag{2.26}$$

$$HY_2(m,n) = -\sum_{i=1}^{n}\ln\left(\frac{U_{i+m}-U_{i-m}}{\hat{F}(U_{i+m})-\hat{F}(U_{i-m})}\right)\left(\frac{\hat{F}(U_{i+m})-\hat{F}(U_{i-m})}{\sum_{j=1}^{n}\left(\hat{F}(U_{j+m})-\hat{F}(U_{j-m})\right)}\right), \tag{2.27}$$

где

$$\hat{F}(U_i) = \frac{n-1}{n(n+1)}\left(i+\frac{1}{n-1}+\frac{U_i-U_{i-1}}{U_{i+1}-U_{i-1}}\right),\ i=2,\ldots,n-1,$$

$$\hat{F}(U_1) = 1-\hat{F}(U_n) = \frac{1}{(n+1)}.$$

Проверяемая гипотеза о равномерности отклоняется при больших значениях статистик (2.26) и (2.27) $HY_i(m,n) > HY_{i,\alpha}(m,n)$. Критические значения статистики (2.26) представлены в таблице 2.65, а статистики (2.27) – в таблице 2.66. Процентные точки приведены при различных значениях параметра m.

Полученные оценки мощности критерия со статистикой (2.26) при проверке равномерности по отношению к конкурирующим гипотезам H_1, H_2 и H_3 представлены соответственно в таблицах 2.67, 2.68 и 2.69, а оценки мощности критерия со статистикой (2.27) – в таблицах 2.70, 2.71 и 2.72. Оценки мощности представлены при оптимальных значениях m^* для параметра m, рекомендуемых в таблице 2.59.

Таблица 2.65

Критические значения статистики критерия $HY_1(m,n)$

n	m	$1-\alpha$				
		0.8	0.85	0.9	0.95	0.99
10	1	0.464	0.521	0.598	0.720	0.984
	2	0.243	0.288	0.349	0.449	0.666
	3	0.171	0.213	0.271	0.364	0.570
	4	0.140	0.181	0.237	0.329	0.533
20	1	0.376	0.408	0.451	0.519	0.662
	2	0.196	0.221	0.255	0.308	0.424
	3	0.136	0.159	0.190	0.239	0.345
	4	0.107	0.128	0.158	0.205	0.307
	5	0.089	0.110	0.139	0.185	0.286
30	1	0.344	0.368	0.399	0.449	0.551
	2	0.179	0.197	0.221	0.259	0.340
	3	0.123	0.140	0.161	0.196	0.270
	4	0.096	0.111	0.132	0.164	0.236
	5	0.080	0.094	0.114	0.146	0.215
40	1	0.327	0.347	0.372	0.412	0.494
	2	0.170	0.184	0.204	0.234	0.298
	3	0.117	0.130	0.147	0.174	0.232
	4	0.090	0.102	0.118	0.144	0.199
	5	0.074	0.086	0.101	0.126	0.179
	6	0.064	0.075	0.090	0.114	0.167
50	1	0.317	0.333	0.355	0.389	0.458
	2	0.164	0.176	0.193	0.218	0.271
	3	0.112	0.123	0.138	0.160	0.208
	4	0.087	0.097	0.110	0.131	0.177
	5	0.071	0.081	0.094	0.114	0.158
	6	0.061	0.070	0.083	0.103	0.145

Окончание таблицы 2.65

100	1	0.293	0.304	0.318	0.339	0.381
	2	0.151	0.159	0.169	0.184	0.216
	3	0.103	0.110	0.118	0.132	0.159
	4	0.079	0.085	0.093	0.105	0.131
	5	0.064	0.070	0.077	0.089	0.113
	6	0.054	0.060	0.067	0.078	0.102
150	7	0.045	0.049	0.054	0.062	0.078
200	8	0.039	0.042	0.046	0.052	0.064
300	9	0.034	0.036	0.038	0.043	0.052

Таблица 2.66

Критические значения статистики критерия $HY_2(m,n)$

n	m	$1-\alpha$				
		0.8	0.85	0.9	0.95	0.99
10	1	0.350	0.399	0.466	0.574	0.807
	2	0.201	0.245	0.304	0.400	0.611
	3	0.151	0.193	0.250	0.343	0.549
	4	0.129	0.171	0.226	0.318	0.522
20	1	0.284	0.312	0.349	0.409	0.535
	2	0.165	0.189	0.220	0.272	0.382
	3	0.118	0.140	0.170	0.218	0.323
	4	0.094	0.116	0.145	0.193	0.296
	5	0.081	0.103	0.131	0.179	0.280
	6	0.073	0.095	0.123	0.170	0.270
	7	0.068	0.089	0.117	0.163	0.263
30	1	0.260	0.280	0.308	0.351	0.441
30	2	0.153	0.170	0.193	0.229	0.306
30	3	0.108	0.124	0.145	0.179	0.252
30	4	0.085	0.100	0.121	0.154	0.224

Окончание таблицы 2.66

30	5	0.072	0.086	0.106	0.139	0.208
30	6	0.063	0.078	0.098	0.130	0.199
30	7	0.057	0.072	0.092	0.124	0.193
40	1	0.248	0.264	0.286	0.321	0.392
	2	0.147	0.160	0.178	0.207	0.268
	3	0.103	0.116	0.133	0.159	0.216
	4	0.081	0.093	0.109	0.134	0.189
	5	0.067	0.079	0.095	0.120	0.174
	6	0.058	0.070	0.085	0.110	0.164
	7	0.053	0.064	0.079	0.104	0.157
50	1	0.240	0.254	0.273	0.302	0.362
	2	0.143	0.154	0.170	0.194	0.245
	3	0.101	0.111	0.125	0.147	0.194
	4	0.078	0.088	0.102	0.123	0.168
	5	0.065	0.074	0.087	0.108	0.152
	6	0.056	0.065	0.078	0.098	0.142
	7	0.050	0.059	0.072	0.092	0.135
100	1	0.222	0.231	0.243	0.261	0.297
	2	0.133	0.141	0.150	0.165	0.195
	3	0.094	0.100	0.109	0.122	0.149
	4	0.073	0.079	0.086	0.099	0.124
	5	0.060	0.065	0.073	0.084	0.109
	6	0.051	0.056	0.063	0.075	0.099
	7	0.045	0.050	0.057	0.068	0.092
150	7	0.043	0.047	0.052	0.060	0.077
200	8	0.037	0.040	0.044	0.050	0.063
300	9	0.033	0.035	0.037	0.042	0.051

Таблица 2.67

Мощность критерия $HY_1(m^*, n)$ относительно гипотезы H_1

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.347	0.254	0.145	0.080	0.035
20	0.463	0.361	0.228	0.139	0.071
30	0.562	0.458	0.311	0.203	0.112
40	0.648	0.547	0.394	0.273	0.160
50	0.695	0.600	0.449	0.323	0.199
100	0.853	0.789	0.669	0.546	0.398
150	0.942	0.909	0.835	0.746	0.615
200	0.980	0.965	0.927	0.874	0.783
300	0.997	0.995	0.987	0.972	0.940

Таблица 2.68

Мощность критерия $HY_1(m^*, n)$ относительно гипотезы H_2

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.144	0.097	0.050	0.026	0.011
20	0.167	0.116	0.062	0.033	0.015
30	0.192	0.137	0.076	0.043	0.020
40	0.218	0.158	0.092	0.053	0.026
50	0.253	0.189	0.114	0.069	0.035
100	0.408	0.328	0.224	0.151	0.089
150	0.532	0.450	0.333	0.243	0.156
200	0.638	0.561	0.441	0.340	0.236
300	0.791	0.729	0.623	0.522	0.402

Таблица 2.69

Мощность критерия $HY_1\left(m^*, n\right)$ относительно гипотезы $\boldsymbol{H}_3$

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.169	0.115	0.059	0.031	0.013
20	0.193	0.134	0.072	0.038	0.017
30	0.215	0.153	0.084	0.046	0.021
40	0.238	0.172	0.098	0.055	0.026
50	0.261	0.191	0.111	0.064	0.031
100	0.356	0.275	0.176	0.110	0.059
150	0.442	0.357	0.242	0.162	0.093
200	0.522	0.435	0.313	0.219	0.135
300	0.651	0.569	0.441	0.334	0.224

Таблица 2.70

Мощность критерия $HY_2\left(m^*, n\right)$ относительно гипотезы $\boldsymbol{H}_1$

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.362	0.265	0.151	0.083	0.036
20	0.515	0.407	0.262	0.163	0.082
30	0.636	0.532	0.373	0.250	0.143
40	0.733	0.638	0.481	0.346	0.211
50	0.789	0.704	0.557	0.421	0.274
100	0.925	0.883	0.793	0.687	0.540
150	0.979	0.963	0.921	0.863	0.764
200	0.995	0.990	0.974	0.948	0.896
300	0.9996	0.999	0.997	0.993	0.981

Таблица 2.71

Мощность критерия $HY_2\left(m^*, n\right)$ относительно гипотезы $\boldsymbol{H}_2$

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.140	0.095	0.049	0.025	0.011
20	0.154	0.106	0.056	0.030	0.013
30	0.169	0.118	0.065	0.036	0.017
40	0.184	0.131	0.074	0.042	0.020
50	0.210	0.153	0.089	0.052	0.026
100	0.340	0.266	0.174	0.113	0.063
150	0.447	0.366	0.258	0.179	0.110
200	0.545	0.463	0.346	0.253	0.166
300	0.707	0.634	0.518	0.413	0.300

Таблица 2.72

Мощность критерия $HY_2\left(m^*, n\right)$ относительно гипотезы $\boldsymbol{H}_3$

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.168	0.114	0.059	0.030	0.013
20	0.191	0.133	0.071	0.038	0.016
30	0.212	0.150	0.082	0.045	0.020
40	0.233	0.167	0.094	0.053	0.024
50	0.254	0.185	0.107	0.061	0.029
100	0.347	0.267	0.169	0.105	0.055
150	0.430	0.344	0.231	0.153	0.087
200	0.507	0.419	0.297	0.206	0.125
300	0.634	0.549	0.421	0.314	0.207

Критерий со статистикой (2.26) по мощности эквивалентен критерию Дудевича–ван дер Мюлена, в чем можно убедиться, сравнив соответствующие оценки мощности (имеющиеся различия не превышают погрешности моделирования). А критерий со статистикой (2.27), имея относительно конкурирующей гипотезы H_1 преимущество в мощности перед всеми критериями, существенно уступает в мощности многим критериям равномерности по отношению к конкурирующим гипотезам H_2 и H_3.

Следует отметить, что, как и у критерия Дудевича–ван дер Мюлена, у обеих модификаций относительно гипотезы H_2 при малых n также наблюдается некоторое смещение.

Аналогичные исследования зависимости мощности от размера окна m были выполнены и для критериев со статистиками (2.26) и (2.27). Для критерия со статистикой (2.26) результаты оказались идентичными полученным для критерия Дудевича–ван дер Мюлена со статистикой (2.25).

Однако для критерия со статистикой (2.27) результаты отличаются. Относительно гипотезы H_1 (как и в случае других критериев) мощность всегда возрастает при увеличении m. Но относительно гипотез H_2 и H_3 мощность достигает максимального значения при других размерах окна m.

Некоторые оценки мощности критерия со статистикой (2.27) относительно конкурирующих гипотез H_2 и H_3 при $\alpha = 0.05$ в зависимости от размера окна m представлены в таблице 2.73.

Таблица 2.73

Оценки мощности критерия $HY_2(m,n)$ в зависимости от размера окна m

n	Размер окна m						
	1	2	3	4	5	6	7
Относительно $\boldsymbol{H_2}$							
10	0.057	0.052	0.049	0.046	–	–	–
20	0.072	0.067	0.062	0.056	0.052	0.049	0.046
30	0.085	0.082	0.076	0.070	0.065	0.060	0.056
40	0.097	0.0968	0.092	0.086	0.080	0.074	0.069
50	0.108	0.111	0.108	0.102	0.095	0.089	0.083
100	0.155	0.176	0.1836	0.184	0.180	0.174	0.166

Окончание таблицы 2.73

n	Размер окна m						
	1	2	3	4	5	6	7
Относительно $\boldsymbol{H_3}$							
10	0.059	0.060	0.059	0.058	–	–	–
20	0.068	0.071	0.072	0.071	0.069	0.068	0.067
30	0.075	0.081	0.0834	0.0835	0.082	0.081	0.079
40	0.081	0.090	0.094	0.0953	0.0953	0.094	0.093
50	0.087	0.098	0.104	0.1072	0.1075	0.1073	0.106
100	0.111	0.133	0.148	0.159	0.165	0.169	0.171

Модификации энтропийного критерия (2.26), (2.27) наряду с аналогичными достоинствами имеют те же недостатки, что и критерий Дудевича-ван дер Мюлена: зависимость распределений статистик от объема выборки n и необходимость использования таблиц процентных точек, а также имеющаяся неопределенность с выбором m.

2.14. Критерий Кресси 1

В ряде критериев при формировании статистики критерия используются разности между порядковыми статистиками, отстоящие друг от друга в вариационном ряду на некотором расстоянии m [8, 9]. Статистика одного из критериев, рассматриваемых в [9], имеет вид

$$S_n^{(m)} = \sum_{i=0}^{n+1-m} \left(n(U_{i+m} - U_i)\right)^2 ,$$

где $U_0 = 0,\ U_{n+1} = 1$. При $m = 1$ эта статистика отличается от статистики Морана (2.5) только множителем n^2. Однако исследование свойств критерия при различных размерах окна m показало, что такой критерий крайне неудачен.

Более разумным показалось предложить критерий со статистикой в следующем виде:

$$S_n^{(m)} = \sum_{i=0}^{n+1-m} \left(U_{i+m} - U_i - \frac{m}{n+1}\right)^2 . \qquad (2.28)$$

При $m=1$ статистика такого критерия совпадает со статистикой критерия Кимбелла. Но следует заметить, что статистика (2.28) уже существенно отличается от вида, предложенного в [9].

Критерий является правосторонним. Распределения статистики сильно зависят от объёма выборок n. Критические значения представлены в таблице 2.74. В процессе исследований данного критерия при вычислении статистики (2.28) размер окна $m=m^*$ выбирали в соответствии с рекомендациями таблицы 2.59.

Таблица 2.74

Критические значения статистики (2.28) критерия $S_n^{(m)}$, $m=m^*$

n	$1-\alpha$				
	0.8	0.85	0.9	0.95	0.99
10	0.215	0.245	0.283	0.353	0.514
20	0.175	0.194	0.221	0.269	0.383
30	0.155	0.171	0.193	0.231	0.321
40	0.144	0.158	0.177	0.210	0.288
50	0.121	0.131	0.146	0.170	0.227
100	0.065	0.069	0.075	0.084	0.104
150	0.051	0.054	0.058	0.064	0.077
200	0.044	0.046	0.049	0.054	0.064
300	0.033	0.035	0.036	0.039	0.045

Оценки мощности критерия относительно конкурирующих гипотез H_1, H_2 и H_3 представлены в таблицах 2.75, 2.76 и 2.77.

При малых n относительно конкурирующей гипотезы H_1 критерий отличается существенным смещением. Причём смещённость сохраняется при больших объёмах выборок, чем она проявляется в случае аналогичных ситуаций с другими критериями. И с ростом n мощность относительно гипотезы H_1 возрастает не очень быстро.

Можно обратить внимание, что и со статистикой (2.28) критерий обладает не очень высокой мощностью. Впрочем, мощность зависит и от выбора размера окна m. Например, при $m=1$, когда статистика критерия совпадает со статистикой Морана (2.5), для $n \le 200$ мощность критерия относительно гипотезы H_1 выше чем при $m = m^*$, а смещение меньше (см.таблицу 2.6).

Т а б л и ц а 2.75

Мощность критерия $S_n^{(m)}$, $m = m^*$ относительно гипотезы H_1

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.069	0.037	0.012	0.004	0.001
20	0.081	0.047	0.016	0.006	0.001
30	0.096	0.055	0.021	0.008	0.002
40	0.115	0.068	0.027	0.010	0.003
50	0.134	0.082	0.035	0.015	0.005
100	0.264	0.187	0.102	0.054	0.023
150	0.404	0.311	0.194	0.118	0.059
200	0.541	0.444	0.308	0.207	0.118
300	0.763	0.684	0.551	0.430	0.297

Т а б л и ц а 2.76

Мощность критерия $S_n^{(m)}$, $m = m^*$ относительно гипотезы H_2

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.220	0.157	0.088	0.049	0.022
20	0.246	0.179	0.103	0.058	0.027
30	0.272	0.201	0.118	0.068	0.032
40	0.297	0.222	0.133	0.079	0.038
50	0.316	0.239	0.146	0.088	0.044
100	0.400	0.314	0.202	0.127	0.067
150	0.482	0.391	0.267	0.177	0.099
200	0.560	0.467	0.335	0.233	0.139
300	0.679	0.593	0.456	0.340	0.221

Таблица 2.77

Мощность критерия $S_n^{(m)}$, $m = m^*$ относительно гипотезы H_3

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.173	0.118	0.061	0.032	0.013
20	0.188	0.130	0.069	0.036	0.016
30	0.204	0.143	0.077	0.042	0.018
40	0.219	0.156	0.086	0.047	0.021
50	0.233	0.167	0.094	0.052	0.024
100	0.292	0.218	0.129	0.076	0.037
150	0.352	0.270	0.169	0.104	0.054
200	0.409	0.323	0.212	0.136	0.074
300	0.509	0.419	0.293	0.200	0.118

Относительно гипотез вида H_2 критерий имеет мощность ниже среднего (среди рассматриваемых в руководстве критериев) и ещё ниже оказывается мощность относительно гипотезы H_3. В целом же надо признать, что данный вариант критерия также не является очень удачным. Возможно, это связано с выбором размера окна m.

2.15. Критерий Кресси 2

Предлагаемая в [9] для использования в критерии проверки равномерности вторая статистика может быть представлена в виде

$$L_n^{(m)} = -\sum_{i=0}^{n+1-m} \ln\left[n\left(U_{i+m} - U_i\right)\right],$$

где аналогично $U_0 = 0,\ U_{n+1} = 1$. При $m = 1$ и замене под знаком логарифма n на $n+1$ эта статистика сводится к статистике (2.6)

Более логично в таком критерии использовать статистику вида

$$L_n^{(m)} = -\sum_{i=0}^{n+1-m} \ln\left[\frac{(n+1)}{m}(U_{i+m} - U_i)\right] \tag{2.29}$$

или её же в более экономичной для вычислений форме

$$L_n^{(m)} = -(n+2-m)\ln\left(\frac{n+1}{m}\right) - \sum_{i=0}^{n+1-m} \ln\left(U_{i+m} - U_i\right).$$

В процессе исследований при вычислении статистики величина $m = m^*$ выбиралась в соответствии с таблицей 2.59.

Критерий правосторонний, критические значения представлены в таблице 2.78.

Оценки мощности критерия относительно конкурирующих гипотез H_1, H_2 и H_3 представлены в таблицах 2.79, 2.80 и 2.81.

Данный критерий в общем случае не выделяется высокой мощностью, но неожиданно хорошую мощность демонстрирует относительно H_1. В отличие от первой модификации не отмечено смещённости критерия.

В то же время критерий показывает мощность ниже среднего относительно конкурирующих гипотез H_2 и H_3.

