Министерство образования и науки Российской Федерации

НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Б.Ю. ЛЕМЕШКО

НЕПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КРИТЕРИИ СОГЛАСИЯ

Руководство по применению

НОВОСИБИРСК
2014

УДК 519.23

Данное руководство предназначено для использования в качестве одного из учебных пособий для магистрантов факультета прикладной математики и информатики Новосибирского государственного технического университета, осваивающих курс “**Компьютерные технологии анализа данных и исследования статистических закономерностей**”, которое должно способствовать пониманию особенностей применения непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез и пониманию возможностей методов статистического моделирования при исследовании вероятностных и статистических закономерностей.

В руководстве рассматриваются вопросы применения непараметрических критериев согласия (Колмогорова, Купера, Крамера–Мизеса–Смирнова, Ватсона, Андерсона–Дарлинга, Жанга) при проверке простых и сложных гипотез. В приложении приводятся таблицы, содержащие процентные точки и модели распределений статистик, необходимые для корректного применения критериев при проверке простых и, главное, различных сложных гипотез. Следование рекомендациям обеспечит корректность статистических выводов при анализе данных с использованием непараметрических критериев согласия. Руководство может быть полезно полезно инженерам, научным сотрудникам, специалистам различного профиля (медикам, биологам, социологам, экономистам, и др.), сталкивающимся в своей деятельности с необходимостью статистического анализа результатов экспериментов. Руководство будет полезно преподавателям вузов, аспирантам и студентам.

УДК 519.23

Оглавление

Предисловие

История применения непараметрических критериев согласия насчитывает ровно 80 лет, начиная с работы А.Н. Колмогорова [18], после которой был предложен еще ряд непараметрических критериев, ставших классическими, статистики которых обладают замечательным свойством "свободы от распределения" при проверке простых гипотез. Это свойство предопределило широкое использование этих критериев в приложениях при решении задач статистического анализа.

Через 20 с небольшим лет стало известно о проблеме [17]. Если по анализируемой выборке оцениваются параметры закона распределения вероятностей, а затем по ней же проверяется согласие с данным законом с применением непараметрического критерия, то свойство "свободы от распределения" статистики этого критерия теряется. Распределения статистик непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез оказываются совсем другими, нежели при проверке простых, и нельзя использовать классические результаты.

С тех пор математическая статистика в своем развитии ушла далеко вперед, а проблема применения непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез осталась.

При этом множество специалистов, имеющих отношение к математической статистике и применению методов статистического анализа, условно можно разбить на два подмножества. К первому отнести специалистов в области математической статистики, которые знают о проблеме применения непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез, но поглощенные своими задачами, не занимаясь анализом данных в приложениях, не используют эти критерии в своей деятельности. К другому подмножеству, которое несравненно больше, отнести тех, кто не знает об этой проблеме, но в своей практической деятельности, сталкиваясь с необходимостью статистического анализа результатов экспериментальных исследований, применяет непараметрические критерии согласия. При этом применяет, как правило, в условиях проверки сложных гипотез, опираясь на классические результаты, а, следовательно, не корректно. Эти два подмножества специалистов практически не пересекаются. Более того, складывается ощущение, что доля первого подмножества относительно сокращается и это связано с тем, что в университетских курсах математической статистики о проблеме не упоминается.

17 лет назад, когда нам стала известно о существовании этой проблемы и степени её решения, мы относились ко второму подмножеству, к той его части, которая не понимала, почему оценивая параметры и применяя непараметрические критерии согласия, мы никак не учитываем этого факта при принятии решения о результатах проверки гипотезы. Было откровением, что проблема давно известна, но далека от разрешения.

Тогда, используя свои возможности и методы статистического моделирования, мы убедились, что можно строить приближенные модели, которые с достаточной точностью описывают распределения статистик критериев согласия при проверке различных сложных гипотез. На базе этих результатов были подготовлены рекомендации [93], а затем рекомендации по стандартизации Р 50.1.037–2002 [111]. Готовя рекомендации по стандартизации [111], мы очень надеялись, что следование им позволит снизить уровень некорректного применения критериев в приложениях. Ожидания не очень оправдались, но надежда остается.

Данное руководство, которое на базе последующих исследований существенно уточняет и расширяет прежние результаты, призвано заменить рекомендации по стандартизации [111].

Я очень признателен своим ученикам и коллегам (Постовалову С.Н., Чимитовой Е.В., Лемешко С.Б., Волковой В.М., Рогожникову А.П., Горбуновой А.А.), сделавшим много для исследования распределений статистик критериев в условиях нарушения стандартных предположений и вносящим вклад в развитие компьютерных технологий исследования статистических закономерностей.

Б.Ю. Лемешко

Январь 2014

1. Введение

Целью первичной обработки экспериментальных наблюдений обычно является выбор закона распределения, наиболее хорошо описывающего случайную величину, выборку которой наблюдают. Насколько хорошо наблюдаемая выборка описывается теоретическим законом, проверяют с помощью различных критериев согласия. Цель проверки гипотезы о согласии опытного распределения с теоретическим – это стремление удостовериться в том, что данная модель теоретического закона не противоречит наблюдаемым данным, и использование ее не приведет к существенным ошибкам при вероятностных расчетах. Некорректное использование критериев согласия может приводить к необоснованному принятию (чаще всего) или необоснованному отклонению проверяемой гипотезы.

Проверка статистических гипотез о согласии эмпирических данных с теоретическим законом распределения обычно осуществляется с применением критериев типа χ^2 или непараметрических критериев.

В данном руководстве говорится только о применении непараметрических критериев согласия, в частности, о применении критериев Колмогорова, Крамера-Мизеса-Смирнова, Андерсона-Дарлинга, Купера, Ватсона, Жанга. К сожалению, практика применения такого рода критериев в приложениях богата большим числом примеров некорректного использования. Нередко с такими примерами можно столкнуться в литературных источниках учебного характера. Наиболее распространенные ошибки применения связаны с использованием классических результатов, имеющих место при проверке простых гипотез, для ситуаций, соответствующих проверке сложных гипотез [72, 27].

При проверке согласия различают простые и сложные гипотезы. Простая проверяемая гипотеза имеет вид H_0: $F(x) = F(x, \theta)$, где $F(x, \theta)$ – функция распределения вероятностей, с которой проверяют согласие наблюдаемой выборки, а θ – известное значение параметра (скалярного или векторного).

Сложная проверяемая гипотеза имеет вид $H_0: F(x) \in \{F(x, \theta), \theta \in \Theta\}$, где Θ – область определения параметра θ.

Следует отметить, что если процесс вычисления оценки $\hat{\theta}$ скалярного или векторного параметра закона не опирается на ту же самую выборку, по которой проверяют гипотезу о согласии, то алгоритм применения критерия согласия при проверке сложной гипотезы не отличается от проверки простой гипотезы.

Проблемы возникают, если при проверке сложной гипотезы оценку $\hat{\theta}$ параметра распределения вычисляют по той же самой выборке, по которой проверяют согласие. Далее, говоря о проверке сложных гипотез, мы, как правило, будем предполагать, что оценка параметра $\hat{\theta}$ вычисляется по той же выборке.

Очевидно, что на практике при обработке результатов измерений с проблемой проверки сложных гипотез чаще всего сталкиваются именно в такой ситуации, поскольку сначала оценивают по выборке параметры модели, чтобы лучше подогнать ее к наблюдаемым данным, а потом проверяют адекватность полученной модели.

Схема проверки гипотезы заключается в следующем.

В соответствии с применяемым критерием согласия вычисляют значение S^* статистики критерия S как некоторой функции от выборки и теоретического закона распределения с плотностью $F(x, \theta_0)$ [или $F(x, \hat{\theta})$ при сложной гипотезе]. Для используемых на практике критериев асимптотические (предельные) распределения $G(S|H_0)$ соответствующих статистик при условии истинности гипотезы H_0 обычно известны. Как правило, для ситуаций проверки простых и сложных гипотез эти распределения *различаются*.

В ситуации проверки простых гипотез предельные распределения статистик классических непараметрических критериев согласия известны и не зависят от вида наблюдаемого закона распределения и, в частности, от его параметров. Говорят, что эти критерии являются «свободными от распределения». Это достоинство предопределило широкое использование данных критериев в различных приложениях.

Далее в принятой практике статистического анализа обычно полученное значение статистики S^* сравнивают с критическим значением S_α при заданном уровне значимости α. Нулевую гипотезу отвергают, если $S^* > S_\alpha$ (рис. 1.1).

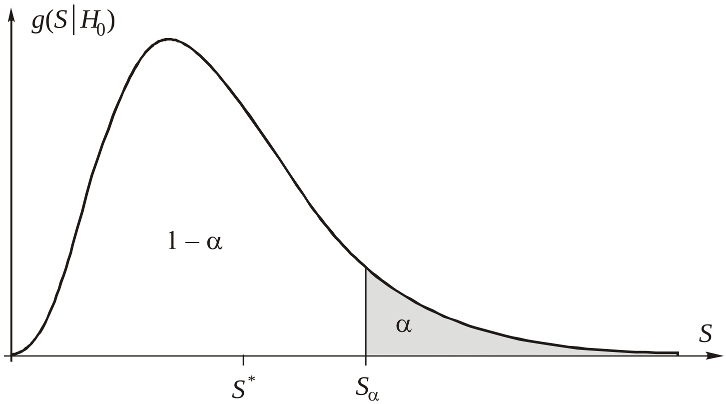

Рис. 1.1. Плотность распределения статистики при истинной гипотезе H_0

Критическое значение S_α, определяемое в случае одномерной статистики из уравнения

$$\alpha = \int_{S_\alpha}^{\infty} g(s|H_0)ds = 1 - G(S_\alpha|H_0), \tag{1.1}$$

где $g(s|H_0)$ – условная плотность распределения статистики, обычно берут из соответствующей статистической таблицы или вычисляют.

Больше информации о степени согласия можно почерпнуть из «достигаемого уровня значимости»: величины вероятности возможного превышения полученного значения статистики при истинности нулевой гипотезы

$$P\{S > S^*\} = \int_{S^*}^{\infty} g(s|H_0)\,ds = 1 - G(S^*|H_0). \tag{1.2}$$

Именно эта вероятность позволяет судить о том, насколько хорошо выборка согласуется с теоретическим распределением, так как по существу представляет собой вероятность истинности нулевой гипотезы (рис. 1.2). Гипотезу о согласии не отвергают, если $P\{S > S^*\} > \alpha$.

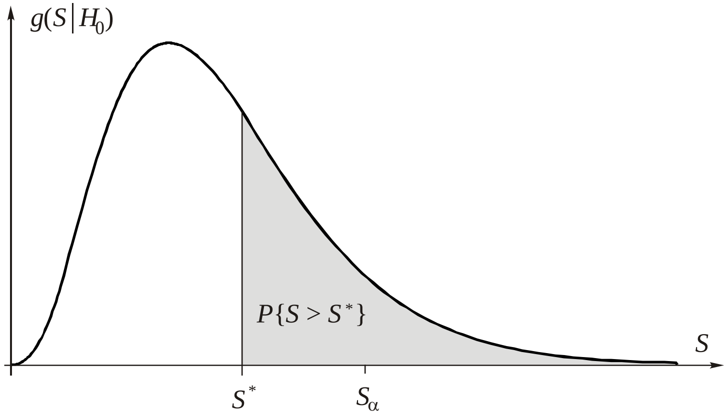

Рис. 1.2. Плотность распределения статистики при истинной гипотезе H_0 и достигаемый уровень значимости

Задачи оценивания параметров и проверки гипотез опираются на выборки независимых случайных величин. Случайность самой выборки предопределяет, что возможны и ошибки в результатах статистических выводов. С результатами проверки гипотез связывают ошибки двух видов: ошибка первого рода состоит в том, что отклоняют гипотезу H_0, когда она верна; ошибка второго рода состоит в том, что принимают гипотезу H_0, в то время как справедлива конкурирующая гипотеза H_1. Уровень значимости α задает вероятность ошибки первого рода. Обычно в критериях согласия не рассматривают конкретную конкурирующую гипотезу. И тогда можно считать, что конкурирующая гипотеза имеет вид H_1: $F(x) \neq F(x, \theta_0)$.

Если же гипотеза H_1 задана и имеет, например, вид H_1: $F(x) = F_1(x, \theta_1)$, то задание величины α для используемого критерия проверки гипотез определяет и вероятность ошибки второго рода β

$$\beta = \int_0^{S_\alpha} g(s|H_1)ds . \qquad (1.3)$$

На рис. 1.3 $g(s | H_0)$ отображает плотность распределения статистики S при истинности гипотезы H_0, а $g(s | H_1)$ – плотность распределения при справедливости H_1.

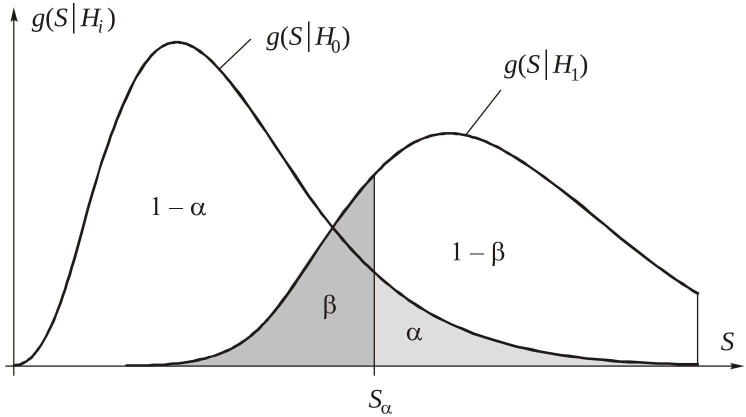

Рис. 1.3. Плотности распределения статистик при справедливости гипотез H_0 и H_1

Мощность критерия представляет собой величину $1-\beta$. Очевидно, что чем выше мощность используемого критерия при заданном значении α, тем лучше он различает гипотезы H_0 и H_1. Особенно важно, чтобы этот критерий хорошо различал близкие конкурирующие гипотезы. Графически требование максимальной мощности критерия означает, что на рис. 1.3 плотности $g\left(s | H_0\right)$ и $g\left(s | H_1\right)$ должны быть максимально «раздвинуты».

2. Непараметрические критерии согласия при проверке простых гипотез

2.1. Критерий Колмогорова

Критерий Колмогорова опирается на статистику

$$D_n = \sup_{|x|<\infty} \left| F_n(x) - F(x, \theta) \right|, \tag{2.1}$$

где $F_n(x)$ – эмпирическая функция распределения; $F(x, \theta)$ – теоретическая функция распределения; n – объем выборки. Предельное распределение этой статистики для случая проверки простой гипотезы было получено Колмогоровым в [18]. При $n \to \infty$ функция распределения статистики $\sqrt{n} \cdot D_n$ сходится равномерно к функции распределения Колмогорова

$$K(s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{-2k^2 s^2} . \tag{2.2}$$

При проверке гипотез с применением критерия Колмогорова рекомендуется использовать статистику с поправкой Большева [63, 64] в форме [65]

$$S_K = \sqrt{n} D_n + \frac{1}{6\sqrt{n}} = \frac{6nD_n + 1}{6\sqrt{n}}, \tag{2.3}$$

где

$$D_n = \max\left(D_n^+, D_n^- \right), \tag{2.4}$$

$$D_n^+ = \max_{1 \le i \le n} \left\{ \frac{i}{n} - F(x_i, \theta) \right\}; \tag{2.5}$$

$$D_n^- = \max_{1 \le i \le n} \left\{ F(x_i, \theta) - \frac{i-1}{n} \right\}, \qquad (2.6)$$

n – объем выборки; $x_1, x_2, \dots, x_n$ здесь и далее – упорядоченные по возрастанию выборочные значения; $F(x, \theta)$ – функция закона распределения, согласие с которым проверяют. Распределение величины S_K при простой гипотезе в пределе подчиняется закону Колмогорова с функцией распределения $K(S)$.

Если для вычисленного по выборке значения статистики S_K^* выполняется неравенство

$$P\left\{S > S_K^*\right\} = 1 - K\left(S_K^*\right) > \alpha,$$

то нет оснований для отклонения гипотезы H_0.

В случае использования поправки Большева зависимостью распределения статистики (2.3) от объема выборки можно практически пренебречь при $n > 25$ и в качестве распределения статистики использовать предельное распределение $K(S)$.

Следует отметить, что в зарубежных публикациях упоминаний о применении данной поправки не встречается, и в критерии Колмогорова, как правило, используют статистику вида $\sqrt{n} D_n$, вследствие чего вынуждены учитывать зависимость распределения данной статистики от объема выборки и отличие его от $K(S)$.

2.2. Критерий Смирнова

В критерии Смирнова используют статистику

$$D_n^+ = \sup_{|x| < \infty} \left(F_n(x) - F(x, \theta) \right) \qquad (2.7)$$

или статистику

$$D_n^- = -\inf_{|x| < \infty} \left(F_n(x) - F(x, \theta) \right), \qquad (2.8)$$

значения которых вычисляют по эквивалентным соотношениям (2.5), (2.6).

Реально в критерии обычно используют статистику [65]

$$S_m = \frac{\left(6nD_n^+ + 1\right)^2}{9n}, \qquad (2.9)$$

которая при простой гипотезе в пределе подчиняется распределению χ^2 с числом степеней свободы, равным 2.

Гипотезу H_0 не отвергают, если для вычисленного по выборке значения статистики S_m^*

$$P\left\{S_m > S_m^*\right\} = \int_{S_m^*}^{\infty} \frac{1}{2} e^{-x/2} dx = e^{-S_m^*/2} > \alpha .$$

Данный критерий редко используют, предпочитая критерий Колмогорова. Причина заключается в следующем. Если в критерии используется статистика (2.9), то критерий не заметит большого сдвига $F_n(x)$ от $F(x,\theta)$ вправо. Если же в (2.9) подставить D_n^- вместо D_n^+, то не заметит сдвига влево.

2.3. Критерий Крамера-Мизеса-Смирнова

В критериях типа ω^2 расстояние между гипотетическим и истинным распределениями рассматривают в квадратичной метрике.

Проверяемая гипотеза H_0 имеет вид [65]

$$H_0: \int_{-\infty}^{\infty} \left\{E\left[F_n(x)\right] - F(x)\right\}^2 \psi\left(F(x)\right) dF(x) = 0 \qquad (2.10)$$

при конкурирующей гипотезе

$$H_1: \int_{-\infty}^{\infty} \left\{E\left[F_n(x)\right] - F(x)\right\}^2 \psi\left(F(x)\right) dF(x) > 0, \qquad (2.11)$$

где $E[\cdot]$ – оператор математического ожидания; $\psi(t)$ – заданная на отрезке $0 \le t \le 1$ неотрицательная функция, относительно которой предполагают, что $\psi(t)$, $t\psi(t)$, $t^2\psi(t)$ интегрируемы на отрезке $0 \le t \le 1$ [6]. Статистику критерия [65] выражают соотношением

$$\omega_n^2\left[\psi(F)\right] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left\{E\left[F_n(x)\right] - F(x)\right\}^2 \psi\left(F(x)\right) dF(x) =$$

$$= \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\left\{g\left[F(x_i)\right] - \frac{2i-1}{2n} f\left[F(x_i)\right]\right\} + \int\limits_0^1 (1-t)^2 \psi(t)dt, \qquad (2.12)$$

где

$$f(t) = \int\limits_0^t \psi(s)ds, \quad g(t) = \int\limits_0^t s\psi(s)ds.$$

При выборе $\psi(t) \equiv 1$ для критерия ω^2 получают статистику критерия **Крамера–Мизеса–Смирнова**

$$S_\omega = n\omega_n^2 = \frac{1}{12n} + \sum_{i=1}^{n}\left\{F(x_i, \theta) - \frac{2i-1}{2n}\right\}^2, \qquad (2.13)$$

которая при простой гипотезе в пределе подчиняется закону с функцией распределения $a1(s)$, имеющей вид [65]

$$a1(s) = \frac{1}{\sqrt{2s}}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\Gamma(j+1/2)\sqrt{4j+1}}{\Gamma(1/2)\Gamma(j+1)}\exp\left\{-\frac{(4j+1)^2}{16s}\right\}\times$$

$$\times\left\{I_{-\frac{1}{4}}\left[\frac{(4j+1)^2}{16s}\right] - I_{\frac{1}{4}}\left[\frac{(4j+1)^2}{16s}\right]\right\}, \qquad (2.14)$$

где $I_{-\frac{1}{4}}(\cdot), I_{\frac{1}{4}}(\cdot)$ – модифицированные функции Бесселя вида

$$I_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2k}}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)}, \ |z| < \infty, \ |\arg z| < \pi. \qquad (2.15)$$

2.4. Критерий Андерсона-Дарлинга

При выборе в (2.12) весовой функции вида $\psi(t) \equiv 1/t(1-t)$ получают статистику Ω^2 критерия **Андерсона–Дарлинга** [3, 2]

$$S_\Omega = n\Omega_n^2 =$$

$$= -n - 2\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{2i-1}{2n}\ln F(x_i,\theta) + \left(1-\frac{2i-1}{2n}\right)\ln(1-F(x_i,\theta))\right\}. \quad (2.16)$$

В пределе при проверке простой гипотезы эта статистика подчиняется закону с функцией распределения $a2(s)$, имеющей вид [65]

$$a2(s) = \frac{\sqrt{2\pi}}{s}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j \frac{\Gamma(j+1/2)(4j+1)}{\Gamma(1/2)\Gamma(j+1)}\exp\left\{-\frac{(4j+1)^2\pi^2}{8s}\right\}\times$$

$$\times\int_0^\infty \exp\left\{\frac{s}{8(y^2+1)} - \frac{(4j+1)^2\pi^2 y^2}{8s}\right\}dy. \quad (2.17)$$

Гипотезы о согласии не отвергают, если выполнены неравенства

$$P\left\{S_\omega > S_\omega^*\right\} = 1 - a1\left(S_\omega^*\right) > \alpha \text{ и } P\left\{S_\Omega > S_\Omega^*\right\} = 1 - a2\left(S_\Omega^*\right) > \alpha$$

или вычисленные значения статистик не превышают критических для заданного уровня значимости α.

2.5. Критерий Купера

В работе [20] Купером предложен критерий типа Колмогорова, статистика V_n которого определяется соотношением

$$V_n = \sup_{-\infty<x<\infty}\left\{F_n(x) - F(x,\theta)\right\} - \inf_{-\infty<x<\infty}\left\{F_n(x) - F(x,\theta)\right\}$$

и используется в виде

$$V_n = D_n^+ + D_n^-, \quad (2.18)$$

где D_n^+, D_n^- определяются соотношениями (2.5), (2.6). $i = \overline{1,n}$, n– объем выборки, x_i – здесь и далее элементы вариационного ряда, построенного по выборке (упорядоченная по возрастанию выборка).

Существенным недостатком критерия со статистикой (2.18) является сильная зависимость распределения $G(V_n|H_0)$ статистики от объема выборки n. Таблицы процентных точек для случая проверки простых гипотез по критерию со статистикой $\sqrt{n}V_n$ можно найти в работах [4, 54]. Купером [20] в качестве предельного распределения $G\left(\sqrt{n}V_n|H_0\right)$ статистики $\sqrt{n}V_n$ дана следующая функция распределения [54]:

$$G\left(s|H_0\right)=1-\sum_{m=1}^{\infty}2(4m^2s^2-1)e^{-2m^2s^2}\ . \tag{2.19}$$

В [52] для модификации статистики

$$V=V_n\left(\sqrt{n}+0.155+\frac{0.24}{\sqrt{n}}\right), \tag{2.20}$$

распределение которой в меньшей степени чем распределение $\sqrt{n}V_n$ зависит от n, приведены процентные точки, которые представлены во 2-й строке таблицы 1. Зависимостью распределения статистики (23) от объема выборки можно пренебречь при $n \ge 20$, так как отклонение реального распределения статистики от предельного незначительно и практически не влияет на результаты статистического вывода.

В [80] предложено применять в критерии Купера статистику в следующем виде

$$V_n^{mod}=\sqrt{n}(D_n^{+}+D_n^{-})+\frac{1}{3\sqrt{n}}, \tag{2.21}$$

где идея использования поправки вытекает из выражения для статистики критерия согласия Смирнова [65, с. 81]. Зависимостью распределения статистики (24) от объема выборки можно практически пренебречь при $n \ge 30$.

Статистики (2.20) и (2.21) имеют одно и то же предельное распределение. При малых же n различие между распределениями статистик (2.20) и (2.21) достаточно существенное. Однако при $n \ge 20$ в области принятия решения (при значениях функций распределения статистик $G(V|H_0)>0.9$ и $G(V_n^{mod}|H_0)>0.9$) эти распределения практически совпадают.

В качестве модели предельного закона можно использовать [80] бета-распределение 3-го рода с плотностью

$$f(x)=\frac{\theta_2^{\theta_0}}{\theta_3 \mathrm{B}(\theta_0,\theta_1)} \frac{\left(\frac{x-\theta_4}{\theta_3}\right)^{\theta_0-1}\left(1-\frac{x-\theta_4}{\theta_3}\right)^{\theta_1-1}}{\left[1+(\theta_2-1)\frac{x-\theta_4}{\theta_3}\right]^{\theta_0+\theta_1}} \qquad (2.22)$$

и вектором параметров $\boldsymbol{\theta}=\left(7.8624, 7.6629, 2.6927, 2.6373, 0.495\right)^{\mathrm{T}}$, построенное по результатам моделирования распределения статистики (2.21). Эта модель хорошо описывает распределение статистики (2.21) на всей области определения и, наряду с предельным (2.19), может использоваться для вычисления достигаемого уровня значимости $P\{S>S^*|H_0\}$, где S^* – значение статистики, вычисленное по выборке.

2.6. Критерий Ватсона

Статистика критерия Ватсона [56, 57] имеет вид

$$U_n^2=n\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left\{F_n(x)-F(x,\theta)-\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(F_n(y)-F(y,\theta)\right)dF(y,\theta)\right\}^2 dF(x,\theta)$$

и используется в следующей удобной для расчетов форме

$$U_n^2=\sum_{i=1}^{n}\left(F(x_i,\theta)-\frac{i-\frac{1}{2}}{n}\right)^2-n\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}F(x_i,\theta)-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{12n}. \qquad (2.23)$$

Процентные точки статистики U_n^2 при проверке простой гипотезы можно найти в [57, 48]. Предельное распределение $G\left(U_n^2|H_0\right)$ статистики U_n^2 приведено в [56, 57] в виде

$$G\left(s|H_0\right)=1-2\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}e^{-2m^2\pi^2 s}. \qquad (2.24)$$

Модификации критериев Купера и Ватсона рассматривались в [53], критерия Ватсона – в [19]. Асимптотическая эффективность критерия Ватсона исследовалась в [46].

В [48] процентные точки приведены для распределений модифицированных статистик. В частности, верхние процентные точки для модифицированной статистики Ватсона в форме

$$U_n^{2*} = (U_n^2 - 0.1/n + 0.1/n^2)(1 + 0.8/n) \qquad (2.25)$$

принимают значения [48], приведенные в строке 6 таблицы 2.1. При объемах выборок $n \geq 20$ отличием распределения статистики (2.25) от предельного распределения можно пренебречь.

Практически те же значения верхних процентных точек используют для распределения статистики (2.23). Следует подчеркнуть, что зависимость распределения статистики (2.23) от объема выборки выражена слабо.

Предельное распределение статистики (2.23) по всей области определения хорошо приближается моделью обратного гауссовского закона с плотностью

$$f(x) = \frac{1}{\theta_2}\left(\frac{\theta_0}{2\pi\left(\frac{x-\theta_3}{\theta_2}\right)^3}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{\theta_0\left(\left(\frac{x-\theta_3}{\theta_2}\right)-\theta_1\right)^2}{2\theta_1^2\left(\frac{x-\theta_3}{\theta_2}\right)}\right) \qquad (2.26)$$

и вектором параметров $\boldsymbol{\theta} = \left(0.2044,\ 0.08344,\ 1.0,\ 0.0\right)^{\mathrm{T}}$, построенной по результатам моделирования эмпирического распределения статистики (2.23) [80]. Это распределение при проверке простых гипотез по критерию Ватсона, так же как и предельное (2.24), можно использовать для вычисления достигаемого уровня значимости.

В таблице 2.1 представлены значения вероятностей вида $P(S > S_\alpha | H_0)$, соответствующие приведенным процентным точкам (критическим значениям) для критерия Купера, вычисленные в соответствии с предельным законом (2.19), моделью предельного закона (2.22) и по результатам статистического моделирования $N = 1{,}7 \times 10^6$ значений статистики (2.21). В ней же даны аналогичные вероятности, соответствующие процентным точкам для критерия Ватсона, вычисленные в соответствии с предельным законом (2.24), моделью предельного закона (2.26) и по результатам статистического моделирования распределения статистики (2.23).

Таблица 2.1

Верхние процентные точки распределений статистик критериев Купера и Ватсона и соответствующие им значения вероятностей вида $P(S > S_\alpha | H_0)$, вычисленные в соответствии с теоретическими законами и по результатам статистического моделирования.

Критерии, модели распределений	α				
	0.15	0.10	0.05	0.025	0.01
% точки ст-ки Купера	1.537	1.620	1.747	1.862	2.001
Для закона (2.19)	0.149945	0.099797	0.050075	0.025067	0.009994
Результат моделирования	0.149850	0.099636	0.050060	0.025006	0.009942
Для закона (2.22)	0.150283	0.100049	0.050030	0.024745	0.009503
% точки ст-ки Ватсона	0.131	0.152	0.187	0.222	0.267
Для закона (2.24)	0.150602	0.099526	0.049882	0.024998	0.010283
Результат моделирования	0.150357	0.099479	0.049745	0.024865	0.010305
Для закона (2.26)	0.149243	0.098704	0.050171	0.025747	0.011149

Представленные результаты позволяют, с одной стороны, судить о точности моделирования распределений статистик критериев, с другой, – о возможности построения хороших моделей для неизвестных предельных (и непредельных) распределений статистик, позволяющих достаточно точно оценивать по ним достигаемый уровень значимости.

2.7. Критерии Жанга

В диссертации Жанга [58] и в последующих работах [59, 60, 61] были предложены непараметрические критерии согласия, статистики которых имеют вид:

$$Z_K = \max_{1\le i\le n}\left(\left(i-\frac{1}{2}\right)\log\left\{\frac{i-\frac{1}{2}}{nF(x_i,\theta)}\right\}+\left(n-i+\frac{1}{2}\right)\log\left[\frac{n-i+\frac{1}{2}}{n\{1-F(x_i,\theta)\}}\right]\right),\tag{2.27}$$

$$Z_A = -\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\log\{F(x_i,\theta)\}}{n-i+\frac{1}{2}}+\frac{\log\{1-F(x_i,\theta)\}}{i-\frac{1}{2}}\right],\tag{2.28}$$

$$Z_C = \sum_{i=1}^{n}\left[\log\left\{\frac{[F(x_i,\theta)]^{-1}-1}{(n-\frac{1}{2})/(i-\frac{3}{4})-1}\right\}\right]^2\tag{2.29}$$

Справедливость утверждений автора о более высокой мощности предлагаемых критериев по сравнению с критериями Колмогорова, Крамера-Мизеса-Смирнова и Андерсона-Дарлинга была подтверждена проведенными исследованиями [69, 80, 21, 104].

Однако использование критериев со статистиками (2.27) – (2.29) осложняет сильная зависимость распределений статистик от объема выборки n. Естественно, зависимость от n сохраняется и в случае проверки сложных гипотез.

При проверке простых гипотез можно воспользоваться таблицами процентных точек, приводимых автором, что, в принципе, не очень удобно, так как не позволяет оценить достигаемый уровень значимости. При проверке сложных гипотез применение данных критериев связано с дополнительными препятствиями. Обойти эти препятствия можно за счет использования **интерактивного режима** исследования распределений статистик применяемых критериев [80, 28, 30, 22, 104], о котором будет сказано в разделе 5.3.

2.8. Проверка простых гипотез

2.8.1. Порядок проверки простой гипотезы

При проверке простых гипотез по анализируемой выборке никакие параметры не оцениваются.

В этом случае при проверке согласия опытного распределения с теоретическим распределением случайной величины X действуют следующим образом:

а) формулируют проверяемую гипотезу, выбирая теоретическое распределение случайной величины, согласие которого с эмпирическим распределением этой величины следует проверить;

б) элементы случайной выборки объемом n располагают в порядке возрастания, получая вариационный ряд

$$x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n;$$

в) в соответствии с выбранным критерием проверки вычисляют значение статистики S^* критерия;

г) в соответствии с выбранным критерием вычисляют достигнутый уровень значимости $P\{S > S^*\} = \int\limits_{S^*}^{+\infty} g(s|H_0)ds = 1 - G(S^*(H_0)$, где $G(S(H_0)$ – распределение статистики критерия при справедливости гипотезы H_0. Если $P\{S > S^*\} > \alpha$, где α – заданная вероятность ошибки 1-го рода, то нет оснований для отклонения проверяемой гипотезы. В противном случае проверяемую гипотезу H_0 отвергают.

Можно вычисленное значение статистики S^* сравнить с критическим значением S_α, определяемым из условия $\alpha = \int\limits_{S_\alpha}^{+\infty} g(s|H_0)\,ds$. Гипотезу о согласии отвергают, если значение статистики попадает в критическую область, т. е. при $S^* > S_\alpha$.

Табл. А.1–А.6, используемые при проверке простых гипотез и содержащие значения функций распределения классических статистик непараметрических критериев согласия (Колмогорова, Крамера-

Мизеса-Смирнова и Андерсона-Дарлинга) и значения процентных точек, заимствованы в [65].

2.8.2. Проверка простой гипотезы по критерию Колмогорова

В случае критерия Колмогорова:

а) значение статистики Колмогорова S_K вычисляют по формуле (2.3) на основании формул (2.4)–(2.6);

б) значение вероятности $P\left\{S > S_K^*\right\} = 1 - K\left(S_K^*\right)$ вычисляют по функции распределения Колмогорова (2.2) или берут из табл. А.1 приложения **А**;

в) критические значения критерия S_α при заданном α могут быть взяты из табл. А.2.