Таблица 2.78

Критические значения статистики критерия (2.29) $L_n^{(m)}$, $m = m^*$

n	$1-\alpha$				
	0.8	0.85	0.9	0.95	0.99
10	2.054	2.368	2.797	3.501	5.062
20	3.118	3.515	4.051	4.911	6.765
30	3.764	4.213	4.809	5.770	7.792
40	4.220	4.708	5.356	6.392	8.557
50	5.206	5.728	6.419	7.517	9.827
100	10.014	10.664	11.517	12.852	15.614
150	12.721	13.444	14.389	15.867	18.879
200	14.716	15.498	16.511	18.082	21.264
300	19.322	20.197	21.332	23.081	26.605

Таблица 2.79

Мощность критерия $L_n^{(m)}$, $m = m^*$ относительно гипотезы H_1

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.283	0.201	0.109	0.058	0.024
20	0.436	0.335	0.207	0.123	0.061
30	0.570	0.465	0.315	0.206	0.112
40	0.681	0.582	0.424	0.298	0.176
50	0.736	0.644	0.492	0.360	0.225
100	0.878	0.820	0.707	0.587	0.436
150	0.958	0.930	0.867	0.787	0.662
200	0.987	0.977	0.948	0.904	0.826
300	0.998	0.997	0.991	0.980	0.954

Таблица 2.80

Мощность критерия $L_n^{(m)}$, $m = m^*$ относительно гипотезы H_2

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.172	0.120	0.066	0.036	0.016
20	0.175	0.122	0.067	0.037	0.017
30	0.177	0.124	0.068	0.038	0.018
40	0.178	0.125	0.069	0.039	0.018
50	0.196	0.140	0.079	0.045	0.021
100	0.287	0.217	0.134	0.082	0.042
150	0.352	0.275	0.178	0.115	0.063
200	0.415	0.333	0.226	0.151	0.088
300	0.543	0.458	0.336	0.242	0.154

Т а б л и ц а 2.81

Мощность критерия $L_n^{(m)}$, $m = m^*$ относительно гипотезы H_3

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.178	0.123	0.065	0.034	0.015
20	0.195	0.136	0.073	0.039	0.017
30	0.208	0.147	0.080	0.044	0.020
40	0.221	0.157	0.087	0.048	0.022
50	0.236	0.170	0.096	0.054	0.025
100	0.302	0.226	0.137	0.081	0.040
150	0.360	0.278	0.176	0.110	0.058
200	0.416	0.329	0.217	0.140	0.078
300	0.514	0.424	0.298	0.206	0.122

В то же время следует признать ряд имеющихся недостатков, затрудняющих применение критерия: зависимость распределения статистики от объема выборки n и необходимость использования таблиц процентных точек; неопределенность с выбором m и зависимость от m распределения статистики (и мощности) критерия. Возможны проблемы с вычислением статистики при наличии в выборке повторяющихся значений.

Применение данного критерия целесообразно контролировать параллельным использованием других критериев.

2.16. Критерий Пардо

Статистика критерия имеет вид [35]

$$E_{m,n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{2m}{n\left(U_{i+m} - U_{i-m}\right)}, \tag{2.30}$$

где также $U_0 = 0$, $U_{n+1} = 1$.

Критерий правосторонний. Зависимость распределений статистики от объёмов выборок демонстрируется на рис. 2.18. Критические значения представлены в таблице 2.82. В данном случае в процессе исследований при вычислении статистики значение $m = m^*$ также выбиралось в соответствии с таблицей 2.59.

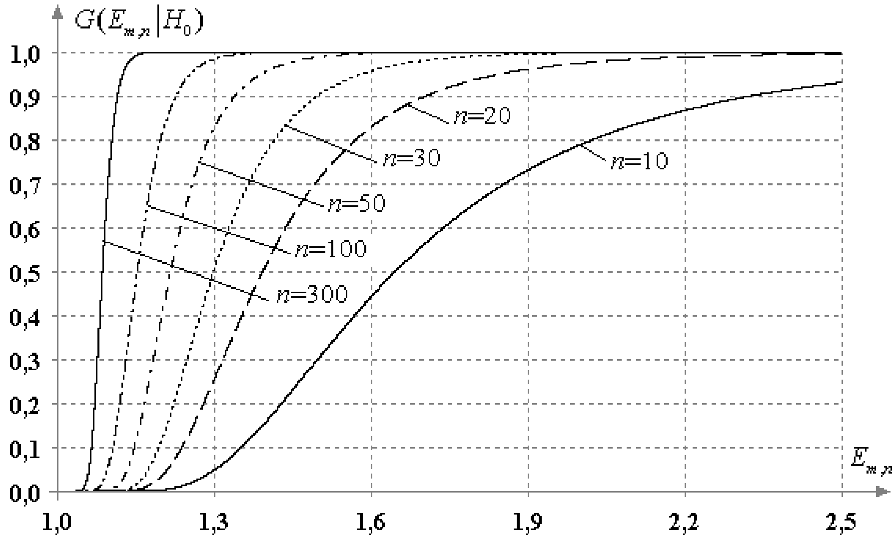

Рис. 2.18. Зависимость распределений статистики Пардо от n при m^*

Таблица 2.82

Критические значения статистики критерия $E_{m,n}$, $m = m^*$

n	$1-\alpha$				
	0.8	0.85	0.9	0.95	0.99
10	2.024	2.148	2.331	2.675	3.710
20	1.573	1.628	1.708	1.851	2.240
30	1.415	1.450	1.499	1.585	1.805
40	1.335	1.360	1.395	1.456	1.607
50	1.291	1.312	1.341	1.392	1.517
100	1.199	1.212	1.229	1.258	1.326
150	1.156	1.164	1.176	1.195	1.239
200	1.130	1.137	1.146	1.160	1.193
300	1.105	1.110	1.116	1.127	1.149

Оценки мощности критерия относительно конкурирующих гипотез H_1, H_2 и H_3 представлены в таблицах 2.83, 2.84 и 2.85.

Таблица 2.83

Мощность критерия $E_{m,n}$, $m = m^*$ относительно гипотезы H_1

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.247	0.168	0.084	0.041	0.015
20	0.260	0.175	0.085	0.039	0.014
30	0.298	0.203	0.099	0.046	0.015
40	0.344	0.240	0.121	0.057	0.020
50	0.363	0.255	0.131	0.062	0.021
100	0.526	0.408	0.247	0.138	0.058
150	0.705	0.600	0.429	0.284	0.149
200	0.836	0.757	0.608	0.457	0.286
300	0.956	0.924	0.846	0.744	0.585

Таблица 2.84

Мощность критерия $E_{m,n}$, $m = m^*$ относительно гипотезы H_2

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.172	0.121	0.066	0.036	0.016
20	0.226	0.166	0.098	0.058	0.029
30	0.275	0.210	0.132	0.083	0.045
40	0.322	0.253	0.167	0.109	0.061
50	0.369	0.296	0.202	0.136	0.080
100	0.542	0.463	0.350	0.259	0.171
150	0.671	0.598	0.485	0.385	0.278
200	0.769	0.707	0.603	0.504	0.389
300	0.886	0.845	0.769	0.687	0.578

Т а б л и ц а 2.85

Мощность критерия $E_{m,n}$, $m = m^*$ относительно гипотезы H_3

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.173	0.118	0.061	0.032	0.013
20	0.200	0.141	0.077	0.042	0.018
30	0.228	0.164	0.094	0.053	0.025
40	0.256	0.189	0.111	0.065	0.032
50	0.279	0.208	0.126	0.075	0.037
100	0.372	0.291	0.188	0.120	0.064
150	0.462	0.376	0.260	0.175	0.102
200	0.544	0.457	0.333	0.236	0.146
300	0.670	0.589	0.461	0.352	0.238

Данный критерий по мощности относительно всех рассматриваемых конкурирующих гипотез в общем ряду критериев равномерности занимает ровные позиции несколько ниже среднего.

К недостаткам критерия следует отнести зависимость распределения статистики от объёма выборки n, вследствие чего приходится ориентироваться на таблицу процентных точек. Имеется неопределенность с выбором m, от которого зависят распределения статистики и мощность критерия.

Положительным фактором является отсутствие смещения относительно гипотез вида H_1. В среднем неплохая мощность.

2.17. Критерий Шварца

Статистика критерия имеет вид [43]

$$A_n^* = \frac{n}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{U_{i+1} - U_{i-1}}{2} - \frac{1}{n}\right)^2, \tag{2.31}$$

где $U_0 = -U_1$, $U_{n+1} = 2 - U_n$.

Критерий правосторонний, критические значения представлены в таблице 2.86. На рис. 2.19 показаны распределения $G(A_n^* | H_0)$

статистики в зависимости от объёма выборки n .

Таблица 2.86

Критические значения статистики критерия A_n^*

n	$1-\alpha$					
	0.8	0.85	0.9	0.95	0.975	0.99
10	0.304	0.342	0.398	0.499	0.613	0.775
20	0.308	0.337	0.379	0.452	0.532	0.650
30	0.305	0.329	0.363	0.422	0.485	0.574
40	0.302	0.324	0.352	0.402	0.454	0.528
50	0.299	0.317	0.343	0.387	0.432	0.496
100	0.288	0.301	0.319	0.348	0.377	0.415
150	0.283	0.293	0.307	0.330	0.352	0.380
200	0.279	0.288	0.300	0.319	0.337	0.360
300	0.275	0.282	0.291	0.306	0.320	0.338

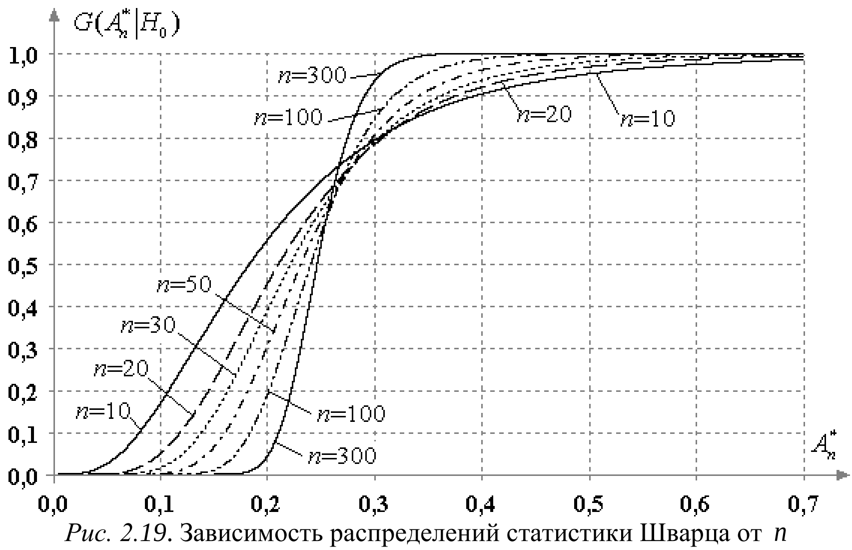

Рис. 2.19. Зависимость распределений статистики Шварца от n

Оценки мощности критерия относительно конкурирующих гипотез H_1, H_2 и H_3 представлены в таблицах 2.87, 2.88 и 2.89.

Таблица 2.87

Мощность критерия A_n^* относительно гипотезы H_1

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.220	0.154	0.081	0.040	0.014
20	0.309	0.233	0.142	0.083	0.038
30	0.377	0.296	0.193	0.123	0.065
40	0.433	0.350	0.239	0.160	0.091
50	0.482	0.398	0.284	0.198	0.119
100	0.661	0.583	0.463	0.361	0.252
150	0.773	0.708	0.598	0.496	0.378
200	0.847	0.794	0.701	0.608	0.490
300	0.930	0.900	0.837	0.767	0.668

Таблица 2.88

Мощность критерия A_n^* относительно гипотезы H_2

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.193	0.136	0.074	0.040	0.018
20	0.212	0.150	0.083	0.045	0.020
30	0.227	0.162	0.091	0.050	0.023
40	0.241	0.174	0.098	0.055	0.025
50	0.254	0.184	0.105	0.059	0.027
100	0.304	0.226	0.133	0.078	0.037
150	0.344	0.261	0.160	0.095	0.047
200	0.381	0.293	0.184	0.113	0.059
300	0.443	0.350	0.229	0.145	0.077

Таблица 2.89

Мощность критерия A_n^* относительно гипотезы H_3

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.184	0.129	0.070	0.038	0.017
20	0.202	0.143	0.080	0.045	0.021
30	0.215	0.154	0.087	0.049	0.023
40	0.227	0.163	0.093	0.053	0.026
50	0.237	0.172	0.100	0.058	0.028
100	0.277	0.206	0.123	0.073	0.036
150	0.309	0.233	0.143	0.087	0.044
200	0.336	0.257	0.161	0.099	0.052
300	0.384	0.300	0.193	0.123	0.067

Статистика критерия Шварца по виду очень близка к статистике критерия Кимбелла, но благодаря имеющимся отличиям критерий обладает заметным преимуществом в мощности (относительно рассматриваемых конкурирующих гипотез) по сравнению с группой других критериев, имеющих близкие по виду статистики с критерием Кимбелла (перед критериями Шермана, Морана, Гринвуда, Гринвуда–Кэсенберри–Миллера, Янга).

В данном случае критерий имеет частый недостаток – зависимость распределения статистики от объёма выборки n, вследствие чего приходится использовать таблицу процентных точек.

У критерия отсутствует смещение и мощность относительно гипотезы H_1 выше, чем у предшествующего критерия Пардо. В то же время относительно H_2 и H_3 по мощности он значительно уступает последнему.

2.18. Сравнительный анализ мощности специальных критериев проверки равномерности

Примеры не очень подробного анализа мощности критериев равномерности встречаются в ряде публикаций. Например, некоторый сравнительный анализ критериев равномерности проводился в [29]. В [50] энтропийный критерий сравнивался с непараметрическими критериями согласия. По-видимому, разрозненные оценки мощности можно найти и в других работах.

Рассмотренные специальные критерии проверки равномерности в таблице 2.90 упорядочены по убыванию мощности относительно соответствующих конкурирующих гипотез (по величине мощности $1-\beta$, проявленной при $n=100$ и уровне значимости $\alpha=0.1$).

Таблица 2.90

Упорядоченность критериев равномерности по мощности относительно конкурирующих гипотез H_1, H_2 и H_3

№ п/п	Относительно H_1	$1-\beta$	Относительно H_2	$1-\beta$	Относительно H_3	$1-\beta$
1	Модификация энтропийного критерия 2	0.883	Хегази-Грина T_1	0.610	Хегази-Грина T_1	0.522
2	Неймана–Бартона N_2	0.837	Фросини	0.603	Фросини	0.522
3	Кресси 2	0.820	Хегази-Грина T_2	0.602	Хегази-Грина T_1^*	0.520
4	Дудевича–ван дер Мюлена	0.790	Неймана–Бартона N_2	0.597	Хегази-Грина T_2	0.508
5	Модификация энтропийного критерия 1	0.789	Хегази-Грина T_1^*	0.595	Хегази-Грина T_2^*	0.506
6	Неймана–Бартона N_3	0.766	Хегази-Грина T_2^*	0.585	Неймана–Бартона N_2	0.447
7	Неймана–Бартона N_4	0.739	Неймана–Бартона N_3	0.577	Неймана–Бартона N_3	0.416
8	Ченга-Спиринга	0.722	Неймана–Бартона N_4	0.557	Неймана–Бартона N_4	0.381
9	Шварца	0.583	Пардо	0.463	Пардо	0.291
10	Хегази-Грина T_1^*	0.443	Модификация энтропийного критерия 1	0,328	Дудевича–ван дер Мюлена	0.275

Окончание таблицы 2.90

№ п/п	Относительно H_1	$1-\beta$	Относительно H_2	$1-\beta$	Относительно H_3	$1-\beta$
11	Хегази-Грина T_2^*	0.409	Дудевича–ван дер Мюлена	0.327	Модификация энтропийного критерия 1	0.275
12	Пардо	0.408	Кресси 1	0.314	Модификация энтропийного критерия 2	0.267
13	Фросини	0.384	Модификация энтропийного критерия 2	0.266	Кресси 2	0.226
14	Хегази-Грина T_1	0.322	Гринвуда–Кэсенберри–Миллера	0.244	Кресси 1	0.218
15	Хегази-Грина T_2	0.308	Шварца	0.226	Шварца	0.206
16	Гринвуда–Кэсенберри–Миллера	0.290	Кресси 2	0.217	Гринвуда–Кэсенберри–Миллера	0.186
17	Кимбелла	0.279	Шермана	0.204	Кимбелла	0.165
18	Морана 1	0.279	Кимбелла	0.201	Морана 1	0.165
19	Гринвуда	0.279	Морана 1	0.201	Гринвуда	0.165
20	Шермана	0.215	Гринвуда	0.201	Шермана	0.154
21	Кресси 1	0.187	Морана 2	0.193	Морана 2	0.143
22	Морана 2	0.187	Ченга-Спиринга	0.168	Ченга-Спиринга	0.106
23	Янга	0.115	Янга	0.108	Янга	0.104

В столбце для H_1 темным цветом выделены критерии, которые относительно гипотезы H_1 при малых n обладают ярко выраженной смещённостью. В меньшей степени смещённость относительно H_1

проявляется у критериев Неймана–Бартона со статистиками N_2 и N_3. Этот недостаток не отмечен только для некоторых критериев: для энтропийного критерия Дудевича–ван дер Мюлена и его модификаций, для критериев Ченга–Спиринга, Шварца и Пардо.

Все модификации критериев, использующие в качестве статистик различные оценки энтропии, показали высокую мощность относительно конкурирующей гипотезы H_1. В то же время относительно гипотез вида H_2 и H_3 оценки мощности этих критериев более скромные. И надо отметить, что только у этих критериев при малых n наблюдаются признаки смещённости относительно гипотезы H_2.

Критерий Неймана–Бартона со статистикой N_2 показывает высокую мощность относительно H_1 и сравнительно высокие результаты относительно H_2 и H_3.

Стабильно неплохую способность отличать конкурирующие гипотезы от равномерного закона демонстрируют критерии Хегази–Грина и Фросини.

Низкую мощность демонстрируют критерии, в статистиках которых суммируются модули или квадраты разностей $U_i - U_{i-1}$ значений последовательных порядковых статистик (критерии Шермана, Кимбелла, Морана, Гринвуда, Гринвуда–Кэсенберри–Миллера).

Особенно низкую мощность относительно всех трёх рассматриваемых в руководстве гипотез показал критерий Янга [47], что свидетельствует о крайней неудачности попытки использования соответствующей статистики в критерии проверки гипотезы о равномерности. Можно предположить, что столь же неудачной идеей окажется применение такой статистики в любом критерии, предназначенном для проверки согласия наблюдаемой выборки с некоторым конкретным законом распределения.

В таблице 2.91 кратко перечислены достоинства и недостатки рассмотренных в разделе специальных критериев равномерности и даны некоторые вытекающие из этих особенностей рекомендации. В последнем столбце таблицы приводятся рейтинги соответствующих критериев, представляющие собой интервалы мест, занятых критериями в упорядоченном списке мощностей относительно рассмотренных гипотез H_1, H_2 и H_3.

Т а б л и ц а 2.91

Рекомендации по применению специальных критериев проверки равномерности

№ п/п	Критерий	Статистика	Недостатки, достоинства рекомендации, рейтинг
1	Шермана, (2.1)	$\omega_n = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n+1}\left\|U_i - U_{i-1} - \frac{1}{n+1}\right\|$	При малых n и α критерий является смещённым относительно H_1. Невысокая мощность критерия. Нормализованные статистики хорошо аппроксимируются нормальным законом. Рейтинг {17-20}.
2	Кимбелла, (2.4)	$A = \sum_{i=1}^{n+1}\left(U_i - U_{i-1} - \frac{1}{n+1}\right)^2$	Зависимость распределения статистики от объема выборки n и необходимость использования таблицы процентных точек. При малых n и α критерий является смещённым относительно H_1. Мощность критерия не очень высокая, но выше критерия Шермана. Рейтинг {17-20}.
3	Морана 1, (2.5)	$B = \sum_{i=1}^{n+1}\left(U_i - U_{i-1}\right)^2$	Критерий по мощности эквивалентен критериям Кимбелла и Гринвуда. Те же достоинства и недостатки. Рейтинг {17-20}.

Продолжение таблицы 2.91

№ п/п	Критерий	Статистика	Недостатки, достоинства рекомендации, рейтинг
4	Морана 2, (2.6)	$M_n = -\sum_{i=1}^{n+1} \ln\left[(n+1)(U_i - U_{i-1})\right]$	Имеющиеся аппроксимации модифицированных статистик χ^2-распределением и нормальным законом заметно отличаются от действительных распределений статистик. Вследствие этого приходится ориентироваться на таблицу процентных точек. Возможны проблемы с вычислением статистики при наличии в выборке повторяющихся значений. Очень низкая мощность. Рейтинг {21-22}.
5	Ченга–Спиринга, (2.9)	$W_p = \dfrac{\left[\left(U_n - U_1\right)\dfrac{n+1}{n-1}\right]^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(U_i - \bar{U}\right)^2}$	Двусторонний критерий. Зависимость распределения статистики от объема выборки n и необходимость использования таблицы процентных точек. Имеет высокую мощность относительно конкурирующей гипотезы H_1, но *практически неспособен отличать гипотезы вида* H_3. *Применять совместно с другими*. Рейтинг {8-22}.

Продолжение таблицы 2.91

№ п/п	Критерий	Статистика	Недостатки, достоинства рекомендации, рейтинг
6	Янга, (2.17)	$M=\frac{1}{l}\sum_{i=1}^{n}\min(D_i,D_{i+1})$, $D_1=U_1,\ D_i=U_i-U_{i-1},\ D_{n+1}=1-U_n$	Критерий двусторонний. Нормализованная статистика хорошо аппроксимруется стандартным нормальным законом. Показывает очень низкую мощность. *Не рекомендуется использовать*. Рейтинг {23}.
7	Гринвуда, (2.21)	$G=(n+1)\sum_{i=1}^{n+1}(U_i-U_{i-1})^2$	Приходится пользоваться таблицей процентных точек, так как распределения статистики медленно сходятся к упоминаемым нормальным законам. При малых n и α критерий является смещённым относительно H_1. Невысокая мощность. По свойствам эквивалентен критериям Кимбелла и Морана1. Рейтинг {17-20}.
8	Гринвуда–Кэсенберри–Миллера, (2.22)	$Q=\sum_{i=1}^{n+1}(U_i-U_{i-1})^2+\sum_{i=1}^{n}(U_{i+1}-U_i)(U_i-U_{i-1})$	Зависимость распределения статистики от объема выборки n и необходимость использования таблицы процентных точек. При малых n и α критерий является смещённым относительно H_1. Невысокая мощность. Рейтинг {14-16}.

Продолжение таблицы 2.91

№ п/п	Критерий	Статистика	Недостатки, достоинства рекомендации, рейтинг
9	Шварца, (2.31)	$$A_n^* = \frac{n}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{U_{i+1} - U_{i-1}}{2} - \frac{1}{n}\right)^2,$$ где $U_0 = -U_1$, $U_{n+1} = 2 - U_n$	Зависимость распределения статистики от объема выборки n и необходимость использования таблицы процентных точек. Благодаря имеющимся отличиям от критерия Кимбелла, обладает преимуществом в мощности по сравнению с группой близких критериев (Шермана, Кимбелла, Морана, Гринвуда, Янга). Рейтинг {9-15}.
10	Хегази–Грина T_1, (2.12)	$$T_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left\|U_i - \frac{i}{n+1}\right\|$$	Зависимость распределения статистики от объема выборки n и необходимость использования таблицы процентных точек. При малых n и α критерий является смещённым относительно H_1. Критерий обладают достаточно высокой мощностью относительно других конкурирующих гипотез. Рейтинг {1-14}.

Продолжение таблицы 2.91

№ п/п	Критерий	Статистика	Недостатки, достоинства рекомендации, рейтинг
11	Хегази–Грина T_1^*, (2.14)	$$T_1^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left\|U_i - \frac{i-1}{n-1}\right\|$$	Те же достоинства и недостатки, что и у критерия со статистикой T_1. Модификация статистики T_1^* по сравнению с T_1 даёт некоторое преимущество в мощности только относительно H_1. Рейтинг {3-10}.
12	Хегази–Грина T_2, (2.13)	$$T_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(U_i - \frac{i}{n+1}\right)^2$$	Те же недостатки и достоинства, что и у критерия со статистикой T_1. Как правило, чуть уступает в мощности критерию со статистикой T_1. Рейтинг {3-15}.
13	Хегази–Грина T_2^*, (2.15)	$$T_2^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(U_i - \frac{i-1}{n-1}\right)^2$$	Те же достоинства и недостатки, что и у критерия со статистикой T_1. Модификация статистики T_2^* по сравнению с T_2 даёт некоторое преимущество в мощности только относительно H_1. Рейтинг {5-11}.

Продолжение таблицы 2.91

№ п/п	Критерий	Статистика	Недостатки, достоинства рекомендации, рейтинг
14	Фросини, (2.20)	$B_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \left\| U_i - \frac{i-0.5}{n} \right\|$	Приходится пользоваться таблицей процентных точек. При $n \geq 50$ можно использовать аппроксимацию в виде бета-распределения 3-го рода. При малых n и α критерий является смещённым относительно H_1. Обладает достаточно высокой мощностью относительно других конкурирующих гипотез. Рейтинг {2-13}.
15	Неймана–Бартона, N_2, (2.24)	$N_2 = \sum_{j=1}^{2} V_j^2$, где $V_j = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \pi_j (U_i - 0.5)$, $\pi_1(y) = 2\sqrt{3}y$; $\pi_2(y) = \sqrt{5}(6y^2 - 0,5)$	При малых n и α наблюдается незначительное смещение критерия относительно H_1. При $n > 20$ распределения статистик хорошо аппроксимируется χ_2^2-распределением. Критерий со статистикой N_2 демонстрируют хорошую мощность и является наиболее предпочтительным из критериев Неймана–Бартона. Рейтинг {2-6}.

Продолжение таблицы 2.91

№ п/п	Критерий	Статистика	Недостатки, достоинства рекомендации, рейтинг
16	Неймана–Бартона, N_3, (2.24)	$N_3 = \sum_{j=1}^{3} V_j^2$, где $V_j = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \pi_j (U_i - 0.5)$, $\pi_3(y) = \sqrt{7}\left(20y^3 - 3y\right)$	При малых n и α наблюдается некоторое смещение критерия относительно H_1. При $n > 20$ распределения статистик хорошо аппроксимируется χ_3^2-распределением. Критерий со статистикой N_3 демонстрируют хорошую мощность и является следующим по предпочтительности критерием Неймана–Бартона. Рейтинг {6-7}.
17	Неймана–Бартона, N_4, (2.24)	$N_4 = \sum_{j=1}^{4} V_j^2$, где $V_j = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \pi_j (U_i - 0.5)$, $\pi_4(y) = 3\left(70y^4 - 15y^2 + 0,375\right)$	При малых n и α наблюдается смещение критерия относительно H_1. При $n > 20$ распределения статистик хорошо аппроксимируется χ_4^2-распределениями. Критерий со статистикой N_4 демонстрируют хорошую мощность, но несколько уступает другим критериям Неймана–Бартона. Рейтинг {7-8}.

Продолжение таблицы 2.91

№ п/п	Критерий	Статистика	Недостатки, достоинства рекомендации, рейтинг
18	Дудевича–ван дер Мюлена, (2.25)	$$H(m,n) = -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln\left\{\frac{n}{2m}\left(U_{i+m} - U_{i-m}\right)\right\},$$ где m – целое и $m \le \frac{n}{2}$; если $i+m \ge n$, то $U_{i+m} = U_n$, и если $i-m \le 1$, то $U_{i-m} = U_1$	Зависимость распределения статистики от объема выборки n и необходимость использования таблицы процентных точек. Некоторая неопределенность при выборе m. Обладает высокой мощностью относительно гипотезы H_1 и неплохой мощностью относительно других гипотез. Рейтинг {4-11}.
19	Модификация энтропийного критерия 1, (2.26)	$$HY_1 = -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{U_{i+m} - U_{i-m}}{\hat{F}(U_{i+m}) - \hat{F}(U_{i-m})}\right),$$ где $$\hat{F}(U_i) = \frac{n-1}{n(n+1)}\left(i + \frac{1}{n-1} + \frac{U_i - U_{i-1}}{U_{i+1} - U_{i-1}}\right),$$ $$i = 2,\dots,n-1,$$ $$\hat{F}(U_1) = 1 - \hat{F}(U_n) = \frac{1}{(n+1)}$$	Зависимость распределения статистики от объема выборки n и необходимость использования таблицы процентных точек. Некоторая неопределенность при выборе m. По мощности эквивалентен критерию Дудевича–ван дер Мюлена. Рейтинг {4-11}.

Продолжение таблицы 2.91

№ п/п	Критерий	Статистика	Недостатки, достоинства рекомендации, рейтинг
20	Модификация энтропийного критерия 2, (2.27)	$$HY_2=-\sum_{i=1}^{n}\ln\left(\frac{U_{i+m}-U_{i-m}}{\hat{F}(U_{i+m})-\hat{F}(U_{i-m})}\right)\times \left(\frac{\hat{F}(U_{i+m})-\hat{F}(U_{i-m})}{\sum_{j=1}^{n}\left(\hat{F}\left(U_{j+m}\right)-\hat{F}\left(U_{j-m}\right)\right)}\right)$$	Имеет те же недостатки и достоинства, что и модификация 1. Превосходит в мощности модификацию 1 относительно гипотезы H_1, но уступает – относительно H_2 и H_3. Рейтинг {1-13}.
21	Пардо, (2.30)	$$E_{m,n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{2m}{n\left(U_{i+m}-U_{i-m}\right)}$$	Зависимость распределения статистики от объема выборки n и необходимость использования таблицы процентных точек. Неопределенность с выбором m, от которого зависят распределения статистики. Отсутствует смещение относительно гипотез вида H_1. В среднем неплохая мощность. Рейтинг {9-12}.

Окончание таблицы 2.91

№ п/п	Критерий	Статистика	Недостатки, достоинства рекомендации, рейтинг
22	Кресси 1, (2.28)	$S_n^{(m)} = \sum_{i=0}^{n+1-m} \left(U_{i+m} - U_i - \frac{m}{n+1} \right)^2$	Зависимость распределения статистики от n и необходимость использования таблиц процентных точек. При малых n и α наблюдается смещение критерия относительно H_1. Смещённость критерия зависит от размера окна m. Неопределенность с выбором m. Зависимость распределений статистики и мощности от m. Мощность критерия скорее ниже среднего. Рейтинг {12-21}.
23	Кресси 2, (2.29)	$L_n^{(m)} = -\sum_{i=0}^{n+1-m} \ln \left[\frac{n+1}{m} \left(U_{i+m} - U_i \right) \right]$	Зависимость распределения статистики от n и необходимость использования таблицы процентных точек. Возможны проблемы с вычислением статистики при наличии в выборке повторяющихся значений. С ростом m вероятность такой проблемы уменьшается. Неопределенность с выбором m.Зависимость распределений статистики и мощности от m. Высокая мощность относительно гипотезы H_1 и ниже среднего относительно H_2 и H_3. Рейтинг {3-16}.

3. Непараметрические критерии согласия при проверке равномерности

3.1. Критерий Колмогорова

При проверке гипотезы H_0 о принадлежности выборки равномерному закону в критерии Колмогорова [18] целесообразно использовать статистику с поправкой Большева [58,59] в форме [57]

$$S_K = \sqrt{n}D_n + \frac{1}{6\sqrt{n}} = \frac{6nD_n + 1}{6\sqrt{n}}, \tag{3.1}$$

где $D_n = \max\left(D_n^+, D_n^-\right)$, $D_n^+ = \max\limits_{1 \le i \le n}\left\{\frac{i}{n} - U_i\right\}$, $D_n^- = \max\limits_{1 \le i \le n}\left\{U_i - \frac{i-1}{n}\right\}$, U_i – элементы вариационного ряда $x_{(1)} \le x_{(2)} \le \ldots \le x_{(n)}$, построенного по исходной выборке $X_1, X_2, ..., X_n$.

При проверке равномерности на интервале [0,1] проверяемая гипотеза H_0 является простой. В этом случае предельным распределением статистики (3.1) является распределение Колмогорова с функцией распределения

$$K(s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{-2k^2 s^2}. \tag{3.2}$$

Все непараметрические критерии согласия являются правосторонними. Проверяемую гипотезу H_0 отклоняют при больших значениях статистики.

Зависимостью распределения статистики (3.1) от объема выборки можно практически пренебречь при $n > 25$ и вычислять достигнутый уровень значимости (**p**-value) $P(S_K > S_K^* | H_0) = 1 - K(S_K^*)$ в соответствии с распределением Колмогорова, где S_K^* – значение статистики критерия, вычисленное по анализируемой выборке. Менее предпочтительно принимать решение, сравнивая значение S_K^* с критическим при заданном α. Тогда можно воспользоваться процентными точками распределения Колмогорова, представленными в таблице 3.1

Среди непараметрических критериев согласия критерий Колмогорова относится к наименее мощным критериям.

Таблица 3.1

Процентные точки распределения Колмогорова

Функция распределения	Верхние процентные точки				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
$K(S)$	1.1379	1.2238	1.3581	1.4802	1.6276

Оценки мощности критерия Колмогорова при проверке равномерности по отношению к конкурирующей гипотезе H_1 приведены в таблице 3.2, оценки мощности по отношению к гипотезам H_2 и H_3 – в таблицах 3.3 и 3.4 соответственно.

Таблица 3.2

Мощность критерия Колмогорова относительно гипотезы H_1

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.128	0.079	0.035	0.015	0.005
20	0.161	0.102	0.046	0.21	0.007
30	0.196	0.126	0.058	0.265	0.009
40	0.230	0.149	0.070	0.033	0.012
50	0.263	0.176	0.084	0.040	0.014
100	0.448	0.322	0.172	0.089	0.034
150	0.622	0.484	0.289	0.162	0.070
200	0.764	0.638	0.426	0.258	0.122
300	0.928	0.857	0.683	0.489	0.280

По отношению к конкурирующей гипотезе H_1 при малых n и α проявляется смещённость критерия Колмогорова (мощность $1-\beta$ оказывается меньше заданной вероятности ошибки 1-го рода α). Чтобы подчеркнуть это, в таблице 3.2 соответствующие оценки мощности выделены серым цветом.

Таблица 3.3

Мощность критерия Колмогорова относительно гипотезы H_2

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.218	0.157	0.090	0.051	0.024
20	0.273	0.205	0.125	0.076	0.039
30	0.328	0.253	0.162	0.102	0.054
40	0.377	0.298	0.197	0.128	0.071
50	0.426	0.345	0.235	0.157	0.089
100	0.625	0.542	0.414	0.308	0.199
150	0.764	0.693	0.571	0.456	0.326
200	0.855	0.801	0.698	0.589	0.452
300	0.950	0.923	0.861	0.784	0.670

Таблица 3.4

Мощность критерия Колмогорова относительно гипотезы H_3

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.201	0.142	0.080	0.044	0.020
20	0.241	0.177	0.103	0.060	0.029
30	0.285	0.214	0.131	0.079	0.040
40	0.325	0.250	0.157	0.097	0.051
50	0.365	0.287	0.186	0.119	0.064
100	0.536	0.450	0.326	0.230	0.139
150	0.669	0.588	0.456	0.345	0.229
200	0.767	0.696	0.573	0.456	0.323
300	0.889	0.842	0.748	0.644	0.508

Заметим, что при малых n и α смещённость критерия Колмогорова при проверке равномерности отмечается и относительно более далеких конкурирующих гипотез, соответствующих симметричным и унимодальным законам.

К сожалению, как будет показано ниже, таким же недостатком при проверке равномерности обладают непараметрические критерии согласия Крамера–Мизеса–Смирнова, Андерсона–Дарлинга и, в меньшей степени, критерии Жанга со статистиками Z_A, Z_C, Z_K.

С вопросами применения критерия Колмогорова при проверке различных сложных гипотез можно ознакомиться в [73, 77, 78].

3.2. Критерий Купера

В критерии Купера [19] в качестве расстояния между эмпирическим и теоретическим законом рассматривается величина, вычисляемая в соответствии с выражением

$$V_n = D_n^+ + D_n^-,$$

где D_n^+, D_n^- при проверке равномерности определены выше в разделе 3.1.

При проверке простой проверяемой гипотезы H_0 предельным распределением $G\left(\sqrt{n}V_n \middle| H_0\right)$ статистики $\sqrt{n}V_n$ является распределение [19, 40]:

$$Kuiper(s) = 1 - \sum_{m=1}^{\infty} 2(4m^2s^2 - 1)e^{-2m^2s^2} . \qquad (3.3)$$

Для снижения зависимости распределения статистики от n в [41] предложена модификация статистики

$$V = V_n\left(\sqrt{n} + 0.155 + \frac{0.24}{\sqrt{n}}\right). \qquad (3.4)$$

Зависимостью распределения статистики (3.4) от объема выборки можно пренебречь при $n \geq 20$.

В [24, 74] предложено применять в критерии Купера статистику в следующей модификации

$$V_n^{mod} = \sqrt{n}V_n + \frac{1}{3\sqrt{n}}, \qquad (3.5)$$

где идея использования поправки вытекает из выражения для статистики критерия согласия Смирнова [57, с. 81]. Зависимостью распределения статистики (3.5) от объема выборки можно практически пренебречь при $n \geq 30$ и вычислять достигнутый уровень значимости $P(S > S^* | H_0) = 1 - Kuiper(S^*)$ по распределению (3.3), где S^* – значение статистики критерия, вычисленное по анализируемой выборке в соответствии с (3.4) или (3.5). Менее обосновано принимать решение о результатах проверки гипотезы, сравнивая значение S^* с критическим при заданном α. В последнем случае можно воспользоваться процентными точками распределения (3.3), приведенными в таблице 3.5

Таблица 3.5

Процентные точки распределения (3.3) статистики критерия Купера

Функция распределения	Верхние процентные точки				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
$Kuiper(S)$	1.53692	1.61960	1.74726	1.86243	2.00092

Оценки мощности критерия Купера по отношению к конкурирующей гипотезе H_1 приведены в таблице 3.6, оценки мощности по отношению к гипотезам H_2 и H_3 – в таблицах 3.7 и 3.8 соответственно.

Таблица 3.6

Мощность критерия Купера относительно гипотезы H_1

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.234	0.168	0.094	0.052	0.023
20	0.319	0.240	0.144	0.085	0.041
30	0.401	0.313	0.199	0.125	0.065
40	0.477	0.385	0.259	0.169	0.094
50	0.549	0.456	0.321	0.217	0.125
100	0.808	0.736	0.607	0.482	0.340
150	0.929	0.891	0.808	0.710	0.570
200	0.977	0.960	0.917	0.856	0.753
300	0.998	0.996	0.989	0.974	0.940

Таблица 3.7

Мощность критерия Купера относительно гипотезы H_2

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.180	0.124	0.066	0.035	0.015
20	0.208	0.148	0.081	0.045	0.020
30	0.239	0.174	0.100	0.058	0.028
40	0.268	0.199	0.119	0.071	0.036
50	0.299	0.227	0.139	0.084	0.043
100	0.448	0.364	0.250	0.169	0.099
150	0.579	0.495	0.370	0.270	0.172
200	0.690	0.611	0.486	0.376	0.259
300	0.843	0.786	0.683	0.577	0.445

Таблица 3.8

Мощность критерия Купера относительно гипотезы H_3

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.169	0.115	0.060	0.031	0.013
20	0.186	0.128	0.068	0.036	0.016
30	0.204	0.145	0.079	0.044	0.019
40	0.222	0.159	0.090	0.051	0.024
50	0.243	0.177	0.102	0.058	0.027
100	0.342	0.264	0.168	0.105	0.056
150	0.440	0.357	0.245	0.165	0.094
200	0.532	0.447	0.325	0.231	0.143
300	0.689	0.610	0.484	0.375	0.257

Смещённости критерия относительно конкурирующей гипотезы H_1 не наблюдается. В общем случае при проверке простых гипотез критерий Купера, как правило, обладает несколько большей мощностью, чем критерий Колмогорова [20, 74], но при проверке равномерности в мощности относительно конкурирующих гипотез H_2 и H_3 уступает последнему.

С вопросами применения критерия Купера при проверке различных сложных гипотез можно ознакомиться в [26, 28, 75, 76, 77, 78].