2.8.3. Проверка простой гипотезы по критерию Смирнова

В случае критерия Смирнова:

а) значение статистики Смирнова S_m вычисляется по формуле (2.9) на основании формул (2.5)–(2.6);

б) значение вероятности $P\left\{S_m > S_m^*\right\} = e^{-S_m^*/2}$ вычисляют по функции χ_2^2 -распределения (с двумя степенями свободы);

в) гипотезу H_0 не отвергают, если для вычисленного по выборке значения статистики S_m^*

$$P\left\{S_m > S_m^*\right\} = e^{-S_m^*/2} > \alpha .$$

2.8.4. Проверка простой гипотезы по критерию ω^2 Крамера–Мизеса–Смирнова

В случае критерия Крамера–Мизеса–Смирнова:

а) значение статистики Крамера–Мизеса–Смирнова S_ω вычисляют по формуле (2.13);

б) значение вероятности $P\left\{S_\omega > S_\omega^*\right\} = 1 - a1\left(S_\omega^*\right)$ вычисляют по функции распределения $a1(S)$ (2.14) или берут из табл. А.3 приложения **А**;

в) критические значения критерия S_α при заданном α могут быть взяты из табл. А.4;

г) гипотезу H_0 не отвергают, если для вычисленного по выборке значения статистики S_ω^*

$$P\left\{S_\omega > S_\omega^*\right\} = 1 - a1\left(S_\omega^*\right) > \alpha .$$

2.8.5. Проверка простой гипотезы по критерию Ω^2 Андерсона–Дарлинга

В случае критерия Ω^2 Андерсона–Дарлинга:

а) значение статистики Андерсона–Дарлинга S_Ω вычисляют по формуле (2.16);

б) значение вероятности $P\left\{S_\Omega > S_\Omega^*\right\} = 1 - a2\left(S_\Omega^*\right) > \alpha$ вычисляют по функции распределения $a2(S)$ (2.17) или берут из табл. А.5 приложения **А**;

в) критические значения критерия S_α при заданном α могут быть взяты из табл. А.6;

г) гипотезу H_0 не отвергают, если для вычисленного по выборке значения статистики S_Ω^*

$$P\left\{S_\Omega > S_\Omega^*\right\} = 1 - a2\left(S_\Omega^*\right) > \alpha .$$

2.8.6. Проверка простой гипотезы по критерию Купера

В случае критерия Купера:

а) значение статистики Купера V_n^{mod} вычисляют по формуле (2.21) [или статистики V по формуле (2.20)];

б) значение вероятности $P\left\{V_n^{\mathrm{mod}} > V_n^{\mathrm{mod}^*}\right\} = 1 - Kuiper\left(V_n^{\mathrm{mod}^*}\right)$ вычисляют по функции распределения (2.19) или берут из табл. А.53 приложения **А**;

в) критические значения статистики при заданном α могут быть взяты из табл. А.54 приложения **А**;

г) гипотезу H_0 не отвергают, если для вычисленного по выборке значения статистики $V_n^{mod^*}$

$$P\left\{V_n^{\mathrm{mod}} > V_n^{\mathrm{mod}^*}\right\} = 1 - Kuiper\left(V_n^{\mathrm{mod}^*}\right) > \alpha .$$

2.8.7. Проверка простой гипотезы по критерию Ватсона

В случае критерия Ватсона:

а) значение статистики Ватсона U_n^2 вычисляют по формуле (2.23);

б) значение вероятности $P\left\{U_n^2 > U_n^{2^*}\right\} = 1 - Watson\left(U_n^{2^*}\right)$ вычисляют по функции распределения (2.24) или берут из табл. А.55 приложения **А**;

в) критические значения статистики при заданном α могут быть взяты из табл. А.56 приложения **А**;

г) гипотезу H_0 не отвергают, если для вычисленного по выборке значения статистики $U_n^{2^*}$

$$P\left\{U_n^2 > U_n^{2^*}\right\} = 1 - Watson\left(U_n^{2^*}\right) > \alpha .$$

2.8.8. Проверка простой гипотезы по критериям Жанга

В случае критериев Жанга:

а) значение статистики Z критерия Жанга вычисляют по соответствующей формуле [Z_K – по (2.27), Z_A – по (2.28), Z_C – по (2.29)];

б) распределения статистик Z_K, Z_A, Z_C при справедливости проверяемой гипотезы неизвестны и зависят от объема выборки n. Для определения вероятности $P\left\{Z > Z^*\right\}$ можно воспользоваться методами статистического моделирования (см. раздел 5.2), тогда гипотеза H_0 не отвергается при $P\left\{Z > Z^*\right\} > \alpha$;

в) критические значения статистик при заданном α для ограниченных объемов n могут быть взяты из таблиц приложения **А** (для Z_K – из А.62, для Z_A – из А.63, для Z_C – из А.64), заимствованных в [58]. В этом случае гипотезу H_0 не отвергают, если для вычисленного по выборке значения статистики $Z^* \le Z_\alpha$.

3. Непараметрические критерии согласия при проверке сложных гипотез

3.1. Факторы, влияющие на распределения статистик критериев при проверке сложных гипотез

При проверке сложных гипотез, когда по той же самой выборке оценивают параметры наблюдаемого закона распределения вероятностей, все рассматриваемые непараметрические критерии согласия теряют свойство «свободы от распределения». Более того, предельные распределения статистик непараметрических критериев согласия зависят от целого ряда факторов, определяющих «сложность» гипотезы.

На закон распределения статистики $G(S|H_0)$ влияют следующие факторы:

- вид наблюдаемого закона распределения $F(x,\theta)$, соответствующего истинной гипотезе H_0;
- тип оцениваемого параметра и число оцениваемых параметров;
- в некоторых ситуациях конкретное значение параметра (например, в случае гамма-распределения);
- используемый метод оценивания параметров.

Игнорирование того, что проверяют сложную гипотезу, и того, что сложные гипотезы могут быть различными, приводит к некорректному применению непараметрических критериев согласия и, как следствие, к неверным статистическим выводам. Различия в предельных распределениях тех же самых статистик при проверке простых и сложных гипотез настолько существенны, что пренебрегать этим абсолютно недопустимо [110, 66, 70].

3.2. Методы оценивания параметров распределений и зависимость от них распределений статистик критериев

При проверке сложных гипотез оценивание неизвестных параметров законов может осуществляться разными методами, и оценки параметров, получаемые этими методами, обладают различными статистическими свойствами. Распределения статистик критериев согласия существенно зависят от метода оценивания параметров, т. е. каждому типу оценок при конкретной сложной проверяемой гипотезе соответствует свое предельное распределение $G(S|H_0)$ статистики.

В данном руководстве приводятся таблицы процентных точек и модели распределений статистик непараметрических критериев согласия в расчете, в основном, на использование для оценивания параметров метода максимального правдоподобия. Предпочтительность оценок максимального правдоподобия (ОМП) определяется их лучшими асимптотическими свойствами [49, 112].

Второй вид рассматриваемых оценок – это *MD*-оценки, которые получаются при минимизации некоторого расстояния между эмпирической и теоретической функцией распределения. *MD*-оценки более устойчивы к различным отклонениям от предполагаемого закона распределения, более робастны. В случае *MD*-оценивания оценки параметров могут строиться непосредственной минимизацией статистики используемого критерия согласия.

ОМП вычисляют в результате максимизации по θ функции правдоподобия

$$L(\theta) = \gamma \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \theta) \tag{3.1}$$

или ее логарифма

$$\ln L(\theta) = \ln \gamma + \sum_{i=1}^{n} \ln f(x_i, \theta) . \tag{3.2}$$

Чаще всего в случае скалярного параметра ОМП определяют как решение уравнения, а в случае векторного параметра – как решение системы уравнений правдоподобия вида

$$\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta_l} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \ln f(x_i, \theta)}{\partial \theta_l} = 0, \; l = \overline{1, m}, \tag{3.3}$$

где m – размерность вектора параметров θ. В общем случае эта система нелинейна и за редким исключением решается только численно.

В данном случае, как и в [94, 92, 86, 90, 95], при построении распределений статистик и исследовании их зависимости от метода оценивания ОМП вычисляли как решение системы (3.3). При практическом использовании критериев необходимо иметь в виду, что использование грубых приближений ОМП может отражаться на распределениях статистик и свойствах критериев [101].

При вычислении *MD*-оценок минимизируется соответствующее расстояние между эмпирическим и теоретическим распределениями. При использовании статистики Колмогорова S_K за оценку вектора параметров θ принимают значения, минимизирующие эту статистику:

$$\hat{\theta} = \arg \min_{\theta} S_K \tag{3.4}$$

(*MD*-оценки S_K). Аналогично при использовании статистики S_ω минимизируется по θ статистика S_ω:

$$\hat{\theta} = \arg \min_{\theta} S_\omega \tag{3.5}$$

(*MD*-оценки S_ω). При использовании статистики S_Ω

$$\hat{\theta} = \arg \min_{\theta} S_\Omega \tag{3.6}$$

(*MD*-оценки S_Ω).

Вид используемой оценки существенно влияет на распределения статистик критериев согласия. Степень влияния метода оценивания на распределение статистики иллюстрирует рис. 3.1, на котором показаны плотности распределения $g(S_n | H_0)$ статистики S_K критерия Колмогорова в случае использования для вычисления оценок параметров нормального закона с плотностью

$$f(x) = \frac{1}{\theta_0 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\theta_1)^2}{2\theta_0^2}}$$

четырёх различных методов. В данном случае при вычислении оценок в результате минимизации статистики S_K, в результате минимизации статистики S_ω, в результате минимизации статистики S_Ω и методом максимального правдоподобия. Для сравнения на рисунке приведена функция плотности $k(S)$ распределения Колмогорова, которому подчиняется статистика S_K при справедливости простой проверяемой гипотезы.

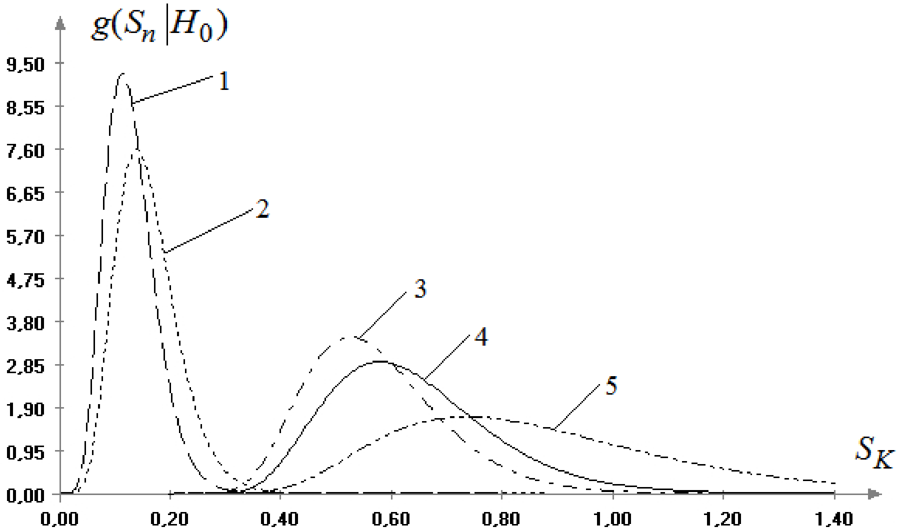

Рис. 3.1. Плотности распределения $g(S_n|H_0)$ статистики S_K при проверке сложной гипотезы (H_0 – нормальный закон, оцениваются оба параметра: *1* – с использованием *MD*-оценок S_K; *2* – *MD*-оценок S_ω; *3* – *MD*-оценок S_Ω; *4* – ОМП; $k(s)$ – плотность распределения Колмогорова)

Необходимо отметить, что вид используемых оценок очень сильно отражается на распределениях статистик непараметрических критериев согласия. В то же время точность оценивания на распределениях статистик сказывается в существенно меньшей степени [101].

Заметим, что при использовании ОМП непараметрические критерии согласия, как правило, обладают большей мощностью по отношению к близким конкурирующим законам по сравнению, например, с использованием *MD*-оценок.

На практике часто используют так называемые оценки по методу моментов. Для некоторых законов оценки параметров по методу моментов совпадают с ОМП, как, например, в случае нормального закона. Но в общем случае свойства оценок по методу моментов отличаются от свойств ОМП. Отличаются и распределения статистик непараметрических критериев согласия от тех, которые они имеют в случае ОМП, и модели которых для проверки сложных гипотез представлены в данном руководстве.

3.3. Зависимость распределений статистик непараметрических критериев от вида закона

При использовании ОМП распределения статистик сильно зависят от закона $F(x,\theta)$, соответствующего проверяемой гипотезе H_0. На рис. 3.2 приведены эмпирические распределения $G(S_n|H_0)$ статистики Крамера–Мизеса–Смирнова S_ω, когда при проверке сложной гипотезы два параметра закона, соответствующего гипотезе H_0, оценивали с использованием метода максимального правдоподобия.

На рисунке показаны распределения статистики $G(S_n|H_0)$, когда гипотеза H_0 соответствует законам: нормальному, логистическому с плотностью $f(x)=\frac{1}{\theta_0}\exp\left\{-\frac{(x-\theta_1)}{\theta_0}\right\}\Bigg/\left[1+\exp\left\{-\frac{(x-\theta_1)}{\theta_0}\right\}\right]^2$, Лапласа – $f(x)=\frac{1}{2\theta_0}e^{-(x-\theta_1)/\theta_0}$ и распределению наименьшего значения – $f(x)=\frac{1}{\theta_0}\exp\left\{\frac{x-\theta_1}{\theta_0}-\exp\left(\frac{x-\theta_1}{\theta_0}\right)\right\}$.

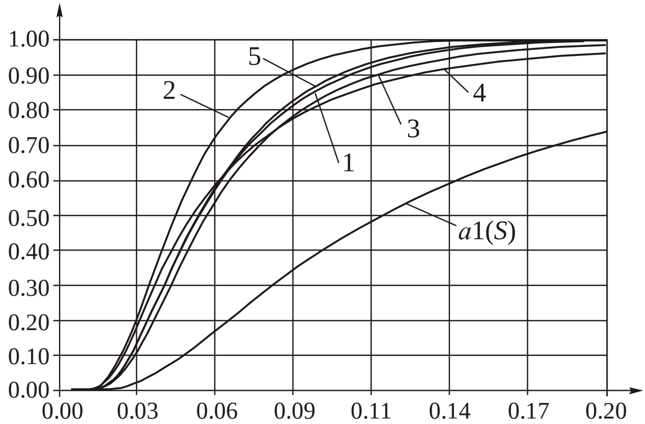

Рис. 3.2. Распределения $G(S_n|H_0)$ статистики S_ω Крамера–Мизеса–Смирнова при оценивании двух параметров закона, соответствующего гипотезе H_0 (*1* – нормального, *2* – логистического, *3* – Лапласа, *4* – наименьшего значения, *5* – Коши), при использовании ОМП. $a1(s)$ – функция распределения, предельная при простой гипотезе

В то же время необходимо подчеркнуть, что при использовании *MD*-оценок, минимизирующих статистику применяемого критерия согласия, влияние вида закона $F(x,\theta)$, соответствующего H_0, на распределение статистики проявляется менее значительно.

3.4. Зависимость распределений статистик непараметрических критериев от числи и типа оцениваемых параметров

Распределения $G(S|H_0)$ статистик непараметрических критериев при проверке сложных гипотез зависят от числа и типа оцениваемых параметров. Рис. 3.3 иллюстрирует характер зависимости распределения статистики (2.21) критерия Купера от типа оцениваемого параметра (масштаба или сдвига) и количества оцениваемых параметров при проверке сложных гипотез относительно нормального закона в случае использования ОМП [81, 23]. На рисунке приведено также распределение (2.19), которому подчиняется статистика критерия при проверке простой гипотезы.

Оценивание параметра сдвига, как правило, приводит к более существенному изменению распределения статистики критерия, чем оценивании масштабного параметра. Такая картина имеет место для распределений статистик критериев Колмогорова, Крамера-Мизеса-Смирнова, Андерсона-Дарлинга. Однако для критериев Купера и Ватсона к большему изменению статистики критерия приводит оценивание параметра масштаба.

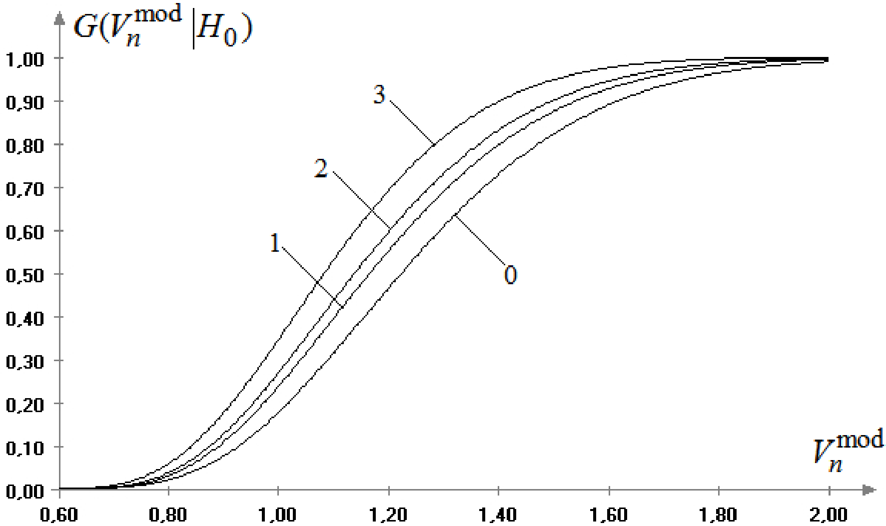

Рис. 3.3. Распределения $G(V_n^{\text{mod}}|H_0)$ статистики V_n^{mod} Купера при использовании ОМП для оценивания параметров нормального закона (*0* – без оценивания (распределение Купера), *1* – при оценивании параметра сдвига, *2* – параметра масштаба, 3 – при оценивании двух параметров)

Наличие большого числа параметров у модели закона, используемой для описания реально наблюдаемой случайной величины, и, следовательно, возможность при статистическом анализе выборок оценивать различные комбинации параметров, требует построения моделей распределений статистик критериев для этих комбинаций оцениваемых параметров. Примером таких законов могут служить распределения Sl-Джонсона и Su-Джонсона. В таблицах приложения А.21-А.23 для критериев Колмогорова, Крамера-Мизеса-Смирнова, Андерсона-Дарлинга и А.57-А.59 для критериев Купера и Ватсона, содержащих процентные точки и модели распределений статистик критериев согласия, предусмотрена возможность оценивания различных параметров этих законов.

Следует отметить, что при использовании *MD*-оценок зависимости распределений статистик от типа оцениваемых параметров выражены в меньшей степени.

3.5. Зависимость распределений статистик непараметрических критериев от конкретных значений параметра

Для достаточно широкого перечня законов, часто используемых в приложениях для описания наблюдаемых случайных величин, распределения статистик непараметрических критериев согласия не зависят от (истинных) значений конкретных параметров. Данное свойство облегчает проблему проверки сложных гипотез с использованием непараметрических критериев согласия относительно этих законов. К группе таких законов относятся распределения: экспоненциальное, полунормальное, Рэлея, Максвелла, Лапласа, нормальное, логнормальное, Коши, логистическое, логлогистическое, экстремальных значений (наибольшего и наименьшего), Вейбулла, Sb-Джонсона, Sl-Джонсона, Su-Джонсона. Процентные точки и модели распределений непараметрических критериев согласия Колмогорова, Крамера–Мизеса–Смирнова и Андерсона–Дарлинга при проверке сложных гипотез относительно этих законов, уточненные в [76, 33, 77, 31] для случая использования ОМП, представлены в табл. А.7–А.23, для критериев Купера и Ватсона [23, 81] – в таблицах А.57–А.61 приложения **А**.

В некоторых случаях предельные распределения $G(S|H_0)$ рассматриваемых статистик при проверке сложных гипотез зависят от конкретных значений параметров закона, с которым проверяют согласие [92, 85]. Это касается многих интересных для применения в приложениях законов, например, семейства гамма-распределений, семейств бета-распределений I, II и III рода, обобщенного нормального распределения, обобщенного распределения Вейбулла, обратного гауссовского распределения и других.

Распределения $G(S|H_0)$ статистик непараметрических критериев в случае проверки согласия с **гамма-распределением** с плотностью

$$f(x)=\frac{1}{\theta_1^{\theta_0}\Gamma(\theta_0)}x^{\theta_0-1}e^{-x/\theta_1}$$

зависят от его параметра формы θ_0.