3.3. Критерий Крамера–Мизеса–Смирнова

Статистика критерия ω^2 Крамера–Мизеса–Смирнова при проверке равномерности имеет вид

$$S_\omega = n\omega_n^2 = \frac{1}{12n} + \sum_{i=1}^{n} \left\{ U_i - \frac{2i-1}{2n} \right\}^2 . \tag{3.6}$$

При проверке равномерности на интервале [0,1] имеем дело с проверкой простой гипотезы. В такой ситуации при справедливости H_0 статистика (3.6) в пределе подчиняется закону с функцией распределения $a1(s)$, имеющей вид [57]

$$a1(s) = \frac{1}{\sqrt{2s}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(j+1/2)\sqrt{4j+1}}{\Gamma(1/2)\Gamma(j+1)} \exp\left\{ -\frac{(4j+1)^2}{16s} \right\} \times$$

$$\times \left\{ I_{-\frac{1}{4}}\left[\frac{(4j+1)^2}{16s} \right] - I_{\frac{1}{4}}\left[\frac{(4j+1)^2}{16s} \right] \right\}, \tag{3.7}$$

где $I_{-\frac{1}{4}}(\cdot), I_{\frac{1}{4}}(\cdot)$ – модифицированные функции Бесселя вида

$$I_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2k}}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)}, \ |z| < \infty, \ |\arg z| < \pi .$$

Зависимостью распределения статистики (3.6) от объема выборки можно пренебречь при $n \geq 25$, так как отклонение реального распределения статистики от предельного (3.7) незначительно и практически не влияет на результаты статистического вывода.

Проверяемая гипотеза о равномерности закона не отвергается, если достигнутый уровень значимости $P\left\{S_\omega > S_\omega^*\right\} = 1 - a1\left(S_\omega^*\right)$ не превышает заданного α, где S_ω^* – вычисленное по выборке значение статистики (3.6). Принять решение о результатах проверки можно, сравнив S_ω^* с соответствующим критическим значением из таблицы 3.9. Но в этом случае обоснованность вывода менее информативна.

Таблица 3.9

Процентные точки распределения $a1(s)$

Функция распределения	Верхние процентные точки				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
$a1(S)$	0.2841	0.3473	0.4614	0.5806	0.7434

Оценки мощности критерия Крамера–Мизеса–Смирнова при проверке равномерности по отношению к конкурирующей гипотезе H_1 приведены в таблице 3.10, оценки мощности по отношению к гипотезам H_2 и H_3 – в таблицах 3.11 и 3.12 соответственно.

Таблица 3.10

Мощность критерия Крамера–Мизеса–Смирнова относительно H_1

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.128	0.076	0.031	0.013	0.004
20	0.159	0.094	0.038	0.015	0.005
30	0.196	0.117	0.047	0.019	0.006
40	0.235	0.142	0.057	0.023	0.007
50	0.277	0.171	0.071	0.028	0.008
100	0.510	0.358	0.170	0.072	0.021
150	0.717	0.568	0.325	0.158	0.051
200	0.857	0.745	0.506	0.290	0.112
300	0.974	0.935	0.803	0.601	0.331

Таблица 3.11

Мощность критерия Крамера–Мизеса–Смирнова относительно H_2

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.229	0.169	0.099	0.058	0.029
20	0.292	0.223	0.141	0.088	0.047
30	0.353	0.279	0.184	0.120	0.067
40	0.408	0.330	0.226	0.153	0.089
50	0.461	0.381	0.271	0.187	0.112
100	0.670	0.595	0.473	0.366	0.252
150	0.806	0.746	0.638	0.531	0.401
200	0.890	0.847	0.762	0.668	0.542
300	0.967	0.949	0.906	0.850	0.760

Таблица 3.12

Мощность критерия Крамера–Мизеса–Смирнова относительно H_3

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.204	0.146	0.082	0.046	0.022
20	0.255	0.191	0.114	0.068	0.034
30	0.306	0.236	0.149	0.092	0.049
40	0.353	0.278	0.182	0.117	0.064
50	0.398	0.321	0.217	0.144	0.080
100	0.587	0.507	0.385	0.283	0.182
150	0.724	0.654	0.533	0.422	0.298
200	0.819	0.762	0.656	0.550	0.417
300	0.926	0.894	0.825	0.744	0.627

Как видим, относительно конкурирующей гипотезы H_1 критерий оказывается заметно смещенным (см. табл. 3.10). К сожалению при проверке равномерности при малых n и α смещённость критерия

Крамера–Мизеса–Смирнова отмечается и относительно более далеких конкурирующих гипотез чем H_1, соответствующих симметричным и унимодальным законам.

С вопросами применения критерия Крамера–Мизеса–Смирнова при проверке различных сложных гипотез можно ознакомиться в [73, 77, 78].

3.4. Критерий Ватсона

Статистика критерия Ватсона [45, 46] при проверке равномерности принимает вид

$$U_n^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(U_i - \frac{i - \frac{1}{2}}{n} \right)^2 - n\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} U_i - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{12n}, \qquad (3.8)$$

где U_i – элементы вариационного ряда $x_{(1)} \le x_{(2)} \le \ldots \le x_{(n)}$, построенного по исходной выборке $X_1, X_2, ..., X_n$.

В данном случае при проверке равномерности на интервале [0,1] проверяется простая гипотеза. Поэтому при справедливости H_0 статистика (3.8) в пределе подчиняется закону с функцией распределения [45, 46] вида

$$Watson(s) = 1 - 2\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} e^{-2m^2\pi^2 s} \quad . \qquad (3.9)$$

Следует подчеркнуть, что зависимость распределения статистики (3.8) от объема выборки выражена слабо. Однако в [3] предлагается модифицированная статистика

$$U_n^{2*} = (U_n^2 - 0.1/n + 0.1/n^2)(1 + 0.8/n), \qquad (3.10)$$

зависимость которой от n выражена ещё меньше. При объемах выборок $n \ge 20$ отличием распределения статистики (3.10) от предельного распределения можно пренебречь. То же самое можно сказать относительно распределения статистики (3.8), так как зависимость распределения статистики (3.8) от объема выборки выражена слабо.

Достигнутый уровень значимости $P(S > S^* | H_0) = 1 - Watson(S^*)$ можно вычислять по распределению (3.9), где S^* – значение статистики критерия, вычисленное по анализируемой выборке в соответствии с (3.8) или (3.10). Принимать решение о результатах проверки гипотезы можно также, сравнивая значение S^* с критическим при заданном α. В этом случае можно воспользоваться процентными точками распределения (3.9), приведенными в таблице 3.13.

Таблица 3.13

Процентные точки распределения (3.9) статистики критерия Ватсона

Функция распределения	Верхние процентные точки				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
$Watson(S)$	0.131203	0.151759	0.186880	0.221996	0.268426

Оценки мощности критерия Ватсона при проверке равномерности по отношению к конкурирующей гипотезе H_1 приведены в таблице 3.14, оценки мощности по отношению к гипотезам H_2 и H_3 – в таблицах 3.15 и 3.16 соответственно.

Таблица 3.14

Мощность критерия Ватсона относительно гипотезы H_1

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.239	0.172	0.097	0.054	0.024
20	0.332	0.251	0.154	0.092	0.045
30	0.422	0.333	0.218	0.138	0.074
40	0.504	0.413	0.286	0.192	0.109
50	0.582	0.490	0.354	0.248	0.148
100	0.841	0.779	0.663	0.545	0.400
150	0.949	0.920	0.854	0.773	0.649
200	0.986	0.975	0.945	0.901	0.823
300	0.999	0.998	0.994	0.986	0.967

Смещённости критерия относительно конкурирующей гипотезы H_1 не наблюдается. При этом критерий Ватсона уступает в мощности лишь критериям Жанга со статистиками Z_A и Z_C .

Т а б л и ц а 3.15

Мощность критерия Ватсона относительно гипотезы H_2

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.180	0.124	0.066	0.035	0.015
20	0.209	0.148	0.082	0.046	0.021
30	0.240	0.174	0.101	0.058	0.028
40	0.269	0.200	0.120	0.072	0.035
50	0.299	0.226	0.139	0.085	0.043
100	0.440	0.356	0.243	0.164	0.094
150	0.563	0.477	0.351	0.253	0159
200	0.666	0.585	0.456	0.348	0.235
300	0.816	0.752	0.638	0.527	0.396

Т а б л и ц а 3.16

Мощность критерия Ватсона относительно гипотезы H_3

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.169	0.115	0.060	0.031	0.013
20	0.186	0.129	0.069	0.036	0.015
30	0.204	0.144	0.079	0.043	0.019
40	0.223	0.159	0.090	0.051	0.023
50	0.242	0.176	0.101	0.058	0.027
100	0.334	0.257	0.161	0.099	0.051
150	0.421	0.337	0.226	0.148	0.083
200	0.502	0.414	0.292	0.201	0.120
300	0.641	0.556	0.423	0.313	0.205

В общем случае при проверке простых гипотез критерий Ватсона среди множества непараметрических критериев согласия по мощности делит 2-ю – 3-ю позицию с критерием Крамера-Мизеса-Смирнова. Однако при проверке равномерности относительно конкурирующих гипотез H_2 и H_3 он уступает в мощности практически всем непараметрическим критериям согласия.

С вопросами применения критерия Ватсона при проверке различных сложных гипотез можно ознакомиться в [26, 28, 75, 76, 77, 78].

3.5. Критерий Андерсона–Дарлинга

Статистика критерия согласия Ω^2 Андерсона–Дарлинга [1, 2] при проверке равномерности принимает вид

$$S_\Omega = -n - 2\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{2i-1}{2n}\ln U_i + \left(1 - \frac{2i-1}{2n}\right)\ln(1-U_i)\right\}. \qquad (3.11)$$

При справедливости простой проверяемой гипотезы H_0 (как в данном случае) статистика (3.8) в пределе подчиняется закону с функцией распределения $a2(s)$, имеющей вид [57]

$$a2(s) = \frac{\sqrt{2\pi}}{s}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j \frac{\Gamma(j+1/2)(4j+1)}{\Gamma(1/2)\Gamma(j+1)}\exp\left\{-\frac{(4j+1)^2\pi^2}{8s}\right\}\times$$

$$\times\int_0^\infty \exp\left\{\frac{s}{8(y^2+1)} - \frac{(4j+1)^2\pi^2 y^2}{8s}\right\}dy\,. \qquad (3.12)$$

Зависимостью распределения статистики (3.11) от объема выборки можно пренебречь при $n \ge 25$. При таких объемах выборок отклонение реального распределения статистики от предельного (3.12) незначительно и не влияет на результаты статистического вывода.

Проверяемая гипотеза H_0 о равномерности закона не отвергается, если достигнутый уровень значимости $P\left\{S_\Omega > S_\Omega^*\right\} = 1 - a1\left(S_\Omega^*\right)$ не превышает заданной вероятности ошибки 1-го рода α, где S_{Ω}^{*} – вычисленное по выборке значение статистики (3.11). Менее обосновано судить о результатах проверки можно, сравнивая S_{Ω}^{*} с критическими значениями из таблицы 3.17.

Таблица 3.17

Процентные точки распределения (3.12) статистики Андерсона–Дарлинга

Функция распределения	Верхние процентные точки				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
$a2(S)$	1.6212	1.9330	2.4924	3.0775	3.8781

Оценки мощности критерия Андерсона–Дарлинга при проверке равномерности по отношению к конкурирующей гипотезе H_1 приведены в таблице 3.18, оценки мощности по отношению к гипотезам H_2 и H_3 – в таблицах 3.19 и 3.20 соответственно.

Таблица 3.18

Мощность критерия Андерсона–Дарлинга относительно гипотезы H_1

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.095	0.053	0.019	0.007	0.002
20	0.140	0.078	0.028	0.010	0.003
30	0.196	0.114	0.042	0.014	0.004
40	0.258	0.156	0.060	0.021	0.005
50	0.325	0.206	0.084	0.031	0.007
100	0.652	0.505	0.283	0.134	0.041
150	0.861	0.760	0.544	0.332	0.138
200	0.954	0.904	0.762	0.565	0.311
300	0.998	0.990	0.959	0.882	0.702

В общем случае непараметрический критерий Андерсона–Дарлинга представляет собой один из наиболее мощных критериев согласия [20, 21, 22, 69, 71, 72, 73, 77].

Таблица 3.19

Мощность критерия Андерсона–Дарлинга относительно гипотезы H_2

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.256	0.192	0.116	0.071	0.036
20	0.324	0.253	0.165	0.107	0.059
30	0.390	0.315	0.215	0.145	0.084
40	0.449	0.371	0.263	0.184	0.111
50	0.505	0.426	0.313	0.225	0.141
100	0.718	0.648	0.533	0.426	0.308
150	0.846	0.795	0.700	0.601	0.475
200	0.919	0.885	0.817	0.737	0.624
300	0.980	0.968	0.938	0.897	0829

Таблица 3.20

Мощность критерия Андерсона–Дарлинга относительно гипотезы H_3

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.209	0.151	0.086	0.049	0.023
20	0.262	0.197	0.119	0.072	0.037
30	0.315	0.244	0.157	0.099	0.053
40	0.363	0.289	0.192	0.126	0.069
50	0.410	0.333	0.230	0.154	0.088
100	0.604	0.526	0.406	0.303	0.200
150	0.742	0.675	0.560	0.451	0.325
200	0.836	0.783	0.685	0.582	0.452
300	0.937	0.909	0.849	0.776	0.668

В этом можно убедиться в том числе, сравнивая оценки его мощности относительно гипотез H_2 и H_3 с оценками других непараметрических критериев согласия. Однако в данном случае по отношению к рассматриваемой гипотезе H_1 следует отметить существенную смещённость критерия, о чём можно судить по оценкам мощности при малых n (см. таблицу 3.18). В качестве иллюстрации такой ситуации на рис. 3.1 показаны распределение $G(S|H_0)$ статистики этого критерия при справедливости проверяемой гипотезы H_0 и распределения $G(S_n|H_1)$ его статистики при справедливости H_1 (для объемов выборок $n = 10, 20, 100, 300$).

Как можно видеть, распределения статистики $G(S_n|H_1)$ при $n = 10, 20$ пересекают $G(S|H_0)$, что объясняет, почему мощность $1-\beta$ оказывается меньше α

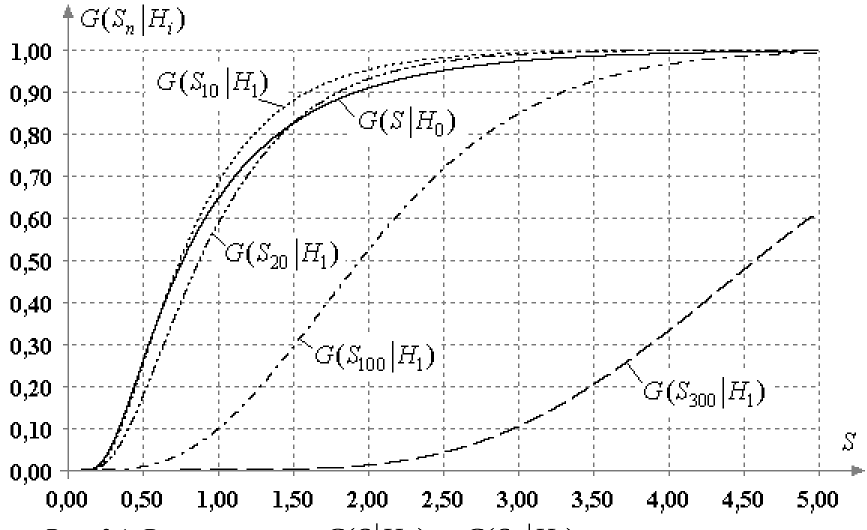

Рис. 3.1. Распределения $G(S|H_0)$ и $G(S_n|H_1)$ статистики критерия Андерсона–Дарлинга при проверке равномерности

На рисунке распределение $G(S|H_0)$ показано только при $n = 10$. При $n \geq 20$ распределения $G(S_n|H_0)$ визуально не отличаются от приведенного на рисунке $G(S_{10}|H_0)$ и практически совпадают с предельным распределением $a2(s)$ статистики критерия Андерсона–Дарлинга при проверке простых гипотез.

3.6. Критерии Жанга

В [51] и в последующих работах [52, 53, 54] были предложены непараметрические критерии согласия, статистики которых при проверке простой гипотезы о принадлежности анализируемой выборки равномерному закону на интервале [0,1] принимают вид:

$$Z_A = -\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\ln U_i}{n-i+\frac{1}{2}} + \frac{\ln\{1-U_i\}}{i-\frac{1}{2}}\right], \tag{3.13}$$

$$Z_C = \sum_{i=1}^{n}\left[\ln\left\{\frac{U_i^{-1}-1}{\left(n-\frac{1}{2}\right)\Big/\left(i-\frac{3}{4}\right)-1}\right\}\right]^2 , \tag{3.14}$$

$$Z_K = \max_{1\le i\le n}\left(\left(i-\frac{1}{2}\right)\ln\left\{\frac{i-\frac{1}{2}}{nU_i}\right\} + \left(n-i+\frac{1}{2}\right)\ln\left[\frac{n-i+\frac{1}{2}}{n\left(1-U_i\right)}\right]\right). \tag{3.15}$$

Критерии Жанга являются развитием соответственно критериев Андерсона–Дарлинга, Крамера–Мизеса–Смирнова и Колмогорова.

Справедливость утверждений автора о более высокой мощности предлагаемых критериев по сравнению с критериями Колмогорова, Крамера-Мизеса-Смирнова и Андерсона-Дарлинга в общем случае была подтверждена проведенными исследованиями [64, 24, 28, 74, 76, 77].

Применение критериев со статистиками (3.13) – (3.15) осложняет сильная зависимость распределений статистик от объема выборки n.

Процентные точки статистик (3.13) – (3.15) при справедливости простой проверяемой гипотезы H_0 о принадлежности анализируемой выборки полностью известному закону (в данном случае, равномерному) представлены в таблицах 3.21 – 3.23, которые заимствованы в [51].

Смещённость критериев со статистиками Z_A и Z_C относительно некоторых конкурирующих гипотез впервые была отмечена при их использовании для проверки гипотез о принадлежности выборок нормальному закону [78].

При использовании рассматриваемых критериев для проверки равномерности следует отметить возможную смещённость критериев относительно конкурирующих гипотез, близких к H_1: в меньшей степени для критерия со статистикой Z_A, и в большей – для критериев со статистиками Z_C и Z_K.

Таблица 3.21

Верхние процентные точки распределения статистики Жанга в виде 10 Z_A –32 в зависимости от *n*

n	α							
	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	0.95	0.99	0.999
5	4.235	5.317	6.71	8.70	12.24	15.98	25.43	39.77
6	3.989	4.929	6.14	7.86	10.88	14.04	22.10	34.55
7	3.763	4.599	5.67	7.18	9.83	12.62	19.68	30.39
8	3.574	4.322	5.28	6.63	9.01	11.49	17.69	27.46
9	3.405	4.084	4.95	6.18	8.32	10.54	16.17	24.74
10	3.261	3.887	4.69	5.80	7.75	9.79	14.89	22.74
12	3.017	3.554	4.23	5.19	6.86	8.60	12.89	19.64
14	2.824	3.294	3.89	4.73	6.19	7.70	11.46	17.32
16	2.665	3.087	3.62	4.37	5.67	7.01	10.35	15.47
18	2.536	2.917	3.40	4.07	5.24	6.46	9.47	14.11
20	2.421	2.769	3.21	3.82	4.89	5.99	8.69	12.84
25	2.204	2.490	2.85	3.35	4.23	5.13	7.32	10.71
30	2.047	2.291	2.60	3.03	3.76	4.53	6.39	9.22
40	1.831	2.022	2.26	2.59	3.16	3.75	5.17	7.37
50	1.689	1.845	2.04	2.31	2.77	3.25	4.41	6.16
70	1.510	1.626	1.77	1.97	2.31	2.65	3.49	4.75
100	1.361	1.445	1.55	1.69	1.93	2.18	2.78	3.70
150	1.234	1.292	1.36	1.46	1.63	1.80	2.20	2.81
200	1.164	1.209	1.26	1.34	1.47	1.59	1.90	2.35
300	1.089	1.120	1.16	1.21	1.30	1.38	1.59	1.90
500	1.023	1.042	1.07	1.10	1.15	1.20	1.33	1.52
1000	0.968	0.978	0.99	1.01	1.03	1.06	1.13	1.22

Таблица 3.22

Верхние процентные точки распределения статистики Жанга Z_C в зависимости от n

n	α							
	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	0.95	0.99	0.999
5	6.03	7.18	8.61	10.6	14.2	18.3	30.6	54.6
6	6.44	7.63	9.11	11.2	14.8	18.9	31.1	54.9
7	6.76	7.98	9.50	11.6	15.3	19.4	31.5	54.4
8	7.05	8.29	9.84	12.0	15.7	19.9	31.8	54.8
9	7.29	8.56	10.14	12.3	16.1	20.2	32.1	55.6
10	7.52	8.81	10.42	12.6	16.5	20.6	32.4	55.1
12	7.90	9.22	10.85	13.1	17.0	21.2	32.9	56.2
14	8.21	9.56	11.24	13.5	17.5	21.7	33.4	56.2
16	8.48	9..86	11.57	13.9	17.9	22.2	33.8	56.3
18	8.73	10.13	11.85	14.2	18.3	22.6	34.3	56.8
20	8.93	10.35	12.10	14.5	18.6	22.9	34.5	57.1
25	9.38	10.82	12.62	15.1	19.3	23.6	35.4	57.6
30	9.74	11.22	13.05	15.5	19.8	24.2	35.8	57.4
40	10.32	11.86	13.75	16.3	20.7	25.2	36.9	59.1
50	10.76	12.34	14.26	16.9	21.3	25.9	37.5	59.4
70	11.42	13.05	15.03	17.7	22.3	26.9	38.6	60.2
100	12.12	13.79	15.84	18.6	23.3	28.0	39.8	61.4
150	12.93	14.67	16.79	19.6	24.4	29.2	41.1	62.2
200	13.48	15.26	17.43	20.3	25.2	30.1	42.2	63.5
300	14.29	16.13	18.36	21.4	26.3	31.3	43.5	64.7
500	15.30	17.21	19.52	22.6	27.7	32.8	45.1	66.1
1000	16.65	18.66	21.06	24.3	29.6	34.8	47.3	68.5

Оценки мощности критерия Жанга со статистикой Z_A по отношению к конкурирующей гипотезе H_1 приведены в таблице 3.24, оценки мощности по отношению к гипотезам H_2 и H_3 – в табл. 3.25 и 3.26 соответственно. Соответствующие оценки мощности критерия

Жанга со статистикой Z_C представлены в таблицах 3.27–3.29, для критерия со статистикой Z_K – в таблицах 3.30–3.32.

Таблица 3.23

Верхние процентные точки распределения статистики Жанга Z_K в зависимости от n

n	α							
	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	0.95	0.99	0.999
5	0.829	1.02	1.25	1.59	2.16	2.74	4.10	6.01
6	0.916	1.11	1.36	1.71	2.30	2.90	4.30	6.29
7	0.985	1.19	1.45	1.81	2.42	3.03	4.46	6.45
8	1.048	1.26	1.52	1.89	2.51	3.13	4.57	6.59
9	1.100	1.32	1.59	1.96	2.59	3.22	4.69	6.70
10	1.148	1.37	1.64	2.02	2.66	3.30	4.77	6.83
12	1.228	1.46	1.74	2.13	2.78	3.43	4.94	7.08
14	1.295	1.53	1.82	2.22	2.88	3.54	5.06	7.20
16	1.350	1.59	1.88	2.29	2.96	3.63	5.16	7.31
18	1.400	1.64	1.94	2.35	3.04	3.71	5.25	7.41
20	1.441	1.69	.19	2.41	3.10	3.78	5.32	7.48
25	1.527	1.78	2.09	2.51	3.21	3.90	5.47	7.67
30	1.597	1.85	2.17	2.60	3.31	4.01	5.58	7.78
40	1.703	1.97	2.29	2.73	3.46	4.17	5.78	7.97
50	1.781	2.05	2.38	2.82	3.55	4.27	5.89	8.13
70	1.887	2.16	2.50	2.96	3.70	4.42	6.05	8.31
100	1.998	2.28	2.62	3.09	3.84	4.57	6.23	8.52
150	2.117	2.41	2.76	3.22	3.99	4.73	6.40	8.67
200	2.191	2.48	2.84	3.31	4.08	4.83	6.51	8.84
300	2.296	2.59	2.95	3.43	4.21	4.96	6.65	8.97
500	2.415	2.72	3.08	3.56	4.35	5.10	6.80	9.16
1000	2.557	2.87	3.23	3.72	4.52	5.28	6.99	9.35

У критерия Жанга со статистикой Z_A по отношению к конкурирующей гипотезе H_1 смещённость практически отсутствует. У критерия со статистикой Z_C смещённость при малых n и малых α

выражена несколько сильнее (см. таблицу 3.27). Для критерия со статистикой Z_K смещённость при малых n выражена для всех α .

Таблица 3.24

Мощность критерия Z_A Жанга относительно гипотезы H_1

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.178	0.114	0.051	0.021	0.006
20	0.323	0.236	0.130	0.067	0.025
30	0.449	0.352	0.221	0.131	0.060
40	0.556	0.459	0.313	0.202	0.105
50	0.646	0.553	0.404	0.281	0.160
100	0.899	0.850	0.748	0.632	0.477
150	0.975	0.958	0.913	0.847	0.733
200	0.995	0.990	0.974	0.947	0.888
300	1.000	1.000	0.998	0.995	0.986

Таблица 3.25

Мощность критерия Z_A Жанга относительно гипотезы H_2

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.241	0.178	0.106	0.063	0.031
20	0.294	0.225	0.140	0.086	0.045
30	0.347	0.273	0.177	0.113	0.061
40	0.398	0.320	0.214	0.140	0.078
50	0.447	0.366	0.254	0.172	0.099
100	0.653	0.574	0.448	0.338	0.223
150	0.792	0.729	0.615	0.503	0.365
200	0.881	0.836	0.748	0.650	0.516
300	0.964	0.946	0.902	0.845	0.749

Таблица 3.26

Мощность критерия Z_A Жанга относительно гипотезы H_3

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.205	0.147	0.083	0.046	0.022
20	0.250	0.185	0.110	0.065	0.032
30	0.292	0.223	0.139	0.085	0.044
40	0.332	0.259	0.166	0.105	0.056
50	0.372	0.295	0.195	0.126	0.069
100	0.541	0.459	0.337	0.241	0.148
150	0.673	0.597	0.471	0.360	0.241
200	0.773	0.707	0.592	0.482	0.349
300	0.896	0.855	0.772	0.679	0.550

Таблица 3.27

Мощность критерия Z_C Жанга относительно гипотезы H_1

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.158	0.084	0.023	0.005	0.001
20	0.287	0.181	0.068	0.019	0.002
30	0.409	0.287	0.134	0.050	0.009
40	0.517	0.391	0.212	0.095	0.023
50	0.610	0.488	0.297	0.153	0.046
100	0.886	0.819	0.675	0.505	0.286
150	0.972	0.948	0.883	0.779	0.589
200	0.994	0.987	0.965	0.920	0.809
300	1.000	0.999	0.998	0.993	0.975

Т а б л и ц а 3.28

Мощность критерия Z_C Жанга относительно гипотезы H_2

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.251	0.193	0.123	0.078	0.041
20	0.310	0.247	0.167	0.112	0.063
30	0.367	0.300	0.211	0.147	0.087
40	0.420	0.350	0.254	0.181	0.111
50	0.469	0.399	0.298	0.218	0.139
100	0.673	0.606	0.498	0.400	0.287
150	0.806	0.754	0.659	0.564	0.442
200	0.890	0.853	0.781	0.701	0.584
300	0.967	0.952	0.918	0.874	0.799

Т а б л и ц а 3.29

Мощность критерия Z_C Жанга относительно гипотезы H_3

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.204	0.147	0.083	0.047	0.021
20	0.249	0.186	0.111	0.066	0.031
30	0.292	0.224	0.140	0.086	0.043
40	0.333	0.260	0.169	0.107	0.055
50	0.372	0.297	0.198	0.129	0.069
100	0.543	0.463	0.344	0.247	0.151
150	0.675	0.601	0.480	0.370	0.249
200	0.775	0.711	0.601	0.492	0.356
300	0.897	0.858	0.780	0.691	0.562

Таблица 3.30

Мощность критерия Z_K Жанга относительно гипотезы H_1

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.117	0.071	0.030	0.012	0.004
20	0.187	0.121	0.056	0.026	0.009
30	0.261	0.179	0.091	0.046	0.017
40	0.339	0.244	0.133	0.070	0.029
50	0.415	0.310	0.180	0.100	0.044
100	0.721	0.617	0.447	0.304	0.171
150	0.889	0.822	0.683	0.535	0.358
200	0.962	0.929	0.844	0.728	0.554
300	0.997	0.992	0.972	0.933	0.845

Таблица 3.31

Мощность критерия Z_K Жанга относительно гипотезы H_2

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.246	0.182	0.109	0.065	0.033
20	0.307	0.236	0.149	0.094	0.050
30	0.364	0.288	0.192	0.125	0.069
40	0.417	0.339	0.232	0.157	0.091
50	0.468	0.386	0.273	0.190	0.114
100	0.668	0.590	0.467	0.361	0.247
150	0.801	0.739	0.628	0.520	0.391
200	0.884	0.839	0.752	0.656	0.528
300	0.964	0.944	0.899	0.841	0.749

В целом критерии Жанга при проверке равномерности обладают хорошей мощностью относительно рассматриваемых конкурирующих гипотез.

Таблица 3.32

Мощность критерия Z_K Жанга относительно гипотезы H_3

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.200	0.143	0.080	0.044	0.020
20	0.244	0.179	0.105	0.061	0.029
30	0.284	0.215	0.132	0.080	0.040
40	0.324	0.250	0.157	0.097	0.050
50	0.362	0.284	0.184	0.117	0.063
100	0.525	0.438	0.314	0.219	0.131
150	0.653	0.570	0.438	0.327	0.213
200	0.751	0.677	0.551	0.434	0.301
300	0.877	0.826	0.726	0.619	0.480

Недостатком критериев следует считать необходимость при проверке гипотез опираться на таблицы процентных точек.

3.7. Анализ мощности непараметрических критериев согласия

Непараметрические критерии согласия, используемые при проверке равномерности, по убыванию мощности относительно конкурирующей гипотезы H_1 (при пересечении функций распределения законов, соответствующих H_0 и H_1) можно расположить следующим образом:

Z_A *Жанга* $\succ$ Z_C *Жанга* $\succ$ *Ватсона* $\succ$ *Купера* $\succ$ Z_K *Жанга* $\succ$ *Андерсона-Дарлинга* $\succ$ *Крамера-Мизеса-Смирнова* $\succ$ *Колмогорова*.

При этом следует подчеркнуть, что для критериев Колмогорова, Крамера–Мизеса–Смирнова и Андерсона–Дарлинга впервые отмечен факт “смещённости” этих критериев (см. таблицы с оценками мощности относительно гипотезы H_1) при малых объёмах выборок n и малых значениях уровня значимости α. Наличие смещённости отмечено также у критериев Жанга со статистиками Z_K и Z_C, и в меньшей степени – у критерия со статистикой Z_A.

Исследования мощности критериев согласия Жанга относительно различных пар конкурирующих гипотез в работах [64, 24, 28, 74, 76, 77] подтвердили, что критерии со статистиками Z_A и Z_C, как правило, имеют преимущество в мощности перед критериями Андерсона–Дарлинга и Крамера–Мизеса–Смирнова, развитием которых они являются. В то же время, при использовании критериев Жанга для проверки отклонения от нормального закона в [78] была отмечена заметная "смещённость" критериев со статистиками Z_C и Z_A относительно некоторых конкурирующих гипотез.

Совокупность непараметрических критериев согласия по убыванию мощности относительно конкурирующей гипотезы H_2 (без пересечения функций распределения, соответствующих H_0 и H_2) располагаются в другом порядке:

Андерсона–Дарлинга $\succ$ Z_C *Жанга* $\succ$ *Крамера–Мизеса–Смирнова* $\succ$ Z_A *Жанга* $\approx$ Z_K *Жанга* $\succ$ *Колмогорова* $\succ$ *Купера* $\succ$ *Ватсона*.

Эти же критерии по убыванию мощности относительно конкурирующей гипотезы H_3 (также без пересечения функций распределения, соответствующих H_0 и H_3) располагаются примерно в том же порядке:

Андерсона–Дарлинга $\succ$ *Крамера–Мизеса–Смирнова* $\succ$ Z_C *Жанга* $\succ$ Z_A *Жанга* $\succ$ *Колмогорова* $\succ$ Z_K *Жанга* $\succ$ *Купера* $\succ$ *Ватсона*.

Можно обратить внимание, что критерии Купера и Ватсона несколько выигрывают в мощности у критериев Колмогорова и Крамера–Мизеса–Смирнова, если рассматривается альтернатива с пересечением законов распределения (см. например ситуацию с H_0 и H_1), и существенно проигрывают в мощности при альтернативе без пересечения (в случае H_2 и H_3).

В общем случае предпочтение следует отдать критериям Андерсона–Дарлинга, Жанга со статистиками Z_C и Z_A и Крамера–Мизеса–Смирнова. Однако следует иметь в виду, что относительно некоторых конкурирующих гипотез можно столкнуться с ситуацией, когда при малых n и α критерии не будут способны отличать от равномерного некоторые конкурирующие законы.

4. Критерий согласия хи-квадрат Пирсона при проверке равномерности

Процедура проверки гипотез с использованием критериев типа χ^2 предусматривает группирование исходной выборки $X_1, X_2, \ldots, X_n$ объемом n. Область определения случайной величины разбивают на k непересекающихся интервалов граничными точками

$$x_0 < x_1 < \ldots < x_{k-1} < x_k,$$

где x_0 – нижняя грань области определения случайной величины; x_k – верхняя грань. В соответствии с заданным разбиением подсчитывают количество наблюдений n_i, попавших в i-й интервал, и вероятности попадания в интервал $P_i(\theta) = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x,\theta)dx$, соответствующие теоретическому закону с функцией плотности $f(x,\theta)$. При этом $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$, $\sum_{i=1}^{k} P_i(\theta) = 1$. В основе статистик, используемых в критериях согласия типа χ^2, лежит измерение отклонений n_i / n от $P_i(\theta)$.

Статистику критерия согласия χ^2 Пирсона вычисляют по формуле

$$X_n^2 = n\sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i / n - P_i(\theta))^2}{P_i(\theta)}. \tag{4.1}$$

При справедливости простой проверяемой гипотезы H_0 (когда известны все параметры теоретического закона) при $n \to \infty$ эта статистика подчиняется χ_r^2-распределению с $r = k-1$ степенями свободы. Плотность χ_r^2-распределения описывается соотношением

$$g(s) = \frac{1}{2^{r/2}\Gamma(r/2)} s^{r/2-1} e^{-S/2}.$$

где $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция Эйлера.

Проверяемая гипотеза H_0 не отклоняется, если достигнутый уровень значимости превышает заданный уровень α, то есть выполняется неравенство

$$P\left\{X_n^2 > X_n^{2*}\right\} = \frac{1}{2^{r/2}\Gamma(r/2)} \int\limits_{X_n^{2*}}^{\infty} s^{r/2-1} e^{-s/2} ds > \alpha, \qquad (4.2)$$

где X_n^{2*} – вычисленное в соответствии с формулой (4.1) значение статистики.

При проверке равномерности мы имеем дело с простой проверяемой гипотезой H_0. В случае проверки принадлежности выборки равномерному закону на интервале [0,1] $x_0 = 0$, $x_k = 1$, $P_i = x_i - x_{i-1}$, при проверке равномерности на интервале $[a,b]$ имеем $x_0 = a$, $x_k = b$, $P_i = (x_i - x_{i-1})/(b-a)$.

В общем случае с особенностями применения критерия χ^2 Пирсона при проверке простых и сложных гипотез можно подробно ознакомиться в [14, 62, 80], а с применением критерия при проверке гипотезы о принадлежности выборки нормальному закону – в [78].

Следует иметь в виду, что статистика (4.1) представляет собой дискретную случайную величину, и её действительное распределение $G(X_n^2 | H_0)$ при справедливости проверяемой гипотезы H_0 может существенно отличаться от асимптотического χ_r^2-распределения. Например, на рис. 4.1 демонстрируется зависимость распределения статистики критерия (при справедливости H_0) от объёма выборок n при разбиении области определения на интервалы равной вероятности (при числе интервалов $k = 4$). При проверке равномерности использование равновероятного группирования представляется вполне логичным.

Так как действительное распределение статистики является дискретным, то оценка достигнутого уровня значимости, вычисляемая в соответствии с соотношением (4.2) по предельному χ_r^2-распределению, обладает определённой погрешностью. Справедливости ради отметим, что дискретность распределения статистики в большей степени проявляется, как правило, при равновероятном группировании.

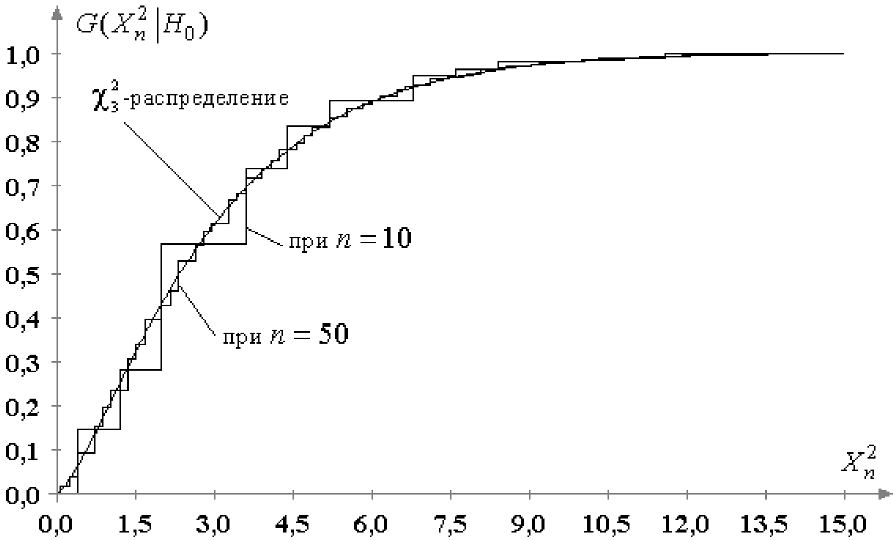

Рис. 4.1. Распределения статистики X_n^2 в зависимости от n при $k = 4$

С ростом числа интервалов дискретное распределение статистики быстрее сходится к соответствующему непрерывному χ_r^2-распределению. Но это не означает, что при этом будет увеличиваться мощность критерия. Мощность критерия χ^2 зависит от рассматриваемой альтернативы (от законов, соответствующих проверяемой и конкурирующей гипотезам), а также от способа разбиения на интервалы и от числа интервалов [60, 61, 62, 65, 66, 67, 73, 80].

Например, в таблице 4.1 представлены оценки мощности критерия относительно рассматриваемых в данном случае конкурирующих гипотез H_1, H_2 и H_3 при разбиении области определения на различное число k равновероятных интервалов группирования. Результаты приведены для объёма выборок $n = 100$ и заданной вероятности ошибки 1-го рода (уровня значимости) $\alpha = 0.1$. Относительно H_1 мощность оказывается максимальной при $k = 6$, относительно H_2 – при $k = 4$, относительно H_3 – при $k = 3$ (см. рис.

4.2). В этой связи в таблицах 4.2 – 4.3 зависимость мощности от объема выборок n демонстрируется при оптимальном числе интервалов: в таблице 4.2 оценки мощности по отношению к конкурирующей гипотезе H_1 приведены при $k=6$; в таблице 4.3 оценки мощности по отношению к H_2 – при $k=4$; в таблице 4.4 оценки мощности относительно H_3 – при $k=3$.