Процентные точки и модели распределений непараметрических критериев согласия Колмогорова, Крамера-Мизеса-Смирнова и Андерсона-Дарлинга при проверке сложных гипотез относительно гамма-распределений, ранее приведенные в [111], были уточнены в работах [35, 76, 34, 31] и представлены в табл. А.24–А.28 приложения **А**.

Обобщенное нормальное распределение, которое иногда называют двусторонним экспоненциальным, часто оказывается хорошей моделью ошибок измерений в ситуациях, когда с помощью нормального закона не удается описать наблюдаемую случайную величину. Плотность обобщенного нормального закона имеет вид

$$f(x)=\frac{\theta_2}{2\theta_1\Gamma(1/\theta_2)}\exp\left\{-\left(\frac{|x-\theta_0|}{\theta_1}\right)^{\theta_2}\right\}. \tag{3.7}$$

Частными случаями этого закона при значениях параметра формы θ_2, равных 2 и 1, соответственно являются распределения нормальное и Лапласа. Плотности закона при различных значениях параметра формы θ_2 приведены на рис. 3.4.

Семейство (3.7) в последнее время достаточно часто используется в качестве вероятностных моделей ошибок наблюдений в задачах регрессионного и дисперсионного анализа при нарушении классических предположений, когда закон распределения ошибок существенно отличается от нормального.

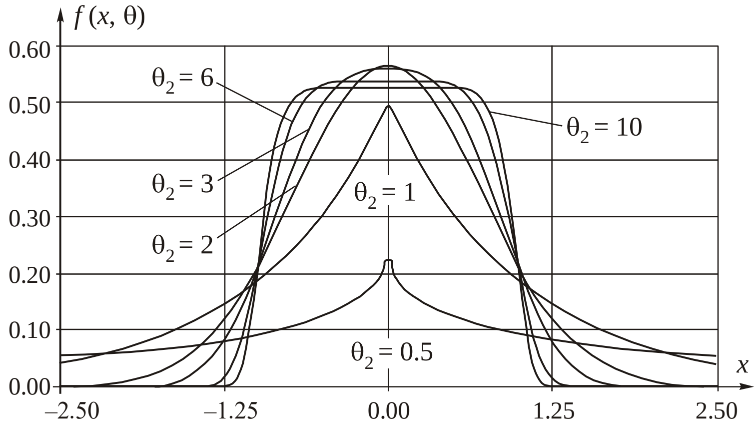

Рис. 3.4. Плотности распределения семейства (3.7) при различных значениях параметра θ_2

Распределения статистик $G(S|H_0)$ непараметрических критериев согласия зависят от конкретных значений параметра формы θ_2, причем зависимость эта не совсем обычна. Как правило, с ростом θ_2 от 0 до ≈1.6 происходит уменьшение масштабного параметра распределения статистики $G(S|H_0)$, а при дальнейшем росте θ_2 – увеличение масштабного параметра. При значениях $\theta_2 > 7$ распределения статистик при соответствующих сложных гипотезах практически не меняются.

Например, рис. 3.5 иллюстрирует зависимость распределений статистики критерия Колмогорова от параметра формы θ_2 для случая, когда все три параметра распределения (3.7) оцениваются методом максимального правдоподобия.

Рис. 3.6 отражает характер зависимости распределения статистики критерия типа Ω^2 Андерсона–Дарлинга от числа и типа параметров, оцениваемых методом максимального правдоподобия, при значении параметра формы $\theta_2 = 1.6$. Этому значению параметра формы соответствуют самые «сдвинутые» влево распределения статистик непараметрических критериев согласия при проверке гипотез относительно закона (3.7). На рис. 3.5–3.6 соответствующие распределения $G(S|H_0)$ помечены перечнем оцениваемых параметров. Здесь же приведено распределение $a2(S)$, которому в пределе подчиняется эта же статистика при проверке простых гипотез.

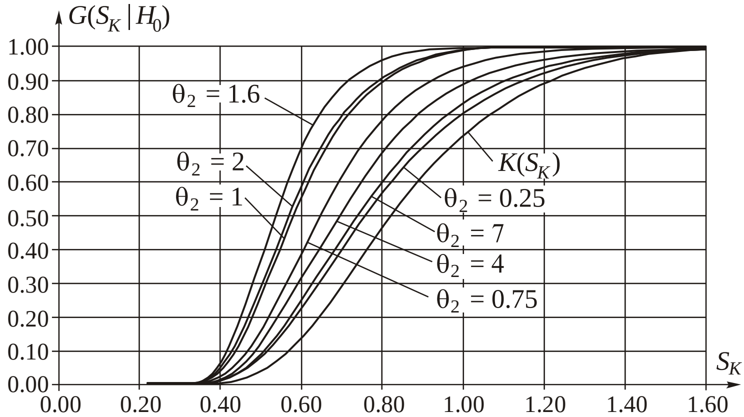

Рис. 3.5. Зависимость распределения статистики критерия типа Колмогорова от параметра формы θ_2 при оценивании всех трех параметров распределения (3.7)

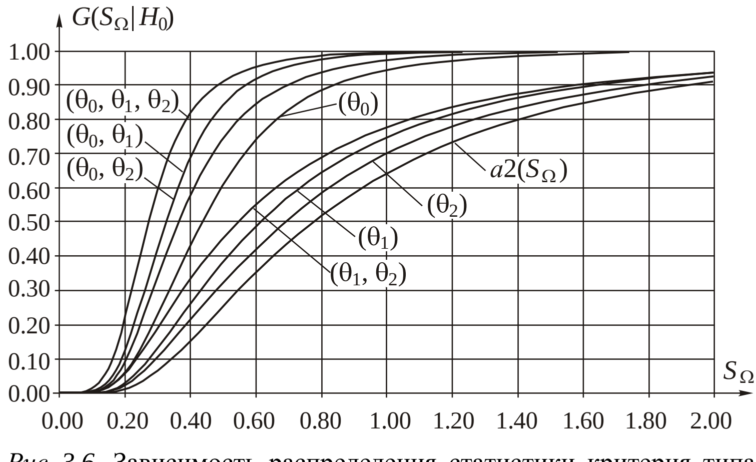

Рис. 3.6. Зависимость распределения статистики критерия типа Ω^2 Андерсона–Дарлинга от числа и типа параметров семейства (3.7), оцениваемых методом максимального правдоподобия, при значении параметра формы θ_2 = 1.6

Для проверки сложных гипотез о согласии с семейством (3.7) модели для распределений статистик $G(S|H_0)$ критериев типа Колмогорова, Крамера–Мизеса–Смирнова и Андерсона–Дарлинга в случае использования ОМП были построены в [85, 36] при различных значениях параметра формы θ_2. Позже процентные точки и модели были уточнены [35, 76, 34] и представлены в табл. А.29–А.37 приложения **А**.

Плотность **обратного гауссовского распределения** имеет вид

$$f(x)=\left(\frac{\theta_1}{2\pi x^3}\right)^{1/2}\exp\left(-\frac{\theta_1(x-\theta_0)^2}{2\theta_0^2 x}\right), \tag{3.8}$$

где параметры $\theta_0, \theta_1 \in (0,\infty)$, $x \in (0,\infty)$. Особенный интерес к использованию данного закона проявляется в задачах анализа надежности, долговечности и выживания, когда имеются основания предполагать, что функция интенсивности отказов имеет колоколообразную форму.

При проверке сложных гипотез относительно обратного гауссовского закона распределения статистик $G(S|H_0)$ критериев согласия зависят от конкретных значений двух параметров: θ_0 и θ_1. Эту зависимость для распределений статистики критерия Андерсона–Дарлинга для случая использования ОМП демонстрирует рис. 3.7.

Задача исследования распределений статистик непараметрических критериев согласия для случая проверки сложных гипотез относительно обратного гауссовского закона решена в работах [41, 32, 77] для достаточно большого диапазона значений параметров θ_0 и θ_1 семейства (3.8).

Построенные процентные точки и модели для предельных распределений статистик критериев Колмогорова, ω^2 Крамера–Мизеса–Смирнова, Ω^2 Андерсона–Дарлинга для случая одновременного вычисления ОМП обоих параметров закона представлены в таблицах в табл. А.38–А.40 приложения **А**.

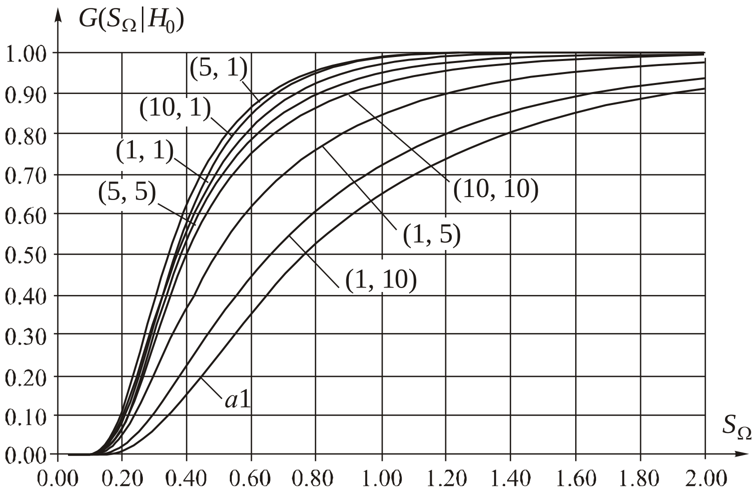

Рис. 3.7. Зависимость распределений статистики Андерсона–Дарлинга от значений θ_0 и θ_1 при использовании для оценивания параметров закона (3.8) метода максимального правдоподобия

Плотность **обобщенного распределения Вейбулла** (ОРВ) имеет вид

$$f(x;\theta_0,\theta_1,\theta_2)=$$

$$=\frac{\theta_0}{\theta_1}\theta_2^{\theta_0}x^{\theta_0-1}\left(1+\left(\frac{x}{\theta_2}\right)^{\theta_0}\right)^{\frac{1}{\theta_1}-1} e^{1-\left(1+\left(\frac{x}{\theta_2}\right)^{\theta_0}\right)^{\frac{1}{\theta_1}}}, \qquad (3.9)$$

где $x\ge 0$, θ_0, θ_1, $\theta_2>0$. Семейство (3.9) определяет множество различных законов. Специальными случаями ОРВ являются: $\theta_1=1$ – семейство распределений Вейбулла; $\theta_0=1$, $\theta_1=1$ – экспоненциальное распределение. Функция распределения закона имеет вид

$$F(x;\theta_0,\theta_1,\theta_2)=1-e^{1-\left(1+\left(\frac{x}{\theta_2}\right)^{\theta_0}\right)^{\frac{1}{\theta_1}}}.$$

Функция интенсивности отказов ОРВ может быть монотонно возрастающей (при $\theta_0 > 1$, $\theta_0 > \theta_1$ и $\theta_0 = 1$, $\theta_1 < 1$), монотонно убывающей ($0 < \theta_0 < 1$, $\theta_0 < \theta_1$ и $0 < \theta_0 < 1$, $\theta_0 = \theta_1$), $\cap$-куполообразной ($\theta_1 > \theta_0 > 1$), $\cup$-образной ($0 < \theta_1 < \theta_0 < 1$) и имеет вид

$$\lambda(x) = \frac{\theta_0}{\theta_1} \theta_2{}^{\theta_1} x^{\theta_0 - 1} \left(1 + \left(\frac{x}{\theta_2} \right)^{\theta_0} \right)^{\frac{1}{\theta_1} - 1}.$$

ОРВ используется в задачах исследования надежности и выживания.

В случае проверки сложных гипотез относительно ОРВ распределения статистик непараметрических критериев согласия $G(S|H_0)$ зависят от конкретных значений истинного параметра θ_1, и эта зависимость не всегда монотонная.

На рис. 3.8 можно наблюдать, как меняются распределения статистики S_Ω критерия Андерсона–Дарлинга при проверке сложных гипотез относительно семейства (3.9) в случае оценивания двух параметров θ_0 и θ_1 методом максимального правдоподобия.

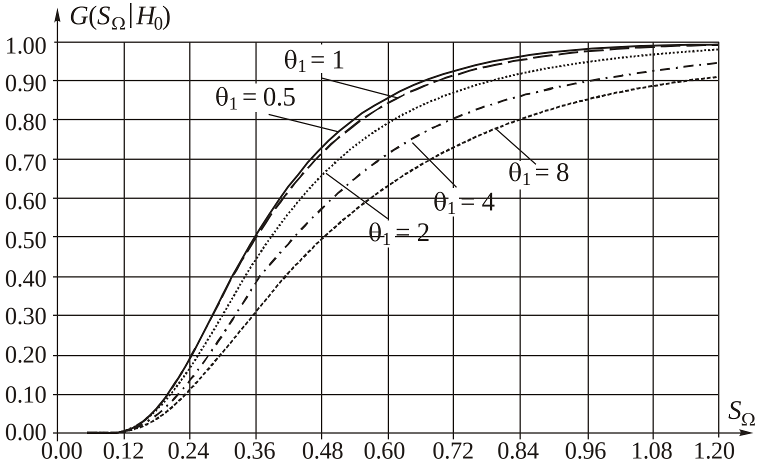

Рис. 3.8. Распределения статистики критерия Андерсона–Дарлинга при проверке сложных гипотез относительно семейства (3.9) и вычислении ОМП двух параметров ОРВ (θ_0 и θ_1)

В [62, 1] для критериев Колмогорова, Крамера–Мизеса–Смирнова и Андерсона–Дарлинга в случае использования метода максимального правдоподобия при определении оценок одного, двух или всех трех параметров закона найдены верхние процентные точки и построены параметрические модели предельных распределений статистик.

Соответствующие результаты представлены в табл. А.41–А.49 приложения **А**.

Бета-распределение I рода имеет функцию плотности

$$f(x) = \mathrm{B_I}(\theta_0, \theta_1) = \frac{1}{\theta_2 \mathrm{B}(\theta_0, \theta_1)} \left(\frac{x}{\theta_2}\right)^{\theta_0 - 1} \left(1 - \frac{x}{\theta_2}\right)^{\theta_1 - 1}, \qquad (3.10)$$

где $\mathrm{B}(\theta_0, \theta_1) = \Gamma(\theta_0)\Gamma(\theta_1) / \Gamma(\theta_0 + \theta_1)$ – бета-функция, параметры формы $\theta_0, \theta_1 \in (0, \infty)$, масштабный параметр $\theta_2 \in (0, \infty)$, $x \in [0, \theta_2]$.

Функция плотности **бета-распределения II рода** описывается выражением

$$f(x) = \mathrm{B_{II}}(\theta_0, \theta_1, \theta_2) = \frac{1}{\theta_2 \mathrm{B}(\theta_0, \theta_1)} \frac{[x/\theta_2]^{\theta_0 - 1}}{[1 + x/\theta_2]^{\theta_0 + \theta_1}}, \qquad (3.11)$$

где $x \in [0, \infty)$. Частным случаем бета-распределения II рода является F-распределение Фишера: для распределения Фишера с числом степеней свободы k и n имеем

$$F_{k,n} = \mathrm{B_{II}}\left(\frac{k}{2}, \frac{n}{2}, \frac{n}{k}\right).$$

Функция плотности **бета-распределения III рода** описывается выражением

$$f(x) = \mathrm{B_{III}}(\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4) =$$
$$= \frac{\theta_2^{\theta_0}}{\theta_3 \mathrm{B}(\theta_0, \theta_1)} \frac{\left(\dfrac{x - \theta_4}{\theta_3}\right)^{\theta_0 - 1} \left(1 - \dfrac{x - \theta_4}{\theta_3}\right)^{\theta_1 - 1}}{\left[1 + (\theta_2 - 1)\dfrac{x - \theta_4}{\theta_3}\right]^{\theta_0 + \theta_1}}. \qquad (3.12)$$

Распределения статистик непараметрических критериев при проверке сложных гипотез относительно бета-распределений существенно зависят от факта оценивания параметров и от конкретных значений параметров формы.

Таблицы процентных точек и модели распределений статистик для непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез относительно бета-распределений I и II рода при использовании оценок максимального правдоподобия получены в работах [40, 103, 102]. Часть результатов при равных значениях двух оцениваемых параметров θ_0 и θ_1 представлена в табл. А.50–А.52 приложения **А**, а полная совокупность построенных моделей доступна в [102].

Результаты, приводимые в таблицах приложения **А** и в [102], можно использовать при проверке сложных гипотез относительно бета-распределений III рода, когда оцениваются только параметры θ_0 и θ_1 этого закона.

3.6. Выводы

Более подробно о нюансах, связанных с применением непараметрических критериев при проверке сложных гипотез говорится в [96].

Результаты исследований распределений статистик непараметрических критериев согласия Колмогорова, Смирнова, Крамера-Мизеса-Смирнова, Андерсна-Дарлинга при проверке сложных гипотез первоначально были сведены в рекомендации [93], затем на этой базе и результатах, полученных в [88], были подготовлены рекомендации по стандартизации [111]. Последующие исследования и уточнения моделей распределений статистик, проведенные в [85, 36, 35, 76, 34, 62, 1, 41, 77, 96, 40, 102], существенно дополняют и уточняют рекомендации по стандартизации [111].

В [80, 81, 21, 23] были получены результаты, позволяющие проверять сложные гипотезы с использование критериев Купера и Ватсона. Все эти результаты (модели распределений статистик и таблицы приближенных значений процентных точек), позволяющие корректно применять критерии при проверке сложных гипотез, также представлены в приложении **А**.

Для наиболее интересных для приложений параметрических законов распределения статистик непараметрических критериев согласия зависят от конкретных значений параметра или параметров этих законов. Очевидно, что заранее построить модели для распределений статистик критериев для любых комбинаций значений параметров нереально. Однако такие задачи могут решаться по мере поступления или моделирование распределения статистики и построение соответствующей приближенной модели могут осуществляться в «реальном времени» проверки сложной гипотезы (см. раздел 5.3).

В [99] показана возможность применения непараметрических критериев согласия типа Колмогорова, типа ω^2 Крамера–Мизеса–Смирнова и Ω^2 Андерсона–Дарлинга для проверки адекватности непараметрических моделей законов распределения. Было показано, что при использовании непараметрических оценок на распределения статистик критериев согласия влияет ряд факторов, определяющих сложную проверяемую гипотезу H_0: закон распределения наблюдаемой случайной величины, соответствующий H_0; вид используемой ядерной функции; объем выборки; метод оценивания параметров размытости.

4. Проверка сложных гипотез

4.1. Порядок проверки сложной гипотезы

При проверке согласия опытного распределения с теоретическим распределением случайной величины X действуют следующим образом:

а) формулируют проверяемую гипотезу, выбирая теоретическое распределение $F(x, \theta)$ случайной величины, согласие которого с опытным распределением этой величины следует проверить. Перечень теоретических распределений, для которых возможна проверка сложных гипотез с использованием данных рекомендаций, приведен в разд. 4.2 (табл. 4.1);

б) элементы выборки объемом n располагают в порядке их возрастания, так что в распоряжении имеют упорядоченную выборку значений

$$x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n;$$

в) по выборке вычисляют оценки параметров распределения $F(x, \theta)$, выбранного в соответствии с пунктом а) [оценки максимального правдоподобия на основании формул (3.1)–(3.3) или *MD*-оценки, минимизирующие статистику критерия на основании соответственно формул (3.4), (3.5) или (3.6)];

г) в соответствии с выбранным критерием проверки вычисляют значение статистики S^* критерия [по формулам (2.3) для критерия Колмогорова, (2.9) – для критерия Смирнова, (2.13) – для критерия Крамера-Мизеса-Смирнова, (2.16) – для критерия Андерсона-Дарлинга, (2.20) или (2.21) – для критерия Купера, (2.23) – для критерия Ватсона, (2.27), (2.28) или (2.29) для критериев Жанга];

д) в соответствии с выбранным критерием проверки, теоретическим распределением $F(x, \theta)$ и используемым методом оценивания для критериев Колмогорова, Смирнова, Крамера-Мизеса-Смирнова и Андерсона-Дарлинга по табл. 4.2, а для критериев Купера и Ватсона – по табл. 4.3, определяют таблицу приложения **A**, содержащую модель распределения статистики или процентные точки.

В соответствии с оцененным параметром или параметрами, а в некоторых случаях в соответствии со значением параметра или параметров формы (например, в случае гамма-распределения, бета-распределений, обобщенного нормального распределения, обратного гауссовского, обобщенного Вейбулла) определяют распределение статистики критерия $G(S|H_0)$ при справедливости гипотезы H_0;

е) на основании выбранного в соответствии с пунктом д) распределения $G(S|H_0)$ вычисляют значение

$$P\{S > S^*\} = \int_{S^*}^{+\infty} g(s|H_0)ds = 1 - G\left(S^*|H_0\right);$$

ж) если $P\{S > S^*\} > \alpha$, где α – задаваемый уровень значимости, то нет оснований для отклонения проверяемой гипотезы. В противном случае проверяемую гипотезу H_0 отвергают. Можно вычисленное значение статистики S^* сравнить с критическим значением S_α, определяемым из условия $\alpha = \int_{S_\alpha}^{+\infty} g(s|H_0)ds$. Гипотезу о согласии не отвергают, если $S^* < S_\alpha$.

Если для закона, соответствующего проверяемой гипотезе, распределения статистик зависят от значения параметра формы (как в случае гамма-распределения) или от значений двух параметров (как в случае семейств бета-распределений), и значение параметра формы (или параметров) не совпадает с табличным, искомые значения $P\{S > S^*\}$ или квантили S_α определяют интерполяцией.

Если закон распределения, относительно которого проверяют гипотезу о согласии с использованием непараметрического критерия, не входит в перечень, приведенный в табл. 4.1, то для построения распределения статистики $G(S|H_0)$, соответствующего проверяемой гипотезе H_0, рекомендуется воспользоваться методикой компьютерного анализа, изложенной в разд. 5.2.

4.2. Перечень распределений, для которых регламентирована проверка сложных гипотез

Перечень теоретических законов, с которыми могут проверяться сложные гипотезы о согласии с эмпирическими распределениями с использованием непараметрических критериев, приведен в табл. 4.1.

Список распределений, приведенный в таблице, достаточно ограничен и включает в себя лишь законы распределения, наиболее часто используемые в приложениях в качестве моделей законов реальных случайных величин.

Таблица 4.1

Перечень законов, для которых построены модели распределений статистик непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез

№ п/п	Распределение случайной величины, область определения	Функция плотности
1	Экспоненциальное, $x \ge 0$	$\frac{1}{\theta_0} e^{-x/\theta_0}$
2	Полунормальное, $x \ge 0$	$\frac{2}{\theta_0\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2\theta_0^2}$
3	Рэлея, $x \ge 0$	$\frac{x}{\theta_0^2} e^{-x^2/2\theta_0^2}$
4	Максвелла, $x \ge 0$	$\frac{2x^2}{\theta_0^3\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2\theta_0^2}$
5	Лапласа, $x \in (-\infty, \infty)$	$\frac{1}{2\theta_0} e^{-(x-\theta_1)/\theta_0}$
6	Нормальное, $x \in (-\infty, \infty)$	$\frac{1}{\theta_0\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\theta_1)^2}{2\theta_0^2}}$
7	Логнормальное, $x \in (0, \infty)$	$\frac{1}{x\theta_0\sqrt{2\pi}} e^{-(\ln x-\theta_1)^2/2\theta_0^2}$

Продолжение табл. 4.1

№ п/п	Распределение случайной величины, область определения	Функция плотности
8	Коши, $x \in (-\infty, \infty)$	$\dfrac{\theta_0}{\pi\left[\theta_0^2 + (x-\theta_1)^2\right]}$
9	Логистическое, $x \in (-\infty, \infty)$	$\dfrac{1}{\theta_0} \exp\left\{-\dfrac{(x-\theta_1)}{\theta_0}\right\} \Big/ \left[1 + \exp\left\{-\dfrac{(x-\theta_1)}{\theta_0}\right\}\right]^2$
10	Наибольшего значения, $x \in (-\infty, \infty)$	$\dfrac{1}{\theta_0} \exp\left\{-\dfrac{x-\theta_1}{\theta_0} - \exp\left(-\dfrac{x-\theta_1}{\theta_0}\right)\right\}$
11	Наименьшего значения, $x \in (-\infty, \infty)$	$\dfrac{1}{\theta_0} \exp\left\{\dfrac{x-\theta_1}{\theta_0} - \exp\left(\dfrac{x-\theta_1}{\theta_0}\right)\right\}$
12	Вейбулла, $x \in (0, \infty)$	$\dfrac{\theta_0 x^{\theta_0 - 1}}{\theta_1^{\theta_0}} \exp\left\{-\left(\dfrac{x}{\theta_1}\right)^{\theta_0}\right\}$
13	Sb-Джонсона, $x \in [\theta_3, \theta_2 + \theta_3]$	$\dfrac{\theta_1 \theta_2}{\sqrt{2\pi}(x-\theta_3)(\theta_2+\theta_3-x)} \times$ $\times \exp\left\{-\dfrac{1}{2}\left[\theta_0 - \theta_1 \ln \dfrac{x-\theta_3}{\theta_2+\theta_3-x}\right]^2\right\}$
14	Sl-Джонсона, $x \in [\theta_3, \infty)$	$\dfrac{\theta_1}{\sqrt{2\pi}\left(x-\theta_3\right)} \exp\left\{-\dfrac{1}{2}\left[\theta_0 + \theta_1 \ln \dfrac{x-\theta_3}{\theta_2}\right]^2\right\}$
15	Su-Джонсона, $x \in (-\infty, \infty)$	$\dfrac{\theta_1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\left(x-\theta_3\right)^2 + \theta_2^2}} \times$ $\times \exp\left\{-\dfrac{1}{2}\left[\theta_0 + \theta_1 \ln\left\{\dfrac{x-\theta_3}{\theta_2} + \sqrt{\left(\dfrac{x-\theta_3}{\theta_2}\right)^2 + 1}\right\}\right]^2\right\}$

Окончание табл. 4.1

№ п/п	Распределение случайной величины, область определения	Функция плотности
16	Гамма-распределение, $x \in (\theta_2, \infty)$	$\dfrac{1}{\theta_1^{\theta_0}\Gamma(\theta_0)}\left(x-\theta_2\right)^{\theta_0-1} e^{-\left(x-\theta_2\right)/\theta_1}$
17	Обобщенное нормальное , $x \in (-\infty, \infty)$	$\dfrac{\theta_2}{2\theta_1\Gamma(1/\theta_2)}\exp\left\{-\left(\dfrac{\lvert x-\theta_0\rvert}{\theta_1}\right)^{\theta_2}\right\}$
18	Обратное гауссовское, $x \in (0, \infty)$	$\left(\dfrac{\theta_1}{2\pi x^3}\right)^{1/2}\exp\left(-\dfrac{\theta_1(x-\theta_0)^2}{2\theta_0^2 x}\right)$
19	Обобщенное Вейбулла, $x \in (0, \infty)$	$\dfrac{\theta_0}{\theta_1}\theta_2{}^{\theta_0}x^{\theta_0-1}\left(1+\left(\dfrac{x}{\theta_2}\right)^{\theta_0}\right)^{\frac{1}{\theta_1}-1} e^{1-\left(1+\left(\frac{x}{\theta_2}\right)^{\theta_0}\right)^{\frac{1}{\theta_1}}}$
20	Бета-распределение I рода	$\dfrac{1}{\theta_2 B(\theta_0, \theta_1)}\left(\dfrac{x}{\theta_2}\right)^{\theta_0-1}\left(1-\dfrac{x}{\theta_2}\right)^{\theta_1-1}$
21	Бета-распределение II рода	$\dfrac{1}{\theta_2 B(\theta_0, \theta_1)}\dfrac{[x/\theta_2]^{\theta_0-1}}{[1+x/\theta_2]^{\theta_0+\theta_1}}$
22	Бета-распределение III рода	$\dfrac{\theta_2^{\theta_0}}{\theta_3 B(\theta_0, \theta_1)}\dfrac{\left(\dfrac{x-\theta_4}{\theta_3}\right)^{\theta_0-1}\left(1-\dfrac{x-\theta_4}{\theta_3}\right)^{\theta_1-1}}{\left[1+(\theta_2-1)\dfrac{x-\theta_4}{\theta_3}\right]^{\theta_0+\theta_1}}$

Для критериев **Колмогорова, Смирнова, Крамера-Мизеса-Смирнова и Андерсона-Дарлинга** указания на таблицы приложения **А**, в которых представлены соответствующие модели законов распределений статистик и процентные точки, содержатся **в табл. 4.2**. При этом, в основном, предусматривается применение оценок максимального правдоподобия и, в меньшей степени, применение *MD*-оценок.

Для критериев **Купера и Ватсона** соответствующие указания содержатся **в табл. 4.3**. В этом случае предусмотрено использование только метода максимального правдоподобия. Для этих критериев в приложении **А** отсутствуют таблицы с моделями и процентными точками для законов, в случае которых существует зависимость распределений статистик критериев от параметра или параметров формы закона. Подразумевается, что в такой ситуации для нахождения требуемого для принятия решения распределения статистики применяемого критерия можно воспользоваться методикой компьютерного моделирования (см. разд. 5.2) или найти это распределение и достигаемый уровень значимости (p-value) в интерактивном режиме (см. разд. 5.3).

Применение критериев **Жанга** без использования компьютерных технологий для оперативного исследования распределений статистик в соответствии с проверяемой сложной гипотезой мало перспективно. Следует отметить, что в [58] приводятся таблицы процентных точек для проверки сложных гипотез относительно нормального закона для различных объемов выборок. Однако эффективное использование этих критериев возможно лишь при использовании интерактивного режима исследования распределений статистик критериев (см. разд. 5.3).

В таблицах приложения **А**, содержащих рекомендуемые для использования при проверке сложных гипотез распределения $G(S|H_0)$, через $\ln N(\theta_1, \theta_0)$ обозначено логарифмически нормальное распределение с функцией плотности

$$f(x) = \frac{1}{x\theta_0\sqrt{2\pi}} e^{-(\ln x - \theta_1)^2/2\theta_0^2},$$

через $\gamma(\theta_0, \theta_1, \theta_2)$ – гамма-распределение с функцией плотности

$$f(x)=\frac{1}{\theta_1^{\theta_0}\Gamma(\theta_0)}\left(x-\theta_2\right)^{\theta_0-1}e^{-\left(x-\theta_2\right)/\theta_1},$$

через $\mathrm{Sl}(\theta_0,\theta_1,\theta_2,\theta_3)$ – распределение Sl-Джонсона с плотностью

$$f(x)=\frac{\theta_1}{\sqrt{2\pi}\left(x-\theta_3\right)}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\theta_0+\theta_1\ln\frac{x-\theta_3}{\theta_2}\right]^2\right\},$$

через $\mathrm{Su}(\theta_0,\theta_1,\theta_2,\theta_3)$ – распределение Su-Джонсона с плотностью

$$f(x)=\frac{\theta_1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\left(x-\theta_3\right)^2+\theta_2^2}}\times$$

$$\times\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\theta_0+\theta_1\ln\left\{\frac{x-\theta_3}{\theta_2}+\sqrt{\left(\frac{x-\theta_3}{\theta_2}\right)^2+1}\right\}\right]^2\right\},$$

через $\mathrm{B_{III}}(\theta_0,\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4)$ – бета-распределение III рода с плотностью

$$f(x)=\frac{\theta_2^{\theta_0}}{\theta_3\mathrm{B}(\theta_0,\theta_1)}\frac{\left(\frac{x-\theta_4}{\theta_3}\right)^{\theta_0-1}\left(1-\frac{x-\theta_4}{\theta_3}\right)^{\theta_1-1}}{\left[1+(\theta_2-1)\frac{x-\theta_4}{\theta_3}\right]^{\theta_0+\theta_1}}.$$

Табл. А.7–А.52 и А.57-А.61 построены в результате применения методики компьютерного анализа статистических закономерностей, описанной в разделе 5.2.

В случае необходимости проверки сложной гипотезы относительно закона, не вошедшего в представленный перечень, для построения распределения статистики $G(S|H_0)$, соответствующего проверяемой гипотезе H_0, рекомендуется воспользоваться методикой компьютерного анализа, изложенной в разделе 5.2.

Таблица 4.2

Указание таблиц с моделями распределений статистик и процентными точками

№ п/п	Распределение случайной величины	Номера таблиц с моделями распределений статистик и процентных точек						
		Критерий Колмогорова		Критерий Смирнова	Критерий ω^2 Крамера–Мизеса–Смирнова		Критерий Ω^2 Андерсона–Дарлинга	
		ОМП	*MD*-оценки	ОМП	ОМП	*MD*-оценки	ОМП	*MD*-оценки
1	Экспоненциальное	А.7, А.8	А.9, А.10	А.11, А.12	А.13, А.14	А.15, А.16	А.17, А.18	А.19, А.20
2	Полунормальное	А.7, А.8	А.9, А.10	А.11, А.12	А.13, А.14	А.15, А.16	А.17, А.18	А.19, А.20
3	Рэлея	А.7, А.8	А.9, А.10	А.11, А.12	А.13, А.14	А.15, А.16	А.17, А.18	А.19, А.20
4	Максвелла	А.7, А.8	А.9, А.10	А.11, А.12	А.13, А.14	А.15, А.16	А.17, А.18	А.19, А.20
5	Лапласа	А.7, А.8	А.9, А.10	А.11, А.12	А.13, А.14	А.15, А.16	А.17, А.18	А.19, А.20
6	Нормальное	А.7, А.8	А.9, А.10	А.11, А.12	А.13, А.14	А.15, А.16	А.17, А.18	А.19, А.20
7	Логнормальное	А.7, А.8	А.9, А.10	А.11, А.12	А.13, А.14	А.15, А.16	А.17, А.18	А.19, А.20
8	Коши	А.7, А.8	А.9, А.10	А.11, А.12	А.13, А.14	А.15, А.16	А.17, А.18	А.19, А.20
9	Логистическое	А.7, А.8	А.9, А.10	А.11, А.12	А.13, А.14	А.15, А.16	А.17, А.18	А.19, А.20
10	Наибольшего значения	А.7, А.8	А.9, А.10	А.11, А.12	А.13, А.14	А.15, А.16	А.17, А.18	А.19, А.20
11	Наименьшего значения	А.7, А.8	А.9, А.10	А.11, А.12	А.13, А.14	А.15, А.16	А.17, А.18	А.19, А.20
12	Вейбулла	А.7, А.8	А.9, А.10	А.11, А.12	А.13, А.14	А.15, А.16	А.17, А.18	А.19, А.20
13	Sb-Джонсона	А.21	–	–	А.21	–	А.21	–
14	Sl-Джонсона	А.22	–	–	А.22	–	А.22	–
15	Su-Джонсона	А.23	–	–	А.23	–	А.23	–
16	Гамма-распределение	А.24	–	А.27, А.28	А.25	–	А.26	–
17	Обобщенное нормаль-е	А.29–А.37	–	–	А.29–А.37	–	А.29–А.37	–
18	Обратное гауссовское	А.38	–	–	А.39	–	А.40	–
19	Обобщенное Вейбулла	А.41–А.49	–	–	А.41–А.49	–	А.41–А.49	–
20	Бета-распределение I рода	А.50	–	–	А.51	–	А.52	–
21	Бета-распределение II рода	А.50	–	–	А.51	–	А.52	–
22	Бета-распределение III рода	А.50	–	–	А.51	–	А.52	–

Т а б л и ц а 4.3

Указание таблиц с моделями распределений статистик и процентными точками для критериев Купера и Ватсона при ОМП

№ п/п	Распределение случайной величины	Номера таблиц с моделями	
		Критерий Купера	Критерий Ватсона
1	Экспоненциальное	A.57	A.58
2	Полунормальное	A.57	A.58
3	Рэлея	A.57	A.58
4	Максвелла	A.57	A.58
5	Лапласа	A.57	A.58
6	Нормальное	A.57	A.58
7	Логнормальное	A.57	A.58
8	Коши	A.57	A.58
9	Логистическое	A.57	A.58
10	Наибольшего значения	A.57	A.58
11	Наименьшего значения	A.57	A.58
12	Вейбулла	A.57	A.58
13	Sb-Джонсона	A.59	A.59
14	Sl-Джонсона	A.60	A.60
15	Su-Джонсона	A.61	A.61

Для наиболее интересных для приложений параметрических законов распределения статистик непараметрических критериев согласия зависят от конкретных значений параметра или параметров этих законов. Очевидно, что заранее построить модели для распределений статистик критериев для любых комбинаций значений параметров нереально. Однако такие задачи могут решаться по мере поступления или моделирование распределения статистики и построение соответствующей приближенной модели могут осуществляться в интерактивном режиме, то есть в «реальном времени» проверки сложной гипотезы (см. раздел 5.3).