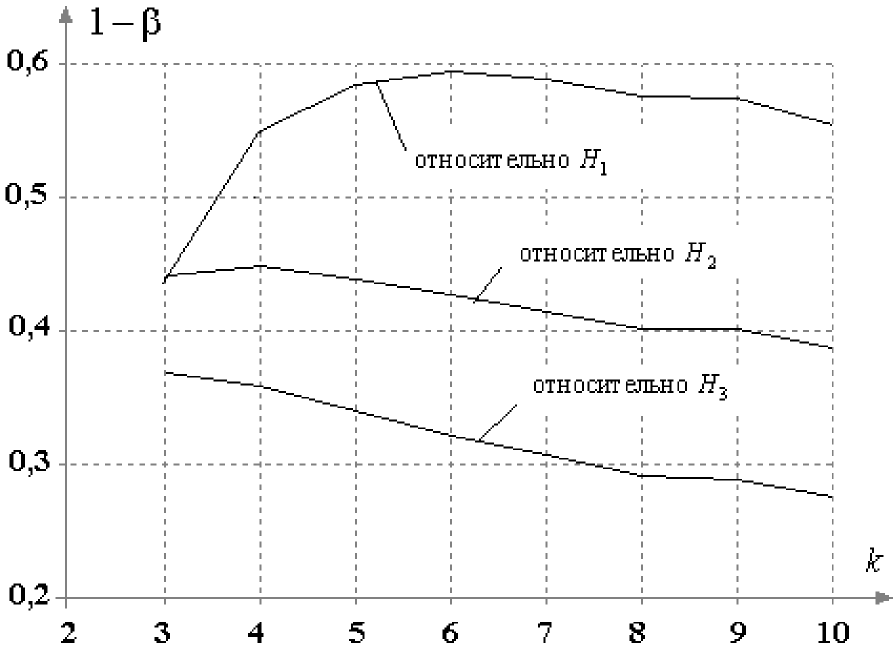

Рис. 4.2. Мощность критерия Пирсона относительно H_1, H_2 и H_3 в зависимости от числа интервалов

При построении оценок мощности использовались не $(1-\alpha)$-квантили распределений $G(X_n^2 | H_0)$, а квантили соответствующих асимптотических χ_r^2-распределений при значениях $\alpha=0.15$, 0.1, 0.05, 0.025, 0.01. Благодаря этому сглажено влияние эффекта дискретности $G(X_n^2 | H_0)$ на вычисление $(1-\alpha)$-квантили, что позволяет сравнивать полученные оценки мощности с соответствующими оценками для других критериев, используемых для проверки равномерности.

Таблица 4.1

Зависимость мощности критерия χ^2 Пирсона от числа интервалов k

k	Относительно H_1	Относительно H_2	Относительно H_3
3	0.436	0.444	0.374
4	0.549	0.448	0.358
5	0.584	0.438	0.339
6	0.593	0.427	0.321
7	0.588	0.414	0.306
8	0.575	0.401	0.291
9	0.573	0.400	0.288
10	0.554	0.386	0.275

Таблица 4.2

Мощность критерия χ^2 Пирсона относительно гипотезы H_1 (при $k = 6$)

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.148	0.111	0.063	0.029	0.025
20	0.268	0.185	0.104	0.060	0.025
30	0.298	0.218	0.139	0.074	0.039
40	0.368	0.275	0.174	0.103	0.055
50	0.424	0.346	0.219	0.142	0.072
100	0.684	0.593	0.457	0.336	0.216
150	0.840	0.778	0.665	0.549	0.408
200	0.926	0.890	0.815	0.723	0.596
300	0.988	0.979	0.954	0.918	0.852

Таблица 4.3

Мощность критерия χ^2 Пирсона относительно гипотезы H_2 (при $k=4$)

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.146	0.146	0.056	0.030	0.020
20	0.196	0.160	0.084	0.052	0.020
30	0.293	0.196	0.128	0.067	0.033
40	0.322	0.233	0.142	0.094	0.051
50	0.349	0.270	0.184	0.118	0.062
100	0.538	0.448	0.328	0.239	0.149
150	0.675	0.596	0.470	0.367	0.254
200	0.783	0.714	0.602	0.497	0.629
300	0.906	0.868	0.791	0.708	0.408

Таблица 4.4

Мощность критерия χ^2 Пирсона относительно гипотезы H_3 (при $k=3$)

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.214	0.119	0.079	0.033	0.016
20	0.203	0.157	0.095	0.044	0.017
30	0.294	0.175	0.104	0.070	0.030
40	0.290	0.205	0.132	0.078	0.034
50	0.318	0.237	0.151	0.089	0.045
100	0.473	0.374	0.275	0.174	0.106
150	0.587	0.504	0.378	0.275	0.172
200	0.690	0.622	0.495	0.379	0.264
300	0.837	0.774	0.681	0.566	0.439

Сравнивая мощность критерия χ^2 с мощностью непараметрических критериев согласия при проверке равномерности, относительно конкурирующей гипотезы H_1, критерий χ^2 Пирсона можно расположить в цепочке предпочтения после критерия Z_K Жанга:

Z_A Жанга $\succ$ Z_C Жанга $\succ$ Ватсона $\succ$ Купера $\succ$ Z_K Жанга $\succ$ χ^2 Пирсона $\succ$ Андерсона-Дарлинга $\succ$ Крамера-Мизеса-Смирнова $\succ$ Колмогорова.

В цепочке предпочтения относительно конкурирующей гипотезы H_2 он оказывается впереди критериев Купера и Ватсона:

Андерсона–Дарлинга $\succ$ Z_C Жанга $\succ$ Крамера–Мизеса–Смирнова $\succ$ Z_A Жанга $\approx$ Z_K Жанга $\succ$ Колмогорова $\succ$ χ^2 Пирсона $\succ$ Купера $\succ$ Ватсона.

Аналогично, в цепочке предпочтения относительно конкурирующей гипотезы H_3 критерий χ^2 Пирсона находится на той же позиции:

Андерсона–Дарлинга $\succ$ Крамера–Мизеса–Смирнова $\succ$ Z_C Жанга $\succ$ Z_A Жанга $\succ$ Колмогорова $\succ$ Z_K Жанга $\succ$ χ^2 Пирсона $\succ$ Купера $\succ$ Ватсона.

В общем перечне критериев, включающем все специальные критерии и непараметрические критерии согласия, рейтинг (мощности) критерия χ^2 Пирсона относительно трёх рассматриваемых в настоящем руководстве гипотез составит достойный интервал позиций {14-16} в перечне из 32-х критериев (см. ниже таблицу 5.1).

5. Сравнительный анализ мощности всех критериев проверки равномерности закона

Все рассмотренные в руководстве критерии в таблице 5.1 упорядочены по убыванию мощности относительно соответствующих конкурирующих гипотез (по величине мощности $1-\beta$, проявленной при $n=100$ и уровне значимости $\alpha=0.1$).

В столбце для H_1 темным цветом выделены критерии, которые относительно H_1 при малых n обладают ярко выраженной смещённостью. В меньшей степени смещённость относительно H_1 проявляется у критерия Жанга со статистикой Z_A и у критериев Неймана–Бартона со статистиками N_2 и N_3. Этот недостаток неотмечен только для некоторых критериев: для энтропийного критерия Дудевича–ван дер Мюлена и его модификаций, для непараметрических критериев согласия Ватсона и Купера, для критерия Ченга–Спиринга, для критериев Шварца и Пардо, для критерия χ^2 Пирсона.

Энтропийный критерий Дудевича–ван дер Мюлена [11] и модификации энтропийного критерия [12, 33, 48, 50], имеющие высокую мощность относительно H_1, по отношению к конкурирующим гипотезам H_2 и H_3 показывают достаточно средние результаты. И только у этих критериев при малых n наблюдается некоторое смещение относительно гипотезы H_2.

Критерий Ченга–Спиринга, демонстрирующий достаточно высокую мощность относительно H_1, относительно H_2 и H_3 показывает очень низкую мощность.

Критерии Ватсона и Купера, не показывающие признаков смещённости и имеющие преимущество в мощности относительно H_1 (по сравнению с критериями Андерсона–Дарлинга и Крамера–Мизеса–Смирнова), теряют это преимущество в случае конкурирующих гипотез H_2 и H_3.

В то же время критерий Неймана–Бартона со статистикой N_2 показывает высокую мощность относительно H_1 и сравнительно высокие результаты относительно H_2 и H_3.

Т а б л и ц а 5.1

Упорядоченность критериев равномерности по мощности относительно конкурирующих гипотез и соответствующие мощности

№ п/п	Относительно H_1	$1-\beta$	Относительно H_2	$1-\beta$	Относительно H_3	$1-\beta$
1	Модификация энтропийного критерия 2	0.883	Андерсона–Дарлинга	0.648	Андерсона–Дарлинга	0.526
2	Жанга Z_A	0.850	Хегази-Грина T_1	0.610	Хегази-Грина T_1	0.522
3	Неймана–Бартона N_2	0.837	Жанга Z_C	0.606	Фросини	0.522
4	Кресси 2	0.820	Фросини	0.603	Хегази-Грина T_1^*	0.520
5	Жанга Z_C	0.819	Хегази-Грина T_2	0.602	Хегази-Грина T_2	0.508
6	Дудевича–ван дер Мюлена	0.790	Неймана–Бартона N_2	0.597	Крамера–Мизеса–Смирнова	0.507
7	Модификация энтропийного критерия 1	0.789	Крамера–Мизеса–Смирнова	0.595	Хегази-Грина T_2^*	0.506
8	Ватсона	0.779	Хегази-Грина T_1^*	0.595	Жанга Z_C	0.463
9	Неймана–Бартона N_3	0.766	Жанга Z_K	0.590	Жанга Z_A	0.459
10	Неймана–Бартона N_4	0.739	Хегази-Грина T_2^*	0.585	Колмогорова	0.450
11	Купера	0.736	Неймана–Бартона N_3	0.577	Неймана–Бартона N_2	0.447
12	Ченга-Спиринга	0.722	Жанга Z_A	0.574	Жанга Z_K	0.438
13	Жанга Z_K	0.617	Неймана–Бартона N_4	0.557	Неймана–Бартона N_3	0.416

Продолжение таблицы 5.1

№ п/п	Относительно H_1	$1-\beta$	Относительно H_2	$1-\beta$	Относительно H_3	$1-\beta$
14	χ^2 Пирсона	0.593	Колмогорова	0.542	Неймана–Бартона N_4	0.381
15	Шварца	0.583	Пардо	0.463	χ^2 Пирсона	0.374
16	Андерсона–Дарлинга	0.505	χ^2 Пирсона	0.448	Пардо	0.291
17	Хегази-Грина T_1^*	0.443	Купера	0.364	Дудевича–ван дер Мюлена	0.275
18	Хегази-Грина T_2^*	0.409	Ватсона	0.356	Модификация энтропийного критерия 1	0.275
19	Пардо	0.408	Модификация энтропийного критерия 1	0,328	Модификация энтропийного критерия 2	0.267
20	Фросини	0.384	Дудевича–ван дер Мюлена	0.327	Ватсона	0.257
21	Крамера–Мизеса–Смирнова	0.358	Кресси 1	0.314	Купера	0.254
22	Хегази-Грина T_1	0.322	Модификация энтропийного критерия 2	0.266	Кресси 2	0.226
23	Колмогорова	0.322	Гринвуда–Кэсенберри–Миллера	0.244	Кресси 1	0.218
24	Хегази-Грина T_2	0.308	Шварца	0.226	Шварца	0.206
25	Гринвуда–Кэсенберри–Миллера	0.290	Кресси 2	0.217	Гринвуда–Кэсенберри–Миллера	0.186
26	Кимбелла	0.279	Шермана	0.204	Кимбелла	0.165
27	Морана 1	0.279	Кимбелла	0.201	Морана 1	0.165
28	Гринвуда	0.279	Морана 1	0.201	Гринвуда	0.165
29	Шермана	0.215	Гринвуда	0.201	Шермана	0.154

Окончание таблицы 5.1

№ п/п	Относительно H_1	$1-\beta$	Относительно H_2	$1-\beta$	Относительно H_3	$1-\beta$
30	Кресси 1	0.187	Морана 2	0.193	Морана 2	0.143
31	Морана 2	0.187	Ченга-Спиринга	0.168	Ченга-Спиринга	0.106
32	Янга	0.115	Янга	0.108	Янга	0.104

Среди специальных критериев стабильно неплохую способность отличать конкурирующие гипотезы от равномерного закона демонстрируют критерии Хегази–Грина и Фросини.

Низкую мощность демонстрируют критерии, в статистиках которых суммируются модули или квадраты разностей $U_i - U_{i-1}$ значений последовательных порядковых статистик (критерии Шермана, Кимбелла, Морана, Гринвуда, Гринвуда–Кэсенберри–Миллера и, особенно, Янга).

Когда для проверки гипотезы о принадлежности анализируемой выборки некоторому конкретному закону распределения разработано множество специальных критериев, то среди этого множества, как правило, находятся критерии, применение которых при ограниченных объемах выборок связано с заметными преимуществами в мощности по сравнению с общими критериями согласия. В данном случае (при проверке равномерности) такого преимущества относительно непараметрических критериев согласия не наблюдается: очень неплохо показывают себя критерии Жанга со статистиками Z_A и Z_C и критерий Андерсона–Дарлинга.

Отсюда вытекает, что корректного использования какого-то одного из критериев для формирования “надежного” статистического вывода зачастую может оказаться недостаточным. Для большей объективности статистических выводов предпочтительней воспользоваться некоторым рядом критериев, обладающих определёнными достоинствами. Применение совокупности критериев, статистики которых представляют собой различные меры для оценки отклонения эмпирического распределения от теоретического, повышает обоснованность статистических выводов.

6. Некоторые вопросы применения критериев

6.1. О вычислении достигнутого уровня значимости

Принятие решения о результатах проверки гипотезы H_0 на основании достигнутого уровня значимости (**p**-value) всегда более обосновано (см. раздел 1.2), чем в результате сравнения полученного значения статистики с заданным критическим значением, извлекаемым из соответствующей таблицы процентных точек. В последнем случае остаётся не ясным, насколько далеко на самом деле истинное распределение, которому принадлежит анализируемая выборка (и которое в действительности всегда остается неизвестным), от равномерного закона.

Вычисление достигнутых уровней значимости в соответствии с соотношениями (1.2) для правостороннего критерия или (1.3) для двустороннего не вызывает труда при известном распределении статистики критерия. Если информация о распределении статистики соответствующего критерия отсутствует и представлена лишь таблицей процентных точек, либо объёмы выборок относительно невелики и таковы, что распределение статистики существенно отличается от предельного (асимптотического), то корректное вычисление достигнутого уровня значимости (***p***-value) представляет собой некоторую проблему.

К сожалению, распределения большинства специальных критериев проверки равномерности существенно зависят от объемов выборок, в связи с чем при формировании решения о результатах проверки гипотезы H_0 (отклонять – не отклонять) опираются на таблицы процентных точек. Исключение составляет лишь возможность использования аппроксимирующих распределений в случае некоторых критериев: Шермана при $n \geq 20$, Морана 2 (распределения модификаций статистик этого критерия не очень удачно аппроксимируются χ^2-распределением и нормальным законом), Янга при $n \geq 15$, Фросини при $n > 50$, Неймана–Бартона при $n \geq 20$.

Аналогичная проблема с применением непараметрических критериев согласия Жанга со статистиками Z_A, Z_C и Z_K, распределения которых зависят от n.

При ограниченных объемах выборок $n \leq 20$ следует учитывать, что распределения статистик непараметрических критериев согласия

Колмогорова, Купера, Крамера–Мизеса–Смирнова, Ватсона и Андерсона–Дарлинга будут несколько отличаться от своих предельных распределений.

Следует иметь в виду, что статистика критерия χ^2 Пирсона представляет собой дискретную случайную величину, и её действительное распределение при справедливости проверяемой гипотезы H_0 может существенно отличаться от асимптотического χ_r^2 -распределения (см. рис. 4.1). Поэтому оценка достигнутого уровня значимости, вычисляемая в соответствии с χ_r^2 -распределением обладает определённой погрешностью.

Каким же образом можно повысить качество статистических выводов?

В настоящее время в связи с резким увеличением возможностей вычислительной техники и информационных технологий существенно возрастает роль использования компьютерных технологий анализа данных в программных системах статистического анализа. Например, когда распределение статистики критерия, используемого для проверки некоторой гипотезы, к моменту начала проверки (в силу разных причин) оказывается неизвестным (при данном объёме выборки n), появляется возможность исследования распределения статистики в реальном времени проверки гипотезы (в интерактивном режиме) [23, 25, 26, 27, 28, 76, 77, 78]. Например, в интерактивном режиме можно исследовать неизвестное распределение статистики любого критерия равномерности, зависящее от объема выборки, при том значении n, которое соответствует анализируемой выборке, и оценить по найденному в результате моделирования эмпирическому распределению статистики достигнутый уровень значимости.

При таком подходе необходимое для проверки гипотезы эмпирическое распределение $G_N(S_n|H_0)$ статистики соответствующего критерия строится в результате статистического моделирования с точностью, зависящей от числа экспериментов N в методе Монте-Карло [68]. Затем по эмпирическому распределению $G_N(S_n|H_0)$ и вычисленному по анализируемой выборке значению статистики S^* критерия в соответствии с соотношением (1.2) для правостороннего критерия или по соотношению (1.3) для двустороннего критерия определяется оценка достигнутого уровня значимости (**p**-value).

При проведении статистического моделирования в интерактивном режиме (в ходе осуществляемого статистического анализа) его результаты могут использоваться при формировании вывода по итогам проверки гипотезы.

Реализация такого интерактивного режима требует наличия развитого программного обеспечения, позволяющего (как в [79]) в целях ускорения распараллеливать процессы моделирования и привлекать доступные вычислительные ресурсы. В условиях распараллеливания время построения распределения $G_N(S_n|H_0)$ статистики критерия оказывается не очень заметным на фоне полного решения задачи статистического анализа.

В качестве примера для рассмотренных в руководстве критериев проверки равномерности продемонстрируем зависимость точности оценивания достигнутых уровней значимости от величины выборки N моделируемых в интерактивном режиме эмпирических распределений статистик.

Пример 6.1. Точность оценивания p-value в зависимости от N. В данном случае проверялась простая гипотеза о принадлежности равномерному закону на интервале [0, 1] следующей выборки объемом $n = 25$, представленной вариационным рядом:

0.03	0.07	0.16	0.17	0.18	0.19	0.30	0.32	0.38	0.41
0.49	0.50	0.51	0.59	0.62	0.68	0.73	0.74	0.78	0.88
0.89	0.94	0.97	0.98	0.99					

Напомним, что для того чтобы погрешность оценивания достигнутого уровня значимости (**p**-value) с доверительной вероятностью 0.99 не превышала величины 0.01, количество экспериментов имитационного моделирования N должно быть порядка 16 600, для того, чтобы не превышала 0.001 – количество экспериментов должно быть порядка 1 660 000 [68].

В таблице 6.1 приведены значения статистик, вычисленные в соответствии с представленной выборкой, и достигнутые уровни значимости, полученные по смоделированным распределениям статистик соответствующих критериев при количестве экспериментов $N = 10^3, 10^4, 10^5, 10^6$.

Таблица 6.1

Достигнутые уровни значимости, полученные при проверке равномерности по рассматриваемым критериям при различных N

Критерий, статистика	Значение статистики	$N=10^3$	$N=10^4$	$N=10^5$	$N=10^6$
Шермана (2.1)	0.33692	0.698	0.681	0.683	0.686
Кимбелла (2.4)	0.02494	0.803	0.808	0.809	0.811
Морана 1 (2.5)	0.06340	0.803	0.808	0.809	0.811
Морана 2 (2.6)	9.30475	0.934	0.915	0.918	0.917
Ченга–Спиринга (2.9)	0.46839	0.596	0.633	0.629	0.634
Хегази–Грина (2.10)	0.04548	0.704	0.695	0.691	0,691
Хегази–Грина (2.11)	0.00286	0.735	0.725	0.720	0.721
Хегази–Грина (2.14)	0.04227	0.791	0.783	0.784	0.784
Хегази–Грина (2.15)	0.00221	0.871	0.856	0.856	0.856
Янга (2.17)	0.49000	0.876	0.926	0.925	0.920
Фросини (2.20)	0.2120	0.754	0.748	0.746	0.746
Гринвуда (2.21)	1.6484	0.803	0.808	0.809	0.811
Гринвуда–Кэсенберри–Миллера (2.22)	0.0953	0.884	0.885	0.884	0.884
Неймана–Бартона N_2 (2.24)	0.98893	0.618	0.620	0.617	0.615
Неймана–Бартона N_3 (2.24)	2.11458	0.548	0.554	0.550	0.552
Неймана–Бартона N_4 (2.24)	2.56396	0.667	0.641	0.636	0.637
Дудевича–ван дер Мюлена (2.25)	0.15048	0.855	0.8595	0.858	0.857
Модификация энтропийного 1 (2.26)	-0.02255	0.855	0.857	0.855	0.854

Окончание таблицы 6.1

Критерий, статистика	Значение статистики	$N=10^3$	$N=10^4$	$N=10^5$	$N=10^6$
Модификация энтропийного 2 (2.27)	-0.04873	0.920	0.922	0.921	0.921
Кресси 1 (2.28)	0.03727	0.961	0.964	0.965	0.966
Кресси 2 (2.29)	-0.01514	0.960	0.969	0.966	0.969
Пардо (2.30)	1.26344	0.718	0.742	0.745	0.744
Шварца (2.31)	0.11000	0.952	0.956	0.955	0.955
Колмогорова (3.1)	0.63333	0.842	0.820	0.820	0.821
Купера (3.5)	0.91667	0.904	0.919	0.919	0.918
Крамера-Мизеса-Смирнова (3.6)	0.06373	0.802	0.797	0.795	0.795
Ватсона (3.8)	0.02053	0.974	0.979	0.977	0.976
Андерсона-Дарлинга (3.11)	0.57833	0.677	0.672	0.666	0.667
Z_A Жанга (3.13)	3.36593	0.746	0744	0.738	0.739
Z_C Жанга (3.14)	6.22722	0.758	0.762	0.758	0.760
Z_K Жанга (3.15)	1.32465	0.612	0.612	0.592	0.593
χ^2 Пирсона (4.1)	1.20000	0.900	0.889	0.888	0.888

Вид эмпирической функции распределения, соответствующей анализируемой выборке, и функции равномерного на [0,1] закона представлены на рис. 6.1.