4.3. Примеры применения критериев согласия при простых и сложных гипотезах

Пример 4.1. Проверяют простую гипотезу о принадлежности выборки экспоненциальному закону. Упорядоченная выборка объемом 100 наблюдений имеет вид

0.0041	0.0051	0.0058	0.0074	0.0082
0.0110	0.0160	0.0191	0.0263	0.0279
0.0294	0.0323	0.0411	0.0452	0.0688
0.0741	0.0805	0.0809	0.1026	0.1124
0.1220	0.1226	0.1233	0.1317	0.1323
0.1368	0.1379	0.1475	0.1515	0.1598
0.1710	0.1789	0.2010	0.2014	0.2072
0.2102	0.2194	0.2205	0.2297	0.2300
0.2302	0.2373	0.2375	0.2397	0.2415
0.2492	0.2869	0.2908	0.2976	0.3058
0.3060	0.3073	0.3096	0.3278	0.3553
0.3620	0.3679	0.3833	0.3921	0.3985
0.4078	0.4080	0.4119	0.4169	0.4208
0.4568	0.4707	0.4880	0.4942	0.5214
0.5277	0.5878	0.6146	0.6180	0.6263
0.6415	0.6757	0.7156	0.7157	0.7207
0.7351	0.7485	0.7535	0.7541	0.7728
0.8875	0.9021	0.9581	0.9868	1.0440
1.2226	1.2402	1.2641	1.3034	1.3328
1.3553	1.4006	1.5586	1.6296	2.5018

Проверяемая гипотеза имеет вид

$$H_0\ :\ f(x) = \frac{1}{\theta_0} e^{-x/\theta_0}$$

при значении параметра $\theta_0 = 0.5$.

а) *Критерий Колмогорова*

В соответствии с разд. 2.8.2 вычисляют значение статистики Колмогорова по формуле (2.3): $S_K^* = 0.8269$. При этом значении статистики вычисляют вероятность $P\left\{S > S_K^*\right\} = 1 - K\left(S_K^*\right)$ = 0.5011 (p-value).

б) *Критерий Смирнова*

В соответствии с разд. 2.8.3 вычисляют значение статистики Смирнова по формуле (2.9): S_m^* = 2.7349. При этом значении статистики вычисляют вероятность $P\left\{S_m > S_m^*\right\} = e^{-S_m^*/2}$ = 0.2548.

в) *Критерий* ω^2 *Крамера–Мизеса–Смирнова*

В соответствии с разд. 2.8.4 вычисляют значение статистики ω^2 Крамера–Мизеса–Смирнова по формуле (2.13): S_ω^* = 0.1272. При этом значении статистики вычисляют вероятность $P\left\{S_\omega > S_\omega^*\right\} = 1 - a1\left(S_\omega^*\right)$ = = 0.4673.

г) *Критерий* Ω^2 *Андерсона–Дарлинга*

В соответствии с разд. 2.8.5 вычисляют значение статистики Ω^2 Андерсона–Дарлинга по формуле (2.16): $S_\Omega^* = 0.8985$. При таком значении статистики вычисляют вероятность $P\left\{S_\Omega > S_\Omega^*\right\} = 1 - a2\left(S_\Omega^*\right) =$ $= 0.4151$.

Как видно, при задании уровня значимости α < 0.2548 (для критерия Смирнова) нет оснований для отклонения проверяемой гипотезы по всем критериям согласия.

Пример 4.2. Проверяют сложную гипотезу о принадлежности выборки из примера 4.1 экспоненциальному закону

$$H_0 \ : \ f(x) \in \left\{ \frac{1}{\theta_0} e^{-x/\theta_0}, \theta_0 \in (0, \infty) \right\}.$$

Вычисленная по выборке оценка максимального правдоподобия параметра $\hat{\theta}_0$ = 0.4465.

а) *Критерий Колмогорова*

В соответствии с разд. 4.1. вычисляют значение статистики Колмогорова по формуле (2.3): $S_K^* = 0.5188$. Из табл. А.7 находят, что распределение статистики критерия хорошо аппроксимируется гамма-распределением с плотностью

$$f(x) = \frac{1}{\theta_1^{\theta_0}\Gamma(\theta_0)}\left(x-\theta_2\right)^{\theta_0-1} e^{-\left(x-\theta_2\right)/\theta_1}$$

с параметрами $\theta_0 = 5.1092$; $\theta_1 = 0.0861$; $\theta_2 = 0.295$. При найденном значении статистики в соответствии с гамма-распределением вычисляют вероятность $P\left\{S > S_K^*\right\}$ = 0.8884.

б) *Критерий Смирнова*

В соответствии с разд. 4.1. вычисляют значение статистики Смирнова по формуле (2.9): $S_m^* = 1.0767$. Из табл. А.11 видно, что распределение статистики критерия аппроксимируется логарифмически нормальным распределением с параметрами $\theta_0 = 0.6951$; $\theta_1 = 0.226$. При найденном значении статистики вычисляют вероятность $P\left\{S_m > S_m^*\right\}$ = 0.5866.

в) *Критерий* ω^2 *Крамера–Мизеса–Смирнова*

В соответствии с разд. 4.1. вычисляют значение статистики ω^2 Крамера–Мизеса–Смирнова по формуле (2.13): S_ω^* = 0.035. Из табл. А.13 видно, что распределение статистики критерия аппроксимируется распределением Sb-Джонсона с плотностью

$$f(x) = \frac{\theta_1\theta_2}{\sqrt{2\pi}(x-\theta_3)(\theta_2+\theta_3-x)} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\theta_0 - \theta_1 \ln\frac{x-\theta_3}{\theta_2+\theta_3-x}\right]^2\right\}$$

и параметрами θ_0 = 3.3738; θ_1 = 1.2145; θ_2 = 1.0792; θ_3 = 0.0110. При найденном значении статистики по распределению Sb-Джонсона вычисляют вероятность $P\left\{S_\omega > S_\omega^*\right\}$ = 0.8890.

г) *Критерий* Ω^2 *Андерсона–Дарлинга*

В соответствии с разд. 4.1. вычисляют значение статистики Ω^2 Андерсона–Дарлинга по формуле (2.16): S_Ω^* = 0.386. Из табл. А.17 находят, что распределение статистики критерия аппроксимируется распределением Sb-Джонсона с параметрами θ_0 = 3.8386; θ_1 = 1.3429;

θ_2 = 7.5; θ_3 = 0.09. При найденном значении статистики по распределению Sb-Джонсона вычисляют вероятность $P\left\{S_\Omega > S_\Omega^*\right\}$ = 0.6729.

По всем критериям согласие выборки с экспоненциальным законом очень хорошее.

Пример 4.3. Проверяют простую гипотезу о принадлежности выборки нормальному закону. Упорядоченная выборка объемом 100 наблюдений имеет вид

–0.6679	–0.4652	0.0056	0.0078	0.0167
0.0362	0.1189	0.1556	0.1831	0.2037
0.2829	0.2852	0.3388	0.4264	0.4733
0.4999	0.5093	0.5181	0.5227	0.5281
0.5506	0.5679	0.5849	0.5872	0.6027
0.6052	0.6124	0.6342	0.6616	0.6669
0.6712	0.7245	0.7386	0.7567	0.7992
0.8045	0.8083	0.8151	0.8216	0.8422
0.8472	0.8502	0.8678	0.8699	0.8902
0.8918	0.9037	0.9443	0.9529	0.9535
0.9548	0.9557	0.9632	0.9767	0.9956
0.9992	1.0233	1.0257	1.0574	1.0621
1.0658	1.0706	1.0724	1.1059	1.1172
1.1447	1.1500	1.1595	1.1836	1.1875
1.1887	1.2143	1.2360	1.2589	1.2754
1.2998	1.3192	1.3288	1.3587	1.3818
1.3998	1.4088	1.4314	1.4337	1.4822
1.4832	1.4958	1.4968	1.5213	1.5249
1.5896	1.6087	1.6425	1.6554	1.6687
1.8223	1.8569	1.8886	2.0460	2.2956

Проверяемая гипотеза имеет вид

$$H_0 \;:\; f(x) = \frac{1}{\theta_0\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\theta_1)^2}{2\theta_0^2}}$$

при значении параметра $\theta_0 = 0.5$; θ_1 = 1.

а) *Критерий Колмогорова*

Вычисляют значение статистики Колмогорова по формуле (2.3): $S_K^* = 0.7410$. При этом значении статистики вычисляют вероятность $P\left\{S > S_K^*\right\} = 1 - K\left(S_K^*\right)$ = 0.6423.

б) *Критерий Смирнова*

Вычисляют значение статистики Смирнова по формуле (2.9): $S_m^* = 2.1964$. При этом значении статистики вычисляют вероятность $P\left\{S_m > S_m^*\right\} = e^{-S_m^*/2}$ = 0.3335.

в) К*ритерий* ω^2 *Крамера–Мизеса–Смирнова*

Вычисляют значение статистики ω^2 Крамера–Мизеса–Смирнова по формуле (2.13): $S_\omega^* = 0.1148$. При этом значении статистики вычисляют вероятность $P\left\{S_\omega > S_\omega^*\right\} = 1 - a1\left(S_\omega^*\right)$ = 0.5169.

г) *Критерий* Ω^2 *Андерсона–Дарлинга*

Вычисляют значение статистики Ω^2 Андерсона–Дарлинга по формуле (2.16): $S_\Omega^* = 0.7577$. При таком значении статистики вычисляют вероятность $P\left\{S_\Omega > S_\Omega^*\right\}$ = 0.5126.

Как видно, при задании уровня значимости α < 0.3335 (для критерия Смирнова) нет оснований для отклонения проверяемой гипотезы по всем критериям согласия.

Пример 4.4. Проверяют сложную гипотезу о принадлежности выборки из примера 4.3 нормальному закону распределения. Проверяемая гипотеза имеет вид

$$H_0 \; : \; f(x) \in \left\{ \frac{1}{\theta_0 \sqrt{2\pi}} e^{-(x-\theta_1)^2 / 2\theta_0^2}, \;\; \theta_0 \in (0, \infty), \;\; \theta_1 \in (-\infty, \infty) \right\} .$$

Вычисленные по выборке оценки максимального правдоподобия параметров $\hat{\theta}_0 = 0.5183$; $\hat{\theta}_1 = 0.9369$.

а) *Критерий Колмогорова*

В соответствии с разд. 4.1 вычисляют значение статистики Колмогорова по формуле (2.3): $S_K^* = 0.5692$. Из табл. А.7 находят, что распределение статистики критерия при вычислении оценок максимального правдоподобия двух параметров нормального закона аппроксимируется гамма-распределением

$$f(x) = \frac{1}{\theta_1^{\theta_0}\Gamma(\theta_0)}\left(x-\theta_2\right)^{\theta_0-1} e^{-\left(x-\theta_2\right)/\theta_1}$$

с параметрами θ_0 = 6.4721; θ_1 = 0.0580; θ_2 = 0.262. При найденном значении статистики по гамма-распределению вычисляют вероятность $P\left\{S > S_K^*\right\}$ = 0.6406.

б) *Критерий Смирнова*

Вычисляют значение статистики Смирнова по формуле (2.9): $S_m^* = 0.3753$. Из табл. А.11 видно, что распределение статистики критерия при вычислении ОМП двух параметров нормального закона подчиняется логарифмически нормальному распределению с параметрами $\theta_0 = 0.5436$; $\theta_1 = 0.1164$. При найденном значении статистики вычисляют по логарифмически нормальному закону вероятность $P\left\{S_m > S_m^*\right\}$ = 0.9781.

в) *Критерий* ω^2 *Крамера–Мизеса–Смирнова*

Вычисляют значение статистики ω^2 Крамера–Мизеса–Смирнова по формуле (2.13): $S_\omega^* = 0.0323$. Из табл. А.13 находят, что распределение статистики критерия при вычислении ОМП двух параметров нормального закона подчиняется бета-распределению III рода с параметрами θ_0 = 4.1153; θ_1 = 4.1748; θ_2 = 11.035; θ_3 = 0.5116; θ_4 = 0.009. При найденном значении статистики вычисляют по бета-распределению III рода вероятность $P\left\{S_\omega > S_\omega^*\right\}$ = 0.8065.

г) *Критерий* Ω^2 *Андерсона–Дарлинга*

Вычисляют значение статистики Ω^2 Андерсона–Дарлинга по формуле (2.16): $S_\Omega^* = 0.2319$. Из табл. А.17 находят, что распределение статистики критерия подчиняется бета-распределению III рода с параметрами θ_0 = 4.7262; θ_1 = 4.6575; θ_2 = 9.4958;

θ_3 = 2.717; θ_4 = 0.0775. При найденном значении статистики по бета-распределению III рода вычисляют вероятность $P\left\{S_\Omega > S_\Omega^*\right\}$ = 0.8026.

По всем критериям согласие выборки с нормальным законом очень хорошее.

Пример 4.5. Проверяют сложную гипотезу о принадлежности выборки двухпараметрическому распределению Вейбулла. Упорядоченная выборка объемом 200 наблюдений имеет вид

0.0999	0.1089	0.1134	0.1160	0.1242
0.1332	0.1356	0.1442	0.1575	0.1819
0.1853	0.1922	0.2071	0.2141	0.2184
0.2244	0.2475	0.2485	0.2551	0.2572
0.2634	0.2642	0.2647	0.2659	0.2668
0.2726	0.2768	0.2796	0.2824	0.2844
0.2858	0.2897	0.2918	0.2957	0.3090
0.3151	0.3151	0.3152	0.3181	0.3187
0.3208	0.3241	0.3305	0.3380	0.3396
0.3398	0.3405	0.3417	0.3441	0.3533
0.3547	0.3548	0.3663	0.3671	0.3734
0.3781	0.3870	0.3918	0.3940	0.3980
0.3988	0.4032	0.4070	0.4110	0.4219
0.4234	0.4236	0.4257	0.4282	0.4305
0.4320	0.4535	0.4599	0.4611	0.4632
0.4739	0.4821	0.4862	0.4885	0.4899
0.5089	0.5106	0.5285	0.5338	0.5361
0.5374	0.5399	0.5505	0.5537	0.5685
0.5716	0.5717	0.5730	0.5821	0.5834
0.5999	0.6010	0.6054	0.6097	0.6120
0.6142	0.6151	0.6252	0.6259	0.6315
0.6354	0.6377	0.6423	0.6520	0.6553
0.6758	0.6853	0.6862	0.6943	0.6987
0.7095	0.7114	0.7140	0.7157	0.7355
0.7479	0.7624	0.7738	0.7748	0.7820
0.7849	0.7915	0.8013	0.8099	0.8111
0.8184	0.8234	0.8250	0.8260	0.8284
0.8295	0.8473	0.8478	0.8480	0.8493
0.8620	0.8706	0.8713	0.8834	0.8846
0.9073	0.9076	0.9128	0.9272	0.9500
0.9589	0.9608	0.9890	0.9922	1.0176
1.0184	1.0287	1.0368	1.0533	1.0538
1.1193	1.1245	1.1245	1.1346	1.1399
1.1485	1.1574	1.1591	1.1669	1.1701
1.2342	1.2618	1.2679	1.3034	1.3503
1.4257	1.4258	1.4501	1.4617	1.4632
1.4785	1.5091	1.5188	1.5752	1.6154
1.6333	1.6355	1.7139	1.7503	1.7684
1.9291	2.0316	2.0937	2.0948	2.3901
2.5209	2.8097	3.0380	3.0530	6.1251

Проверяют

$$H_0 .: \; f(x) \in \left\{ \frac{\theta_0 x^{\theta_0 - 1}}{\theta_1^{\theta_0}} \exp\left\{ -\left(x/\theta_1 \right)^{\theta_0} \right\}, \; \theta_0 \in (0, \infty), \; \theta_1 \in (0, \infty) \right\}.$$

Вычисленные по выборке оценки максимального правдоподобия параметров $\hat{\theta}_0 = 1.3734$; $\hat{\theta}_1 = 0.8539$.

а) *Критерий Колмогорова*

Вычисляют значение статистики Колмогорова по формуле (2.3): $S_K^* = 1.2402$. Из таблицы А.7 находят, что распределение статистики критерия при вычислении оценок максимального правдоподобия двух параметров распределения Вейбулла аппроксимируется гамма-распределением с параметрами θ_0 = 6.6012; θ_1 = 0.0563; θ_2 = 0.2598. При найденном значении статистики в соответствии с гамма-распределением вычисляют вероятность $P\left\{ S > S_K^* \right\}$ = 0.001. Следовательно, при задании уровня значимости $\alpha > 0.001$ проверяемая гипотеза должна быть отклонена.

б) *Критерий Смирнова*

Вычисляют значение статистики Смирнова по формуле (2.9): $S_m^* = 4.6028$. Из табл. А.11 находят, что распределение статистики критерия при вычислении ОМП двух параметров распределения Вейбулла подчиняется логарифмически нормальному распределению с параметрами $\theta_0 = 0.1501$; $\theta_1 = 0.5108$. При найденном значении статистики вычисляют в соответствии с логарифмически нормальным законом вероятность $P\left\{ S_m > S_m^* \right\}$ = 0.00352.

в) *Критерий* ω^2 *Крамера–Мизеса–Смирнова*

Вычисляют значение статистики ω^2 Крамера–Мизеса–Смирнова по формуле (2.13): $S_\omega^* = 0.347$. Из табл. А.13 находят, что распределение статистики критерия при вычислении ОМП двух параметров распределения Вейбулла подчиняется распределению Sb-

Джонсона с параметрами θ_0 = 3.3854; θ_1 = 1.4453; θ_2 = 0.4986; θ_3 = 0.0070. При найденном значении статистики по распределению Sb-Джонсона вычисляют вероятность $P\left\{S_\omega > S_\omega^*\right\}$ = 0.000000.