Для большинства непараметрических критериев согласия известны предельные распределения статистик, имеющие место при проверке справедливости проверяемой гипотезы H_0. В таблице 6.2 представлены оценки достигнутых уровней значимости для этих критериев, вычисленные в соответствии с предельными распределениями.

Отличие оценок, представленных таблице 6.2 от оценок, полученных в результате моделирования распределений статистик непараметрических критериев согласия связано с тем, что при $n = 25$ эти распределения ещё заметно отличаются от предельных.

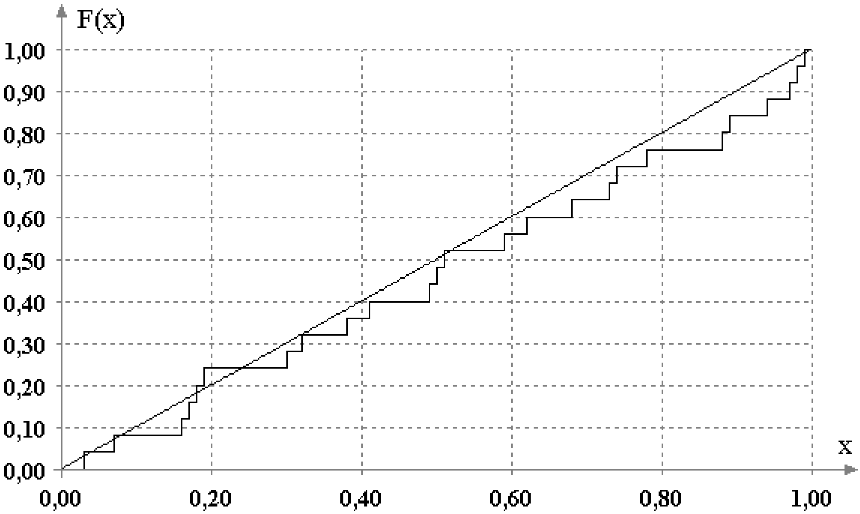

Рис. 6.1. Эмпирическая и теоретическая функции распределения, соответствующие примеру 6.1

Таблица 6.2

Достигнутые уровни значимости, вычисленные по предельным законам

Критерий, статистика	Значение статистики	Оценка **p**-value
Колмогорова (3.1)	0.63333	0.8173
Купера (3.5)	0.91667	0.9096
Крамера–Мизеса–Смирнова (3.6)	0.06373	0.7905
Ватсона (3.8)	0.02053	0.9874
Андерсона–Дарлинга (3.11)	0.57833	0.6687
χ^2 Пирсона (4.1)	1.20000	0.8781

В случае критерия χ^2 Пирсона это отличие усиливается ещё одним фактором. При проверке по критерию χ^2 Пирсона область определения была разбита на 5 интервалов равной длины (равных вероятностей). Оценка достигнутого уровня значимости, вычисленная по асимптотическому χ_4^2-распределению, равна 0.8781, что заметно отличается от значения 0.888, представленного для критерия по смоделированному распределению статистики при N=10^6. В большей степени имеющееся отличие объясняется фактом дискретности реального распределения статистики (см. рис. 4.1).

Можно обратить внимание, что для обоснованного принятия решения не требуется высокой точности оценивания p-value и, следовательно, больших объёмов моделирования. И в то же время очевидно, что использование интерактивного режима и реализация возможности вычисления достигнутых уровней значимости при использовании критериев, для которых неизвестны распределения статистик (при конкретных n), существенно повышают информативность результатов проверки статистических гипотез и качество (корректность) статистических выводов.

Пример 6.2. Проверка простой гипотезы о равномерности на заданном интервале. В данном случае необходимо проверить простую гипотезу о принадлежности равномерному закону на интервале [0, 2] выборки объемом $n=30$, представленной следующим вариационным рядом:

0.071	0.179	0.185	0.391	0.418	0.487	0.560	0.675	0.693	0.725
0.727	0.820	0.906	0.916	1.063	1.110	1.154	1.169	1.170	1.189
1.302	1.327	1.391	1.422	1.452	1.502	1.544	1.563	1.582	1.647

Вид эмпирической функции распределения, соответствующей анализируемой выборке, и теоретической функции распределения равномерного на [0,2] закона представлены на рис. 6.2.

В соответствии с разделом 1.4 по элементам $x_{(i)}$ имеющегося вариационного ряда $a=0<x_{(1)}<x_{(2)}<...<x_{(n)}<b=2$ пересчитываем в соответствии с соотношением $U_i=\dfrac{x_{(i)}-a}{b-a}$, $i=\overline{1,n}$, $U_0=0$, $U_{n+1}=1$ и получаем вариационный ряд U_i объёмом $n=30$:

0.0355	0.0895	0.0925	0.1955	0.2090	0.2435	0.2800	0.3375	0.3465
0.3625	0.3635	0.4100	0.4530	0.4580	0.5315	0.5550	0.5770	0.5845
0.5850	0.5945	0.6510	0.6635	0.6955	0.7110	0.7260	0.7510	0.7720
0.7815	0.7910	0.8235						

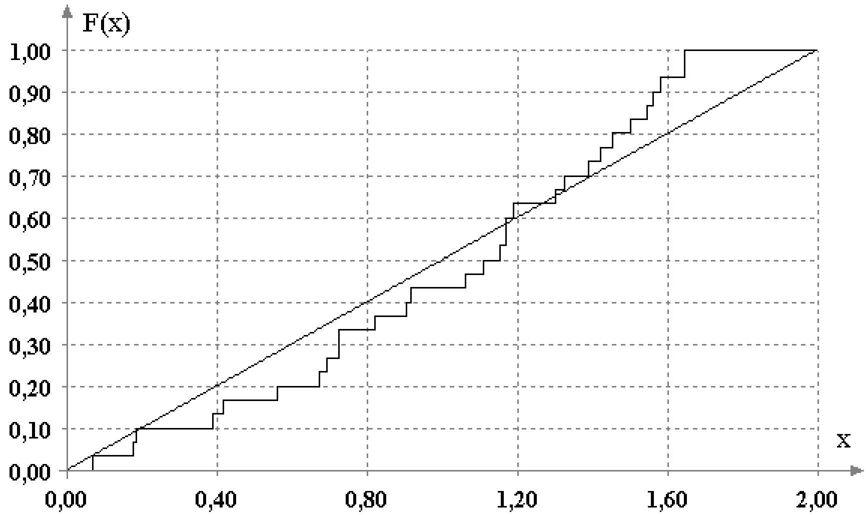

Рис. 6.2. Эмпирическая и теоретическая функции распределения, соответствующие примеру 6.2

Этот ряд проверяем на равномерность уже на интервале [0, 1]. Результаты проверки приведены в таблице 6.3.

Таблица 6.3

Результаты проверки равномерности в примере 6.2

Критерий, статистика	Значение статистики	Оценка **p**-value ($N = 10^6$)
Шермана (2.1)	0.36240	0.488
Кимбелла (2.4)	0.03780	0.187
Морана 1 (2.5)	0.07006	0.187
Морана 2 (2.6)	17.4088	0.466
Ченга–Спиринга (2.9)	0.45483	0.549
Хегази–Грина (2.10)	0.05184	0.490
Хегази–Грина (2.11)	0.00410	0.468
Хегази–Грина (2.14)	0.06769	0.286
Хегази–Грина (2.15)	0.00654	0.292

Окончание таблицы 6.3

Критерий, статистика	Значение статистики	Оценка **p**-value ($N = 10^6$)
Янга (2.17)	0.42850	0.780
Фросини (2.20)	0.32480	0.368
Гринвуда (2.21)	2.17178	0.187
Гринвуда–Кэсенберри–Миллера (2.22)	0.09299	0.415
Неймана–Бартона N_2 (2.24)	5.30403	0.069
Неймана–Бартона N_3 (2.24)	6.79144	0.077
Неймана–Бартона N_4 (2.24)	6.84439	0.139
Дудевича–ван дер Мюлена (2.25)	0.36891	0.014
Модификация энтропийного 1 (2.26)	0.20238	0.013
Модификация энтропийного 2 (2.27)	0.20199	0.012
Кресси 1 (2.28)	0.07757	0.693
Кресси 2 (2.29)	5.60246	0.056
Пардо (2.30)	1.52931	0.079
Шварца (2.31)	0.49792	0.022
Колмогорова (3.1)	0.99259	0.278
Купера (3.5)	1.59813	0.110
Крамера-Мизеса- Смирнова (3.6)	0.15832	0.566
Ватсона (3.8)	0.15551	0.093
Андерсона-Дарлинга (3.11)	1.13677	0.292
Z_A Жанга (3.13)	3.71819	0.028
Z_C Жанга (3.14)	21.2489	0.080
Z_K Жанга (3.15)	4.05289	0.048
χ^2 Пирсона (4.1)	8.0000	0.088

В данном случае анализируемая выборка была смоделирована по закону, существенно отличающемуся от равномерного на интервале [0, 2]. При этом, как видим, отсутствуют наблюдения в конце интервала. Тем не менее, при задании уровня значимости $\alpha = 0.1$ далеко не по всем критериям простая проверяемая гипотеза о равномерности случайной величины на интервале [0, 2] будет отклонена. Причина этого в “недостаточной” мощности критериев при таком относительно малом объёме выборки.

Пример 6.3. Проверка сложной гипотезы о равномерности на произвольном интервале. В данном случае проверяется сложная гипотеза о принадлежности равномерному закону на интервале $[a, b]$ той же выборки объемом $n = 30$, представленной в предыдущем примере 6.2.

В соответствии с указаниями раздела 1.5 по исходной выборке из примера 6.2 находим оценку параметра сдвига

$$\hat{a} = x_{(1)} - \frac{x_{(n)} - x_{(1)}}{n-1} = 0.071 - \frac{1.647 - 0.071}{29} = 0.01658,$$

оценку правой границы области

$$\hat{b} = x_{(n)} + \frac{x_{(n)} - x_{(1)}}{n-1} = 1.647 + \frac{1.647 - 0.071}{29} = 1.70089$$

и оценку параметра масштаба равномерного закона

$$\hat{b} - \hat{a} = \frac{n+1}{n-1}\left(x_{(n)} - x_{(1)}\right) = \frac{31}{29}(1.647 - 0.071) = 1.68432.$$

С учетом, что $U_0 = 0$, $U_{n-1} = 1$, в соответствии с соотношениями $U_{i-1} = \dfrac{x_{(i)} - x_{(1)}}{x_{(n)} - x_{(1)}}$, $i = \overline{2,(n-1)}$, находим значения порядковых статистик U_i, $i = \overline{1,(n-2)}$:

0.0688	0.0725	0.2033	0.2205	0.2638	0.3107	0.3832	0.3950	0.4150
0.4163	0.4756	0.5301	0.5365	0.6295	0.6593	0.6874	0.6971	0.6978
0.7096	0.7814	0.7971	0.8375	0.8577	0.8764	0.9085	0.9347	0.9468
0.9593								

При справедливости сложной проверяемой гипотезы о равномерности исходной выборки объёмом n на интервале $[\hat{a}, \hat{b}]$ элементы данного вариационного ряда U_i, $i = \overline{1,(n-2)}$, должны подчиняться равномерному закону на интервале [0, 1] (при проверке простой гипотезы). На рис. 6.3 показаны эмпирическая функции распределения, соответствующая преобразованному вариационному ряду, и теоретическая функция распределения равномерного на [0, 1] закона. Следует обратить внимание на отличие картины на рис. 6.3 от представленной на рис. 6.2.

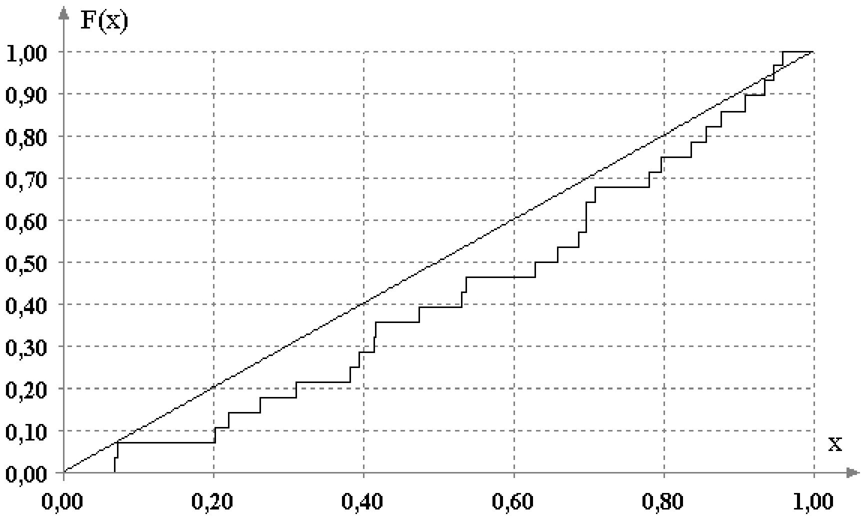

Рис. 6.3. Эмпирическая и теоретическая функции распределения, соответствующие преобразованной выборке из примера 6.3

Результаты проверки преобразованного ряда объёмом $n = 28$ на принадлежность равномерному закону на интервале [0, 1] приведены в таблице 6.4.

Как можно видеть, сложная гипотеза о принадлежности исходной выборки, представленной в примере 6.2, равномерному закону на интервале [0.01658, 1.68432] не будет отклонена ни по одному из критериев при задании $\alpha < 0.157$ [см. таблицу 6.4 для критерия Хегази–Грина (2.14)].

В результате оценивания параметров расхождение между эмпирическим распределением, соответствующим преобразованной выборке, и равномерным на [0.01658, 1.68432] законом стало менее выраженным и труднее различаемым соответствующими критериями. А вследствие невысокой мощности при объёме выборки $n = 28$ ни один из критериев и не отклоняет гипотезу о равномерности.

Таблица 6.4

Результаты проверки равномерности в примере 6.3

Критерий, статистика	Значение статистики	Оценка **p**-value ($N = 10^6$)
Шермана (2.1)	0.34269	0.655
Кимбелла (2.4)	0.02610	0.679
Морана 1 (2.5)	0.06058	0.679
Морана 2 (2.6)	14.0854	0.670
Ченга–Спиринга (2.9)	0.45729	0.880
Хегази–Грина (2.10)	0.08157	0.170
Хегази–Грина (2.11)	0.00821	0.207
Хегази–Грина (2.14)	0.08518	0.157
Хегази–Грина (2.15)	0.00921	0.192
Янга (2.17)	0.45820	0.633
Фросини (2.20)	0.43789	0.160
Гринвуда (2.21)	1.75679	0.679
Гринвуда–Кэсенберри–Миллера (2.22)	0.08523	0.913
Неймана–Бартона N_2 (2.24)	2.35298	0.309
Неймана–Бартона N_3 (2.24)	2.36503	0.502
Неймана–Бартона N_4 (2.24)	2.63193	0.624
Дудевича–ван дер Мюлена (2.25)	0.22288	0.306
Модификация энтропийного 1 (2.26)	0.07039	0.313
Модификация энтропийного 2 (2.27)	0.06347	0.293
Кресси 1 (2.28)	0.06323	0.780
Кресси 2 (2.29)	2.48107	0.543
Пардо (2.30)	1.34132	0.439
Шварца (2.31)	0.14669	0.859

Окончание таблицы 6.4

Критерий, статистика	Значение статистики	Оценка **p**-value ($N = 10^6$)
Колмогорова (3.1)	0.92531	0.360
Купера (3.5)	1.17217	0.585
Крамера-Мизеса- Смирнова (3.6)	0.24331	0.192
Ватсона (3.8)	0.05720	0.609
Андерсона-Дарлинга (3.11)	1.27078	0.242
Z_A Жанга (3.13)	3.46334	0.315
Z_C Жанга (3.14)	13.5467	0.270
Z_K Жанга (3.15)	1.45194	0.552
χ^2 Пирсона (4.1)	3.78571	0.475

6.2. Замечание о “требуемых” объёмах выборок

Со стороны практиков, применяющих критерии проверки статистических гипотез, очень часто можно услышать вопрос о том, а какого объёма выборок оказывается достаточно?

Самый простой ответ на такой неконкретный вопрос: чем больше, тем лучше. Почему?

Вообще говоря, истинный закон распределения вероятностей, который соответствует анализируемой выборке, неизвестен и останется неизвестным. Практика интересует возможность использования для описания этого неизвестного закона, например, равномерного распределения и собственная уверенность в том, что модель равномерного закона $F_0(x)$, соответствующего проверяемой гипотезе H_0, является более предпочтительной чем некоторая другая модель (другой закон, в определённой степени отличающийся от равномерного).

С ростом объёмов выборок n при заданной вероятности α ошибки 1-го рода растёт мощность критериев $1-\beta$ относительно конкурирующей гипотезы H_1: $F_1(x) \neq F_0(x)$ и, следовательно, уменьшается вероятность β ошибки 2-го рода. Конкурирующий закон $F_1(x)$ может быть как угодно близок к $F_0(x)$, поэтому понятно почему требуются большие объёмы выборок.

Но извлечение больших объёмов выборок, как правило, связано с конкретными затратами. А при меньших объёмах выборок с заданными α и β можно отличать от $F_0(x)$ лишь достаточно далёкие $F_1(x)$. Если конкретизировать вид $F_1(x)$, то на основании оценок мощности критериев равномерности относительно конкурирующей гипотезы H_1: $F(x) = F_1(x)$ можно указать объёмы выборок, для которых при проверке гипотезы H_0 по соответствующим критериям будет обеспечена заданная вероятность ошибок α и β 1-го и 2-го рода соответственно.

Например, для того чтобы при заданной вероятности ошибки 1-го рода $\alpha = 0.1$ обеспечить вероятность ошибки 2-го рода $\beta \leq 0.1$ относительно закона, соответствующего рассматриваемой в руководстве гипотезы H_1 (см. раздел 1.3) при использовании критерия Андерсона–Дарлинга необходим объём выборок $n \geq 200$ (см. таблицу 3.18), при использовании критерия Крамера–Мизеса–Смирнова – $n \geq 280$ (см. таблицу 3.10), для критерия N_2 Неймана–Бартона – $n \geq 120$ (см. таблицу 2.49), для критерия Дудевича–ван дер Мюлена – $n \geq 150$ (см. таблицу 2.60). Но для большинства критериев, чтобы обеспечить заданные α и β, понадобятся объёмы выборок существенно больше.

Аналогично, наиболее мощным относительно гипотезы H_2 критериям для того, чтобы с вероятностями ошибок $\alpha = 0.1$ и $\beta \leq 0.1$ различать H_0 и H_2, потребуются объёмы выборок $n \geq 220 \div 250$, а большинству – много больше.