г) *Критерий Ω^2 Андерсона–Дарлинга*

Вычисляют значение статистики Ω^2 Андерсона–Дарлинга по формуле (2.16): $S_\Omega^* = 2.553$. Из табл. А.17 находят, что при вычислении ОМП двух параметров распределения Вейбулла распределение статистики критерия хорошо аппроксимируется распределением Sb-Джонсона с параметрами θ_0 = 3.4830; θ_1 = 1.5138; θ_2 = 3.0000; θ_3 = 0.0700. При найденном значении статистики по распределению Sb-Джонсона вычисляют вероятность $P\left\{S_\Omega > S_\Omega^*\right\}$ = = 0.000000.

Таким образом, по всем критериям выборка плохо согласуется с распределением Вейбулла и проверяемая гипотеза должна быть отклонена.

Пример 4.6. Проверяют сложную гипотезу о принадлежности выборки гамма-распределению с параметром формы $\theta_0 = 2$, параметром сдвига $\theta_2 = 0$. Упорядоченная выборка объемом 100 наблюдений имеет вид

0.1006	0.2156	0.2311	0.2925	0.3410
0.3512	0.4028	0.5132	0.5340	0.5409
0.6100	0.6187	0.6204	0.6324	0.6559
0.6743	0.7131	0.7394	0.7779	0.7911
0.7919	0.8068	0.8117	0.8839	0.8996
0.9040	0.9167	0.9210	0.9441	0.9487
1.0274	1.0285	1.0316	1.1102	1.1249
1.1302	1.1497	1.2345	1.2530	1.2903
1.3136	1.3303	1.3360	1.3405	1.3804
1.4050	1.4117	1.4331	1.4617	1.4991
1.5852	1.6111	1.6175	1.6299	1.6798
1.7159	1.7287	1.7756	1.8505	1.8872
1.8928	1.9605	2.0299	2.1560	2.2548
2.2769	2.2901	2.3020	2.4111	2.4679
2.5302	2.5342	2.6717	2.6789	2.6797
2.8988	2.9230	2.9414	2.9558	3.0030
3.0531	3.1134	3.2002	3.2757	3.3716
3.4342	3.4632	3.5365	3.5753	3.7399
3.9758	4.1776	4.3462	4.3627	4.5000
4.5506	4.7544	4.7859	5.6662	8.2201

Проверяемая гипотеза имеет вид

$$H_0:\ f(x) \in \left\{ \frac{1}{\theta_1^{\theta_0}\Gamma(\theta_0)}(x-\theta_2)^{\theta_0-1} e^{-(x-\theta_2)/\theta_1}, \theta_0 = 2, \theta_1 \in (0,\infty), \theta_2 = 0 \right\}.$$

Вычисленная по выборке оценка максимального правдоподобия параметра масштаба $\hat{\theta}_1 = 1.02818$.

а) *Критерий Колмогорова*

В соответствии с разд. 4.1 вычисляют значение статистики Колмогорова по формуле (2.3): $S_K^* = 0.4917$. Из табл. А.24 находят, что распределение статистики критерия при вычислении ОМП масштабного параметра гамма-распределения подчиняется бета-распределению III рода с параметрами θ_0 = 5.8359; θ_1 = 22.6032; θ_2 = 2.1921; θ_3 = 4.00; θ_4 = 0.282. При найденном значении статистики по бета-распределению III рода вычисляют $P\left\{S > S_K^*\right\}$ = 0.9190. Следовательно, согласие очень хорошее и проверяемая гипотеза должна быть принята.

б) *Критерий Смирнова*

В соответствии с разд. 4.1 вычисляют значение статистики Смирнова по формуле (2.9): $S_m^* = 0.9419$. Из табл. А.27 находят, что распределение статистики критерия при вычислении ОМП параметра масштаба гамма-распределения подчиняется распределению Su-Джонсона с параметрами $\theta_0 = -2.5372$; $\theta_1 = 1.3749$; $\theta_2 = 0.3464$; $\theta_3 = 0.2162$. При найденном значении статистики по распределению Su-Джонсона вычисляют вероятность $P\left\{S_m > S_m^*\right\}$ = 0.6897, значение которой указывает на хорошее согласие.

в) *Критерий* ω^2 *Крамера–Мизеса–Смирнова*

В соответствии с разд. 4.1 вычисляют значение статистики ω^2 Крамера–Мизеса–Смирнова по формуле (2.13): $S_\omega^* = 0.0475$. Из табл. А.25 находят, что распределение статистики критерия при вычислении ОМП параметра масштаба гамма-распределения подчиняется бета-распределению третьего рода с параметрами θ_0 = 2.9463; θ_1 = 3.1124; θ_2 = 9.1160; θ_3 = 0.600; θ_4 = 0.013. При найденном значении статистики по бета-распределению третьего рода вычисляют $P\left\{S_\omega > S_\omega^*\right\}$ = 0.7309.

г) *Критерий Ω^2 Андерсона–Дарлинга*

В соответствии с разд. 4.1 вычисляют значение статистики Ω^2 Андерсона–Дарлинга по формуле (2.16): $S_\Omega^* = 0.2675$. Из табл. А.26 находят, что распределение статистики критерия при вычислении ОМП параметра масштаба гамма-распределения подчиняется бета-распределению III рода с параметрами θ_0 = 4.9479; θ_1 = 3.3747; θ_2 = 13.0426; θ_3 = 3.8304; θ_4 = 0.077. При найденном значении статистики по бета-распределению III рода вычисляют вероятность $P\{S_\Omega > S_\Omega^*\}$ = 0.8662.

Таким образом, по всем критериям выборка хорошо согласуется с гамма-распределением и проверяемая гипотеза должна быть принята.

Пример 4.7. Проверяют сложную гипотезу о принадлежности выборки гамма-распределению с параметром сдвига $\theta_2 = 0$. Упорядоченная выборка объемом 100 наблюдений имеет вид

0.0002	0.0004	0.0009	0.0019	0.0020
0.0025	0.0028	0.0030	0.0031	0.0040
0.0044	0.0054	0.0057	0.0068	0.0076
0.0081	0.0084	0.0090	0.0101	0.0119
0.0130	0.0162	0.0190	0.0201	0.0206
0.0237	0.0293	0.0312	0.0427	0.0431
0.0441	0.0452	0.0481	0.0492	0.0498
0.0517	0.0517	0.0552	0.0558	0.0638
0.0671	0.0714	0.0806	0.0815	0.0965
0.0987	0.1005	0.1055	0.1255	0.1307
0.1312	0.1324	0.1353	0.1411	0.1446
0.1524	0.1594	0.1678	0.1754	0.1767
0.1799	0.1838	0.1994	0.2116	0.2159
0.2162	0.2238	0.2242	0.2329	0.2545
0.2782	0.2900	0.2929	0.2967	0.3006
0.3084	0.3200	0.3262	0.3286	0.3473
0.3488	0.3608	0.3905	0.3961	0.4132
0.4294	0.4385	0.4557	0.4629	0.4699
0.5041	0.5096	0.6121	0.6146	0.6415
0.7359	0.9762	1.1460	1.1494	1.6170

Проверяемая гипотеза имеет вид

$$H_0 : f(x) \in \left\{ \frac{1}{\theta_1^{\theta_0}\Gamma(\theta_0)}(x-\theta_2)^{\theta_0-1} e^{-(x-\theta_2)/\theta_1}, \right.$$

$$\left. \theta_0 = \in (0,\infty),\ \theta_1 \in (0,\infty),\ \theta_2 = 0 \right\}.$$

Вычисленные по выборке ОМП параметров формы и масштаба соответственно равны $\hat{\theta}_0 = 0.5808$; $\hat{\theta}_1 = 0.3659$. В табл. А.24–А.28 ближайшее значение параметра формы $\theta_0 = 0.5$.

а) *Критерий Колмогорова*

В соответствии с разд. 4.1 вычисляют значение статистики Колмогорова по формуле (2.3): $S_K^* = 0.5579$. Из табл. А.24 находят, что распределение статистики критерия при вычислении ОМП параметров формы и масштаба гамма-распределения при $\theta_0 = 0.5$ подчиняется бета-распределению III рода с параметрами θ_0 = 6.4083; θ_1 = 5.9339; θ_2 = 3.2063; θ_3 = 1.4483; θ_4 = 0.2774. При найденном значении статистики по бета-распределению III рода вычисляют $P\left\{S > S_K^*\right\}$ = 0.7220. Так как оценка параметра формы больше 0.5, то при $\hat{\theta}_0 = 0.5808$ $P\left\{S > S_K^*\right\}$ > 0.7220. Следовательно, проверяемая гипотеза должна быть принята.

б) *Критерий Смирнова*

В соответствии с разд. 4.1 вычисляют значение статистики Смирнова по формуле (2.9): $S_m^* = 1.1493$. Из табл. А.27 находят, что распределение статистики критерия при вычислении ОМП параметров формы и масштаба гамма-распределения при $\theta_0 = 0.5$ подчиняется распределению Su-Джонсона с параметрами $\theta_0 = -2.4027$; $\theta_1 = 1.3861$; $\theta_2 = 0.3389$; $\theta_3 = 0.2290$. При найденном значении статистики по данному распределению Su-Джонсона определяют, что вероятность $P\left\{S_m > S_m^*\right\}$ > 0.5050.

в) *Критерий* ω^2 *Крамера–Мизеса–Смирнова*

В соответствии с разд. 4.1 вычисляют значение статистики ω^2 Крамера–Мизеса–Смирнова по формуле (2.13): $S_\omega^* = 0.0557$. Из табл. А.25 находят, что распределение статистики критерия при вычислении ОМП параметров формы и масштаба гамма-распределения при $\theta_0 = 0.5$ подчиняется бета-распределению III рода с параметрами $\theta_0 = 2.7216$; $\theta_1 = 3.9844$; $\theta_2 = 7.4993$; $\theta_3 = 0.5372$; $\theta_4 = 0.013$. При найденном значении статистики по бета-распределению III рода определяют, что вероятность $P\left\{S_\omega > S_\omega^*\right\} > 0.5060$.

г) *Критерий* Ω^2 *Андерсона–Дарлинга*

В соответствии с разд. 4.1 вычисляют значение статистики Ω^2 Андерсона–Дарлинга по формуле (2.16): $S_\Omega^* = 0.3730$. Из табл. А.26 находят, что распределение статистики критерия при вычислении ОМП параметров формы и масштаба гамма-распределения при $\theta_0 = 0.5$ подчиняется бета-распределению III рода с параметрами $\theta_0 = 5.0079$; $\theta_1 = 4.056$; $\theta_2 = 10.0292$; $\theta_3 = 2.5872$; $\theta_4 = 0.073$. При найденном значении статистики по бета-распределению III рода определяют, что вероятность $P\left\{S_\Omega > S_\Omega^*\right\} > 0.4727$.

Таким образом, по всем критериям выборка хорошо согласуется с гамма-распределением и проверяемая гипотеза не отклоняется.

Пример 4.8. Как и в примере 4.4. необходимо проверить сложную гипотезу о принадлежности выборки из примера 4.3 нормальному закону распределения по критериям Купера и Ватсона. Проверяемая гипотеза имеет вид

$$H_0 : f(x) \in \left\{ \frac{1}{\theta_0\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\theta_1)^2 / 2\theta_0^2}, \ \ \theta_0 \in (0, \infty), \ \ \theta_1 \in (-\infty, \infty) \right\}.$$

Полученные по выборке оценки максимального правдоподобия параметров $\hat{\theta}_0 = 0.5183$; $\hat{\theta}_1 = 0.9369$.

а) *Критерий Купера*

В соответствии с разд. 4.1 вычисляют значение статистики Купера по формуле (2.21): $V_n^{mod^*}$ =0.8755. Из табл. А.57 находят, что распределение статистики критерия при вычислении ОМП двух параметров нормального закона подчиняется бета-распределению III рода с параметрами θ_0 = 7.4917; θ_1 = 8.0016; θ_2 = 2.4595; θ_3 = 2.1431; θ_4 = 0.4937.

При найденном значении статистики по бета-распределению III рода вычисляют вероятность $P\left\{V_n^{mod} > V_n^{mod^*}\right\}$ =0.8586.

б) *Критерий Ватсона*

Вычисляют значение статистики критерия Ватсона по формуле (2.23): $U_n^{2^*}$ =0.02851. Из табл. А.58 находят, что распределение статистики критерия при вычислении ОМП двух параметров нормального закона подчиняется бета-распределению III рода с параметрами θ_0 = 3.5230; θ_1 = 4.4077; θ_2 = 9.2281; θ_3 = 0.4785; θ_4 = 0.0104.

При найденном значении статистики вычисляют по бета-распределению III рода вероятность $P\left\{U_n^2 > U_n^{2^*}\right\}$ =0.8451.

Как и в примере 4.4 согласие по обоим применяемым критериям очень хорошее.

Пример 4.9. По выборке, представленной в примере 4.3, проверяют простую гипотезу о принадлежности выборки нормальному закону по критериям Жанга. Проверяемая гипотеза имеет вид

$$H_0 \; : \; f(x) = \frac{1}{\theta_0\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\theta_1)^2}{2\theta_0^2}}$$

при значении параметра $\theta_0 = 0.5$; θ_1 = 1.

а) *Критерий Z_A Жанга*

Вычисляют значение статистики Z_A Жанга по формуле (2.28): Z_A^*=3.3413. По таблице А.63 определяем, что величина

$10Z_A^* - 32$ =1.413 для $n = 100$ лежит между 1.361 и 1.445. Следовательно, достигаемый уровень значимости $P\left\{Z_A > Z_A^*\right\} \approx 0.45$. Более точная оценка достигаемого уровня значимости при найденном значении статистики, полученная в результате использования интерактивного режима методики компьютерного моделирования (см. разделы 5.2 и 5.3) с применением системы [105] при числе моделируемых значений статистик $N = 10^5$, $P\left\{Z_A > Z_A^*\right\}$ =0.437.

б) *Критерий Z_C Жанга*

Вычисляют значение статистики Z_C Жанга по формуле (2.29): Z_C^* =13.867. По таблице А.64 определяем, что величина Z_C^* для $n = 100$ лежит между 13.79 и 15.84. Следовательно, достигаемый уровень значимости $P\left\{Z_C > Z_C^*\right\} \approx 0.39$. Более точная оценка достигаемого уровня значимости, полученная в результате моделирования $P\left\{Z_C > Z_C^*\right\}$ =0.396.

в) *Критерий Z_K Жанга*

Вычисляют значение статистики Z_K Жанга по формуле (2.29): Z_K^* =1.9508. По таблице А.62 определяем, что величина Z_K^* для $n = 100$ лежит левее 1.998. Следовательно, достигаемый уровень значимости $P\left\{Z_C > Z_C^*\right\}$ >0.5. Оценка достигаемого уровня значимости, полученная в результате моделирования $P\left\{Z_K > Z_K^*\right\}$ =0.520.

Пример 4.10. По выборке, представленной в примере 4.3, по критериям Жанга проверяют сложную гипотезу о принадлежности выборки нормальному закону.

Полученные по выборке оценки максимального правдоподобия параметров $\hat{\theta}_0 = 0.5183$; $\hat{\theta}_1 = 0.9369$. В данном случае распределения статистик Z_A, Z_C и Z_K при справедливости проверяемой сложной гипотезы *неизвестны*, поэтому достигаемые уровни значимости находятся с использованием интерактивного режима методики компьютерного моделирования [105] при числе моделируемых значений статистик $N = 10^5$.

а) *Критерий* Z_A *Жанга*

Вычисляют значение статистики Z_A Жанга по формуле (2.28): Z_A^* =3.3072. При найденном значении статистики оценка достигаемого уровня значимости $P\left\{Z_A > Z_A^*\right\}$ =0.604.

б) *Критерий* Z_C *Жанга*

Вычисляют значение статистики Z_C Жанга по формуле (2.29): Z_C^* =4.9020. При найденном значении статистики оценка достигаемого уровня значимости $P\left\{Z_C > Z_C^*\right\}$ =0.779.

в) *Критерий* Z_K *Жанга*

Вычисляют значение статистики Z_K Жанга по формуле (2.29): Z_K^* =1.0694. При найденном значении статистики оценка достигаемого уровня значимости $P\left\{Z_K > Z_K^*\right\}$ =0.487.

Оценки достигаемых уровней значимости, соответствующие вычисленным значениям статистик, хорошо согласуются с результатами автора критериев, полученными для распределений статистик для случая проверки сложных гипотез о согласии с нормальным законом [58].

Пример 4.11. Как и в примере 4.7 по той же выборке необходимо проверить сложную гипотезу о принадлежности выборки гамма-распределению с параметром сдвига $\theta_2 = 0$. Проверяемая гипотеза имеет вид

$$H_0 \;:\; f(x) \in \left\{ \frac{1}{\theta_1^{\theta_0}\Gamma(\theta_0)} (x-\theta_2)^{\theta_0 - 1} e^{-(x-\theta_2)/\theta_1}, \right.$$

$$\left.\theta_0 = \in (0,\infty),\ \ \theta_1 \in (0,\infty),\ \ \theta_2 = 0 \right\}.$$

Вычисленные по выборке ОМП параметров формы и масштаба равны $\hat{\theta}_0 = 0.5808$; $\hat{\theta}_1 = 0.3659$.

Проверка осуществляется по критериям Купера, Ватсона и Жанга со статистиками Z_A, Z_C и Z_K. В данном случае распределения статистик при справедливости проверяемой сложной гипотезы *неизвестны и зависят от значений параметра формы*. Поэтому оценки достигаемых уровней значимости по критериям получены в результате использования интерактивного режима методики компьютерного моделирования (см. разделы 5.2 и 5.3) с применением системы [105] при числе моделируемых значений статистик $N = 2 \times 10^4$.

а) *Критерий Купера*

Вычисляют значение статистики Купера по формуле (2.21): $V_n^{mod^*}$ =1.0939. При найденном значении статистики оценка достигаемого уровня значимости $P\left\{V_n^{mod} > V_n^{mod^*}\right\}$ =0.502.

б) *Критерий Ватсона*

Вычисляют значение статистики критерия Ватсона по формуле (2.23): $U_n^{2^*}$ =0.05507. При найденном значении статистики оценка достигаемого уровня значимости $P\left\{U_n^2 > U_n^{2^*}\right\}$ =0.414.

в) *Критерий Z_A Жанга*

Вычисляют значение статистики Z_A Жанга по формуле (2.28): Z_A^*=3.307. При найденном значении статистики оценка достигаемого уровня значимости $P\left\{Z_A > Z_A^*\right\}$ =0.602.