А для того, чтобы с вероятностями ошибок $\alpha = 0.1$ и $\beta \leq 0.1$ различать H_0 и H_3, лучшим представителям критериев равномерности потребуются $n \geq 300$.

7. Заключение

Настоящее руководство не дает однозначного ответа на вопрос, какой критерий лучше всего использовать для проверки отклонения анализируемой выборки от равномерного закона. В определённой степени оно раскрывает специалистам, заинтересованным в корректности применения статистических методов, истинные возможности критериев по различению близких гипотез. Пожалуй, впервые демонстрируется смещённость ряда критериев, в том числе широко известных критериев согласия Колмогорова, Крамера–Мизеса–Смирнова и Андерсона–Дарлинга относительно некоторых альтернатив. Из содержания руководства следует, что для большей объективности статистических выводов при проверке равномерности предпочтительней воспользоваться некоторым рядом критериев, обладающих определёнными достоинствами. Использование критериев, опирающихся на различные меры отклонения эмпирического распределения от теоретического, повышает качество статистических выводов.

Представленные в руководстве описания критериев с указанием их преимуществ и недостатков, расширенные таблицы процентных точек и модели распределений статистик критериев, оценки мощности критериев относительно некоторых конкурирующих гипотез позволят специалистам, решающим задачи статистического анализа в конкретной прикладной области, осознанно подходить к выбору критериев, не останавливаясь на использовании какого-то одного.

Приведенные оценки мощности критериев для различных объёмов выборок n позволяют не только сравнивать критерии, но и дают возможность (при задании конкурирующей гипотезы) оценить вероятности ошибок 2-го рода β, соответствующие заданным вероятностям ошибок 1-го рода α. Или спрогнозировать требуемые объемы выборок для того, чтобы с вероятностями ошибок α и β не больше заданных различать, например, гипотезы H_0 и H_1.

Использование в процессе проверки гипотезы процентных точек уже не соответствует современному уровню требований к качеству статистических выводов. Можно отметить возрастающую роль статистического моделирования и компьютерных технологий, позволяющих в интерактивном режиме исследовать распределения статистик и оценивать достигнутый уровень значимости (**p**-value).

Библиографический список

1. *Anderson T. W.* Asymptotic theory of certain “Goodness of fit” criteria based on stochastic processes / T. W. Anderson, D. A. Darling // AMS. – 1952. – Vol. 23. – P. 193–212.

2. *Anderson T. W.* A test of goodness of fit / T. W. Anderson, D. A. Darling // J. Amer. Statist. Assoc. – 1954. – Vol. 29. – P. 765–769.

3. *Biometrica* tables for Statistics / ed.: E. S. Pearson, H. O. Hartley. – Cambridge : University Press, 1972. – Vol. 2. – 385 p.

4. *Blinov P. Yu., Lemeshko B. Yu.* A review of the properties of tests for uniformity // 2014 12th Iinternational Conference on Actual Problems of Electronics Instrument Engineering (APEIE) 34006 Proceedings. Vol. 1. Novosibirsk, 2014. – P.540-547.

5. *Burrows P. M.* Selected percentage points of Greenwood`s statistics / P. M. Burrows // J. R. Statist. Soc. – 1981. – Ser. A. V.142. – P. 256-258.

6. *Cheng R. C. H., Thornton K. M.* Selected percentage points of the Moran statistic // Journal of Statistical Computation and Simulation. – 1988. – V.30. – No. 3. – P.189-194.

7. *Cheng S. W.* A test to Identify the uniform distribution with applications / S. W. Cheng, F. A. Spiring // IEEE Trans. Reliability. – 1987. – V. R-36. – P. 98-105.

8. *Cressie N.* Power results for tests based on high order gaps // Biometrika. – 1978. – V.65. – P.214–218.

9. *Cressie N.* An optimal statistic based on higher order gaps // Biometrika. – 1979. – V.66. – P. 619–627.

10. *David F. N.* On Neyman's “smooth” test for goodness-of-fit / F. N. David // Biometrika. – 1939. – V.31. – P. 191-199.

11. *Dudewics E. J., van der Meulen E. C.* Entropy-based test of uniformity // J. Amer. Statist. Assoc. – 1981. – V.76. No. 376. – P. 967-974.

12. *Ebrahimi N., Pflughoeft K., Soofi E.S.* Two measures of sample etropy // Statistics &. Probability Letters. – 1995. – V. 20. – P. 225-234.

13. *Frosini B. V.* On the distribution and power of goodness-of-fit statistic with parametric and nonparametric applications, “Goodness-of-fit” / Ed. by Revesz P., Sarkadi K., Sen P.K. //Amsterdam-Oxford-New York: North-Holland Publ. Comp. – 1987. – P. 133-154.

14. *Greenwood P. E.* A guide to chi-squared testing / P. E. Greenwood, M. S. Nikulin. – New York : John Wiley & Sons, 1996. – 280 p.

15. *Greenwood V.* The statistical study of Infection disease / V. Greenwood // // J. R. Statist. Soc.. – 1946. – Ser. A. V.109. – P. 257-261.

16. *Hegazy Y. A. S.* Some new goodness-of-fit tests using order statistics / Y. A. S. Hegazy, J. R. Green // Applied Statistics. – 1975. – V.24, №3. – P. 299-308.

17. *Kimball B. F.* Some basic theorems for developing tests of fit for the case of the non-parametric probability distribution function./ B. F. Kimball // The Annals of Mathematical Statistics. – 1947. – V.18, №1. – P. 540-548.

18. *Kolmogoroff A. N.* Sulla determinazione empirica di una legge di distribuzione / A. N. Kolmogoroff // G. Ist. Ital. attuar. – 1933. – Vol. 4. – № 1. – P. 83–91.

19. *Kuiper N.H.* Tests concerning random points on a circle / N. H. Kuiper // Proc. Konikl. Nederl. Akad. Van Wettenschappen. – 1960. Series A – V. 63. – P.38-47.

20. *Lemeshko B. Yu.* The power of goodness of fit tests for close alternatives / B. Yu. Lemeshko, S. B. Lemeshko, S. N. Postovalov // Measurement Techniques. – 2007. – Vol. 50, № 2. – P. 132–141.

21. *Lemeshko B. Yu.* Comparative Analysis of the Power of Goodness-of-Fit Tests for Near Competing Hypotheses. I. The Verification of Simple Hypotheses / B. Yu. Lemeshko, S. B. Lemeshko, S. N. Postovalov // Journal of Applied and Industrial Mathematics. – 2009. – Vol. 3, № 4. – P. 462–475.

22. *Lemeshko B. Yu.* Comparative analysis of the power of goodness-of-fit tests for near competing hypotheses. II. Verification of complex hypotheses / B. Yu. Le-meshko, S. B. Lemeshko, S. N. Postovalov // Journal of Applied and Industrial Mathematics. – 2010. – Vol. 4, № 1. – P. 79–93.

23. *Lemeshko B. Yu.* Real-Time Studying of Statistic Distributions of Non-Parametric Goodness-of-Fit Tests when Testing Complex Hypotheses / B. Yu. Lemeshko, S.B. Lemeshko, A. P. Rogozhnikov // Proceedings of the International Workshop “Applied Methods of Statistical Analysis. Simulations and Statistical Inference” – AMSA’2011, Novosibirsk, Russia, 20-22 September, 2011. – P. 19-27.

24. *Lemeshko B.Yu.* Application and Power of the Nonparametric Kuiper, Watson, and Zhang Tests of Goodness-of-Fit / B. Yu. Lemeshko, A.A. Gorbunova // Measurement Techniques. – 2013. – Vol. 56, No. 5,. – P.465-475.

25. *Lemeshko B. Yu.* Application of nonparametric goodness-of-fit tests for composite hypotheses in case of unknown distributions of statistics / A. A. Gorbunova, B. Yu. Lemeshko, S. B. Lemeshko, A. P. Rogozhnikov // Applied methods of statistical analysis. Applications in survival analysis, reliability and quality control – AMSA’2013, Novosibirsk, 25–27 Sept. 2013 : proc. of the intern. workshop. – Novosibirsk : NSTU publ., 2013. – P. 8-24.

26. *Lemeshko B. Yu.* Application of nonparametric Kuiper and Watson tests of goodness-of-fit for composite hypotheses / B. Yu. Lemeshko, A. A. Gorbunova // Measurement Techniques. – 2013. – Vol. 56. – № 9. – P.965-973.

27. *Lemeshko B. Yu.* Interactive investigation of statistical regularities in testing composite hypotheses of goodness of fit / B. Yu. Lemeshko, S. B. Lemeshko, A. P. Rogozhnikov // Statistical Models and Methods for Reliability and Survival Analysis : monograph. – Wiley-ISTE, 2013. – Chap. 5. – P. 61–76.

28. *Lemeshko B. Yu.,* Solving problems of using some nonparametric goodness-of-fit tests / *A. A. Gorbunova, S. B. Lemeshko, A. P. Rogozhnikov* // Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing. – 2014. – Vol. 50, № 1. – P.21-35.

29. *Marhuenda Y., Morales D., Pardo M.C.* A comparison of uniformity tests // Statistics. – 2005. – V. 39. No. 4. – P. 315-327.

30. *Moran P. A. P.* The random division of an intervals / P. A. P. Moran // J. R. Statist. Soc. – 1947. – Ser. B. V.9. No. 1. – P. 92-98.

31. *Moran P. A. P.* The random division of an intervals. II / P. A. P. Moran // J. R. Statist. Soc. – 1951. – Ser. B. V.13. No. 2. – P. 147-150.

32. *Neyman J.* “Smooth” tests for goodness-of-fit / J. Neyman // Scandinavisk Aktuarietidskrift. – 1937. – V.20. – P. 149-199.

33. *Noughabi H. A., Noughabi R. A.* On the entropy estimators // Journal of Statistical Computation and Simulation. – 2013. – V. 83, No. 4. – P. 84–792.

34. *O`Reilly F.* J., Characterization and goodness-of-fit tests / F. J. O`Reilly, M. A. Stephens // J. R. Statist. Soc. – 1982. – Ser. B. V.44. No. 3. – P. 353-360.

35. *Pardo M. C.* A test for uniformity based on informational energy // Statistical Papers. – 2003. – V.44. – P. 521–534.

36. *Quesenberry C. P.* Power studies of some tests for uniformity. / C. P. Quesenberry, F. L. Miller // Journal of Statistical Computation and Simulation. – 1977. – V.5. – P. 169-191.

37. *Shannon C. E.* A mathematical theory of communications / C. E. Shannon // Bell System Technical Journal. – 1948. – V.27. – P. 379-423, 623-656.

38. *Sherman B.* A random variable related to the spacing of sample values / B. Sherman // The Annals of Mathematical Statistics. – 1950. – V.21, №3. – P. 339-361.

39. *Sherman B.* Percentiles of the w_n statistic / B. Sherman // The Annals of Mathematical Statistics. – 1957. – V.28, №1. – P. 257-261.

40. *Stephens M. A.* Use of Kolmogorov–Smirnov, Cramer – von Mises and related statistics – without extensive table / M. A. Stephens // J. R. Stat. Soc. – 1970. – B. 32. – P. 115–122.

41. *Stephens M. A.* EDF statistics for goodness of fit and some comparisons / M. A. Stephens // J. Am. Statist. Assoc. – 1974. – Vol. 69. – No. 347. – P. 730–737.

42. *Stephens M. A.* Further percentage points for Greenwood`s statistics / M. A. Stephens // J. R. Statist. Soc. – 1981. – Ser. A. V.144. – P. 364-366.

43. *Swartz T.* Goodness-of-fit tests using Kullback–Leibler information // Communications in Statistics – Theory and Methods. – 1992. – V.21. – P.711–729.

44. Vasicek O. A test of normality based on sample entropy // J. R. Statist. Soc., Ser. B. – 1976. *– V.38. No. 1. – P. 54-59.*

45. *Watson G. S.* Goodness-of-fit tests on a circle. I. / G. S. Watson // Biometrika. – 1961. – V. 48. – No. 1-2. – P.109-114.

46. *Watson G. S.* Goodness-of-fit tests on a circle. II. / G. S. Watson // *Biometrika*. – 1962. – V. 49. – No. 1-2. – P.57- 63.

47. *Young D. L.* The linear nearest neighbour statistic / D. L. Young // Biometrika. – 1982. – V.69, №2. – P. 477-480.

48. *Yousefzadeh F., Arghami N. R.* Testing exponentiality based on type II censored data and a new cdf estimator // Communications in Statistics – Simulation and Computation. – 2008. – V.37. – P. 1479-1499.

49. *Zamanzade E., Arghami N. R.* Testing normality based on new entropy estimators // Journal of Statistical Computation and Simulation. – 2012. – V.82. – No. 11. – P.1701-1713.

50. *Zamanzade E.* Testing uniformity based on new entropy estimators // Journal of Statistical Computation and Simulation. – 2014. DOI: 10.1080/00949655.2014.958085.

51. *Zhang J.* Powerful goodness-of-fit and multi-sample tests. Toronto: PhD Thesis. York University, 2001.

52. *Zhang J.* Powerful goodness-of-fit tests based on the likelihood ratio / J. Zhang // Journal of the Royal Statistical Society: Series B. – 2002. – V. 64. – № 2. – P.281-294.

53. *Zhang J.* Likelihood-ratio tests for normality / J. Zhang, Yu. Wub // Computational Statistics & Data Analysis. – 2005. – V. 49. – No. 3. – P.709-721.

54. *Zhang J.* Powerful Two-Sample Tests Based on the Likelihood Ratio / J. Zhang // Technometrics. – 2006. – V. 48. – No. 1. – P.95-103.

55. *Блинов П. Ю., Лемешко Б. Ю.* О мощности критериев, используемых для проверки гипотез о принадлежности выборок равномерному закону // Материалы Российской НТК “Обработка информационных сигналов и математическое моделирование”, Новосибирск. 2013. – С.35-38.

56. *Блинов П. Ю., Лемешко Б. Ю.* Обзор свойств критериев равномерности // Труды XII международной конференции “Актуальные проблемы электронного приборостроения” АПЭП-2014. Т.6, Новосибирск, 2014. – С.29-36.

57. *Большев Л. Н.* Таблицы математической статистики / Л. Н. Большев, Н. В. Смирнов. – М. : Наука, 1983. – 416 с.

58. *Большев Л. Н.* Асимптотические пирсоновские преобразования / Л. Н. Большев // Теория вероятностей и ее применение. – 1963. – Т. 8, № 2. – С. 129–155.

59. *Большев Л. Н.* Теория вероятностей и математическая статистика : избр. тр. / Л. Н. Большев ; под ред. Ю. В. Прохорова. – М. : Наука, 1987. – 286 с.

60. *Денисов В. И.* Оптимальное группирование при обработке экспериментальных данных / В. И. Денисов, Б. Ю. Лемешко // Измерительные информационные системы. – Новосибирск, 1979. – С. 5–14.

61. *Денисов В. И.* Оптимальное группирование, оценка параметров и планирование регрессионных экспериментов. В 2 ч. / В. И. Денисов, Б. Ю. Лемешко, Е. Б. Цой ; Новосиб. гос. техн. ун-т. – Новосибирск, 1993. – 346 с.

62. *Денисов В. И.* Прикладная статистика. Правила проверки согласия опытного распределения с теоретическим. Ч. I. Критерии типа χ^2 : метод. реком. / В. И. Денисов, Б. Ю. Лемешко, С. Н. Постовалов. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 1998. – 126 с.

63. *Кобзарь А. И.* Прикладная математическая статистика. Для инженеров и научных работников / А. И. Кобзарь. – М : ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 816 с.

64. *Козлова А.В.* Исследование распределений статистик и мощности непараметрических критериев согласия, предложенных Jin Zhang / А. В. Козлова, Б. Ю. Лемешко // Материалы Российской НТК “Информатика и проблемы телекоммуникаций”. Новосибирск. – 2007. – Т. 1. – С.136-139.

65. *Лемешко Б. Ю.* Асимптотически оптимальное группирование наблюдений – это обеспечение максимальной мощности критериев / Б. Ю. Лемешко // Надежность и контроль качества. – 1997. – № 8. – С. 3–14.

66. *Лемешко Б. Ю.* Асимптотически оптимальное группирование наблюдений в критериях согласия / Б. Ю. Лемешко // Завод. лаб. – 1998. – Т. 64, №1. – С. 56–64.

67. *Лемешко Б. Ю.* Максимизация мощности критериев типа χ^2 / Б. Ю. Лемешко, Е. В. Чимитова // Докл. СО АН высш. шк. – Новосибирск, 2000. – № 2. – С. 53–61.

68. *Лемешко Б. Ю., Постовалов С. Н.* Компьютерные технологии анализа данных и исследования статистических закономерностей: Учеб. пособие. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2004. – 120 с.

69. *Лемешко Б. Ю.* Мощность критериев согласия при близких альтернативах / Б. Ю. Лемешко, С. Б. Лемешко, С. Н. Постовалов // Измерительная техника. 2007. № 2. – С.22-27.

70. *Лемешко Б. Ю.* Распределения статистик непараметрических критериев согласия при проверке гипотез относительно бета-распределений / Б. Ю. Лемешко, С. Б. Лемешко // ДАН ВШ России. 2007. № 2(9). – С. 6-16.

71. *Лемешко Б. Ю.* Сравнительный анализ мощности критериев согласия при близких конкурирующих гипотезах. I. Проверка простых гипотез / Б. Ю. Лемешко, С. Б. Лемешко, С. Н. Постовалов // Сиб. журн. индустр. математики. – 2008. – Т. 11, № 2(34). – С. 96–111.

72. *Лемешко Б. Ю.* Сравнительный анализ мощности критериев согласия при близких альтернативах. II. Проверка сложных гипотез / Б. Ю. Лемешко, С. Б. Лемешко, С. Н. Постовалов // Сиб. журн. индустр. математики. – 2008. – Т. 11, № 4(36). – С. 78–93.

73. *Лемешко Б. Ю.* Статистический анализ данных, моделирование и исследование вероятностных закономерностей. Компьютерный подход : монография / Б. Ю. Лемешко, С. Б. Лемешко, С. Н. Постовалов, Е. В. Чимитова. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2011. – 888 с.

74. *Лемешко Б. Ю.* О применении и мощности непараметрических критериев согласия Купера, Ватсона и Жанга / Б. Ю. Лемешко, А. А. Горбунова // Измерительная техника. – 2013. – № 5. – С.3-9.

75. *Лемешко Б. Ю.* Применение непараметрических критериев согласия Купера и Ватсона при проверке сложных гипотез / Б. Ю. Лемешко, А. А. Горбунова // Измерительная техника. – 2013. – № 9. – С.14-21.

76. *Лемешко Б. Ю.* О решении проблем применения некоторых непараметрических критериев согласия / Б. Ю. Лемешко, А. А. Горбунова, С. Б. Лемешко, А. П. Рогожников // Автометрия. – 2014. – Т.50. – № 1. – С.26-43.

77. *Лемешко Б. Ю.* Непараметрические критерии согласия: Руководство по применению / Б. Ю. Лемешко.– М.: НИЦ ИНФРА-М, 2014. – 163 с.

78. *Лемешко Б. Ю.* Критерии проверки отклонения распределения от нормального закона: Руководство по применению / Б. Ю. Лемешко. – М.: НИЦ ИНФРА-М, 2015. – 160 с. – (Научная мысль). – www.dx.doi.org/10.12737/6086.

79. Пат. 2013615968, МКИ. Статистический анализ интервальных наблюдений одномерных непрерывных случайных величин "Интервальная статистка 5.1" / А. А. Горбунова, Б. Ю. Лемешко, С. Б. Лемешко, С. Н. Постовалов, А. П. Рогожников, Е. В. Чимитова; НГТУ - 2013612140; заяв. 21.03.13; опуб. 25.06.13. - 1 с. Дополнительно: приоритет от 21.03.13, выдавшая страна: РФ, сведения об издании: Реестр программ для ЭВМ. URL: http://www.ami.nstu.ru/~headrd/ISW_exe.zip (дата обращения 15.02.2015).

80. Р 50.1.033–2001. Рекомендации по стандартизации. Прикладная статистика. Правила проверки согласия опытного распределения с теоретическим. Ч. I. Критерии типа хи-квадрат. – М. : Изд-во стандартов, 2002. – 87 с.