г) *Критерий Z_C Жанга*

Вычисляют значение статистики Z_C Жанга по формуле (2.29): Z_C^* =6.6536. При найденном значении статистики оценка достигаемого уровня значимости $P\left\{Z_C > Z_C^*\right\}$ =0.540.

д) *Критерий* Z_K *Жанга*

Вычисляют значение статистики Z_K Жанга по формуле (2.29): Z_K^* =0.8504. При найденном значении статистики оценка достигаемого уровня значимости $P\left\{Z_K > Z_K^*\right\}$ =0.685.

4.4. Некоторые замечания к применению

4.4.1. О мощности критериев

В публикациях достаточно часто можно встретить упоминания о сравнительном анализе мощности различных критериев согласия. При этом результаты чаще всего бывают связаны с проверкой простых гипотез. Обычным недостатком такого анализа является “случайный” выбор в качестве конкурирующих таких законов, которые достаточно сильно отличаются от закона, соответствующего проверяемой гипотезе H_0. Очевидно, что более важна способность критериев различать близкие конкурирующие законы, то есть более высокая мощность критериев по отношению к близким конкурирующим гипотезам.

При проверке сложных гипотез на распределения статистик непараметрических критериев согласия при справедливости проверяемой гипотезы H_0 влияет ряд факторов, в том числе метод оценивания параметров закона, соответствующего гипотезе H_0. Естественно, что те же факторы влияют на распределения статистик критериев при справедливости конкурирующей гипотезы H_1, а, следовательно, и на мощность критерия.

Как правило, мощность непараметрических критериев оказывается выше при использовании для оценивания параметров метода максимального правдоподобия (по крайней мере, по сравнению с *MD*-оценками). Именно поэтому в работах [25, 24, 39, 79, 83, 84] критерии сравнивались, в основном, при использовании ОМП. Результаты этого анализа позволяют упорядочить рассматриваемые непараметрические критерии Колмогорова (K), Крамера-Мизеса-Смирнова (KMS), Андерсона-Дарлинга (AD), Купера (V_n), Ватсона (U_n^2), Жанга (Z_C, Z_A и Z_K) по мощности следующим образом:

– при проверке простых гипотез –

$$Z_C \succ Z_A \succ Z_K \succ U_n^2 \succ V_n \succ AD \succ KMS \succ\approx K\ ;$$

– при проверке сложных гипотез –

$$Z_A \succ\approx Z_C \succ Z_K \approx AD \succ KMS \succ U_n^2 \succ V_n \succ K\ .$$

Мощность непараметрических критериев при проверке сложных гипотез при тех же объемах выборок n всегда существенно выше, чем при проверке простых.

В случае простых гипотез и при близких конкурирующих гипотезах непараметрические критерии согласия (Колмогорова, Крамера-Мизеса-Смирнова и Андерсона-Дарлинга) уступают по мощности критериям типа χ^2. Если сравнить мощность непараметрических критериев с мощностью критериев типа χ^2, то при проверке простых гипотез [25, 83] критерий χ^2 Пирсона оказывается на третьей позиции при условии использования асимптотически оптимального группирования [96] и выбора числа интервалов, при котором критерий будет иметь максимальную мощность [96, 100].

При проверке сложных гипотез – преимущество за непараметрическими критериями согласия. Но в случае проверки сложных гипотез [24, 84] позиции критериев типа χ^2 Никулина-Рао-Робсона [108, 109, 50] и χ^2 Пирсона ухудшаются: они оказываются соответственно на 7-й – 8-й позициях в общем ряду критериев по убыванию мощности. Однако следует заметить, что мощность критериев типа χ^2 можно максимизировать относительно заданной конкурирующей гипотезы за счет оптимального выбора границ и числа интервалов группирования [96, 100].

Рассматриваемые в данном руководстве критерии достаточно сильно отличаются по мощности, особенно это заметно при малых объемах выборок. В то же время рекомендовать останавливаться при проверке гипотез на использовании только какого-то одного из критериев согласия нельзя. Статистики критериев представляют собой различные меры, которые по-разному улавливают различные отклонения эмпирического распределения от теоретического. А в совокупности они дают достаточно полную картину о величине этого отклонения.

И конечно следует иметь в виду, что различать близкие гипотезы (особенно простые) при малых объемах выборок с помощью непараметрических критериев согласия весьма проблематично вследствие невысокой мощности критериев и, следовательно, больших вероятностей ошибок 2-го рода.

4.4.2. О типичных ошибках применения

Несколько слов об ошибках применения непараметрических критериев согласия на основании анализа литературных источников. Большинство ошибок, приводящих к некорректным выводам, связано с полным пренебрежением к тому, что, оценивая по выборке параметры, оказываешься в условиях проверки сложной гипотезы.

В тех редких случаях, когда исследователь понимает, что нельзя пользоваться классическими результатами, осуществляя проверку сложной гипотезы, ошибки бывают связаны с тем, что не учитывается многообразие факторов, влияющих на распределение статистики критерия согласия. Обычно не учитывается, что распределения статистик зависят от метода оценивания.

Применение при проверке сложных гипотез моделей распределений статистик критериев согласия, представленных в приложении **А**, правомерно при использовании ОМП или *MD*-оценок соответственно.

Поэтому, например, некорректно использовать таблицы приложения **А,** предназначенные для случая ОМП, когда оценки вычисляются по методу моментов (за исключением тех ситуаций, когда оценки по методу моментов совпадают с ОМП).

Некорректно использование таблиц приложения **А**, если различные оценки строятся по наблюдениям, сгруппированным в интервалы.

При выборе методов анализа следует учитывать точность регистрации наблюдений, иначе это может приводить к недоразумениям при статистических выводах. При анализе экспериментальных наблюдений мы чаще имеем дело с недостаточными объемами выборок. Однако в некоторых случаях, например при автоматизированном контроле различных показателей, выборки могут быть практически любого объема. Но при этом измерения снимаются с ограниченной точностью. В результате в накапливаемой выборке наблюдения принимают ограниченное число значений: выборка оказывается поразрядно группированной, а соответствующее эмпирическое распределение $F_n(x)$ сохраняет ступенчатый вид при любом объеме выборки. Поэтому меры отклонения $F_n(x)$ от $F(x, \theta)$, используемые в непараметрических критериях согласия, несмотря на возможное соответствие наблюдаемого закона теоретическому, с ростом объема выборок только растут. В такой ситуации проверка гипотезы о принадлежности контролируемой величины, например, нормальному закону неизбежно приводит к отклонению проверяемой гипотезы. И это при том, что к контролируемому процессу претензий может не быть. Точность регистрации наблюдений следует учитывать и при выборе метода оценивания параметров, и при выборе критерия проверки гипотез. В подобной ситуации целесообразней воспользоваться критериями типа χ^2.

Таким образом, применяя непараметрические критерии согласия, следует очень внимательно относиться к тому, какую гипотезу вы проверяете: простую или сложную. Если сложную, то надо внимательно учесть факторы, влияющие на «сложность» гипотезы (вид закона $F(x, \theta)$, метод оценивания, тип оцениваемых параметров, их количество, значение оценки параметра), и использовать при проверке гипотезы соответствующую модель распределения статистики применяемого критерия (из приложения **А** или других источников).

В то же время распределения статистик непараметрических критериев согласия при простых и сложных гипотезах с ростом n быстро сходятся к предельным законам. Уже при $n \geq 20$, не опасаясь больших ошибок, можно пользоваться этими предельными законами для вычисления достигаемого уровня значимости $P\{S > S^*\}$. Но при меньших объемах выборок следует быть осторожным, так как отличие действительного распределения статистики от предельного может повлиять на принятие верного решения о результатах проверки.

5. О решении проблем проверки сложных гипотез

5.1. Развитие ситуации

Точкой отсчета, с которой были начаты исследования предельных распределений статистик непараметрических критериев согласия при сложных гипотезах, послужила работа [17], в которой было показано, что в данной ситуации непараметрические критерии согласия теряют своё замечательно свойство “свободы от распределения”.

Последовательно предлагался ряд подходов к использованию непараметрических критериев согласия в этом случае. При достаточно большой выборке ее можно разбить на две части и по одной из них оценивать параметры, а по другой – проверять согласие. В случае больших объемов выборки такой прием оправдан [11]. Но если объем выборки относительно невелик, то способ разбиения ее на две части будет отражаться и на оценках параметров, и на распределениях статистик критериев согласия.

В дальнейшем для решения данной проблемы использовались различные подходы: предельные распределения статистик исследовались аналитическими и численными методами [9, 10, 44, 45, 12, 13, 14, 47, 106, 107]. Для случая принадлежности выборки нормальному закону предельные распределения статистики критерия ω^2 Крамера-Мизеса-Смирнова при использовании оценок максимального правдоподобия для оценивания одного или обоих параметров закона были исследованы в [106] аналитическими методами.

В некоторых частных случаях проверки сложных гипотез, например при оценивании параметров распределений экспоненциального, нормального, экстремальных значений, Вейбулла и некоторых других законов, таблицы процентных точек для предельных распределений статистик непараметрических критериев были получены с использованием методов статистического моделирования [48, 52, 53, 7, 8]. По-видимому, первыми работами, в которых метод Монте-Карло и компьютерное моделирование показали себя эффективным средством развития прикладной математической статистики, были работы [44, 45], где были построены процентные точки для статистики критерия Колмогорова (без поправки Большева) при проверке сложных гипотез относительно нормального закона.

В [113, 114, 115, 116, 117] для статистик типа Колмогорова–Смирнова и некоторых законов, соответствующих гипотезе H_0, были получены формулы для приближенного вычисления достигнутого уровня значимости $P\{S > S^*\}$, где S^* – вычисленное по выборке значение соответствующей статистики S. Полученные формулы дают достаточно хорошие приближения при малых значениях соответствующих вероятностей.

В [94, 92, 43, 37, 91, 81, 104] в результате компьютерного моделирования распределений статистик непараметрических критериев для ряда законов, соответствующих гипотезе H_0, найдены аналитически простые модели, которые хорошо аппроксимируют предельные распределения статистик непараметрических критериев согласия в случае проверки сложных гипотез и оценивания по выборке параметров методом максимального правдоподобия. В [82, 90] методами статистического моделирования исследовано влияние на распределения статистик непараметрических критериев согласия при простых и сложных гипотезах объема наблюдаемой выборки и применяемого метода оценивания параметров. В [90, 37] получены аналитически простые модели предельных распределений статистик непараметрических критериев для случая, когда при проверке сложных гипотез оценки параметров находятся в результате минимизации статистики используемого критерия. При подготовке настоящего руководства эти результаты были уточнены.

После ввода в действие рекомендаций по стандартизации [111] результаты, составившие их основу, были уточнены и подверглись существенному расширению [85, 36, 35, 29, 26, 31, 33, 34, 75, 76, 32, 77, 1, 96, 81, 104]. Поэтому настоящее руководство опирается на совокупность всех последующих результатов и призвано полностью заменить действующие рекомендации по стандартизации [111].

Естественно, что данное руководство охватывает далеко не полный перечень законов распределения, применяемых в прикладных исследованиях. В конкретных задачах для описания наблюдаемых случайных величин могут использоваться специфические модели законов распределений. Естественно, что возникает необходимость проверки адекватности таких моделей. Для проверки адекватности с использованием критериев согласия необходимо знать условные распределения статистик $G(S|H_0)$. Очень проблематично, чтобы необходимые $G(S|H_0)$ были найдены аналитически (из-за сложности решения таких задач аналитическими методами и множества задач такого рода). Действительно, даже в случае ряда законов из включенных в руководство, при проверке сложных гипотез о согласии с которыми распределения статистик непараметрических критериев зависят от конкретных значений параметров формы, имеются проблемы применения критериев, так как значения оценок этих параметров (с вероятностью 1) не будут целыми, а, следовательно, и распределения статистик критериев будут отличаться от приведенных в приложении **А** для конкретных значений этого параметра. То есть и в этом случае желательно уточнение $G(S|H_0)$.

В то же время построение моделей $G(S|H_0)$ с использованием компьютерных методов исследования принципиальных проблем не вызывает [74, 87]. Именно на базе таких методов были построены модели распределений статистик и таблицы процентных точек, представленные в приложении **А**. С другой стороны, ситуация нарисованная в предыдущем абзаце требует, чтобы в программном обеспечении, предназначенном для статистического анализа данных с проверкой сложных гипотез, был реализован интерактивный режим исследования распределения статистики применяемого критерия в процессе проверки такой гипотезы. Только это обеспечит корректность применения непараметрических критериев при проверке любой сложной гипотезы [81, 23, 28, 22].

5.2. Методика компьютерного анализа статистических закономерностей

Методика компьютерного моделирования распределений статистик при корректном ее применении может быть рекомендована для построения статистических закономерностей в ситуации, когда аналитическими методами не удается решить задачу.

Очевидно, что бесконечное множество случайных величин, с которым приходится сталкиваться на практике, не может быть описано ограниченным подмножеством моделей законов распределений, наиболее часто используемых для описания реальных наблюдений в приложениях. Любой исследователь для конкретной наблюдаемой величины может предложить (построить) свою параметрическую модель закона, наиболее адекватно, с его точки зрения, описывающего эту случайную величину. После оценки по данной выборке параметров модели возникает необходимость в проверке её адекватности, которая осуществляется в результате проверки сложной гипотезы с использованием критериев согласия.

Множество всех сложных гипотез бесконечно, и заранее иметь распределения $G(S|H_0)$ для любой сложной гипотезы H_0 практически невозможно. Именно поэтому найденные различным образом предельные распределения статистик непараметрических критериев согласия представлены в литературных источниках лишь для ограниченного ряда распределений, наиболее часто используемых в приложениях, особенно в задачах контроля качества и исследования надежности. Что же делать, если для описания выборки используется закон распределения вероятностей $F(x, \theta)$ и найдена оценка его параметра $\hat{\theta}$, а для проверки сложной гипотезы H_0: $F(x) \in \{F(x, \theta), \theta \in \Theta\}$ исследователю неизвестно распределение $G(S|H_0)$ статистики соответствующего критерия согласия?

Наиболее целесообразно воспользоваться методикой компьютерного анализа статистических закономерностей, хорошо зарекомендовавшей себя при моделировании распределений статистик критериев [94, 92, 43, 86, 90, 95, 88, 89, 42, 51] Для этого следует в соответствии с законом $F(x, \hat{\theta})$ смоделировать N выборок того же объема n, что и выборка, для которой необходимо проверить гипотезу H_0: $F(x) \in \{F(x, \theta), \theta \in \Theta\}$. Далее для каждой из N выборок вычислить оценки тех же параметров закона, а затем – значение статистики S соответствующего критерия согласия. В результате будет получена выборка значений статистики $S_1, S_2, ..., S_N$ с законом распределения $G(S_n|H_0)$ для проверяемой гипотезы H_0. По этой выборке при достаточно большом N можно построить достаточно гладкую эмпирическую функцию распределения $G_N(S_n|H_0)$, которой можно непосредственно воспользоваться для вывода о том, есть ли основания для отклонения гипотезы H_0. При необходимости можно по $G_N(S_n|H_0)$ построить приближенную аналитическую модель, аппроксимирующую $G_N(S_n|H_0)$, и тогда, опираясь уже на эту модель, принимать решение относительно проверяемой гипотезы H_0.

Как показывает практика, хорошей аналитической моделью для $G_N(S_n|H_0)$ часто оказывается один из законов, рассмотренных в разд. 4.2 [92, 43, 95]. Во всяком случае, всегда можно, опираясь на ограниченное множество законов распределения, построить модель в виде смеси законов [97, 38, 98].

Реализация такой процедуры компьютерного анализа распределения статистики не содержит ни принципиальных, ни практических трудностей. Уровень вычислительной техники позволяет очень быстро получить результаты моделирования, а реализация алгоритма под силу инженеру, владеющему навыками программирования.

В то же время подобная методика анализа распределений статистик имеет и недостатки, связанные с ограниченной точностью построения закона распределения статистики и возможным влиянием качества используемого датчика псевдослучайных чисел. Поэтому при ее реализации следует непременно контролировать качество датчиков, генерирующих числа в соответствии с требуемыми законами «наблюдаемых» случайных величин. Современные системы программирования включают в себя достаточно хорошие датчики, генерирующие псевдослучайные числа, распределенные по равномерному закону. При необходимости построения собственного датчика можно воспользоваться алгоритмами моделирования, изложенными в [68].

Точность построения закона распределения статистики на основании $G_N(S_n|H_0)$, конечно, можно повышать, увеличивая N. По оценкам [94, 92, 43, 86, 90, 95], отклонения смоделированного распределения от теоретического при $N = 2000$ обычно имеют порядок $\approx \pm 0{,}015$. Если поставить такую цель, то, аппроксимируя эмпирические распределения теоретическими законами и усредняя их по реализациям (при многократном моделировании), можно, при необходимости, добиться более высокой точности построения закона распределения исследуемой статистики. Опираясь на построенное распределение $G_N(S_n|H_0)$, можно достаточно точно оценить значение $P\{S > S^*\}$, но значения процентных точек, полученные по $G_N(S_n | H_0)$, могут оказаться с существенной погрешностью. На практике же, проверяя различные гипотезы, чаще сравнивают полученное значение статистики S^* с соответствующей процентной точкой предельного распределения, что является менее информативным для принятия решения. Более предпочтительно принимать решение по достигнутому уровню значимости $P\{S > S^*\}$.

Таблицы процентных точек и модели распределений статистик критериев, приводимые в приложении, строились по смоделированным выборкам статистик объемом $N = 10^6$. При таких N величина разности между истинным законом $G(S | H_0)$ распределения статистики и смоделированным эмпирическим $G_N(S | H_0)$ по модулю не превышает величины 10^{-3}. При этом значения статистик критериев вычислялись по выборкам псевдослучайных величин, генерируемых в соответствии с наблюдаемым законом $F(x, \theta)$, объемом $n = 10^3$. В такой ситуации распределение $G(S_n | H_0)$ практически совпадает с предельным $G(S | H_0)$. В задачах статистического анализа можно пользоваться представленными моделями, начиная с объемов выборок $n > 25$.

5.3. Интерактивный подход к проверке гипотез в нестандартных условиях

Самым серьезным препятствием, возникающим на пути решения проблемы применения непараметрических критериев согласия для проверки сложных гипотез относительно широкого круга возможных параметрических законов распределения, используемых в различных приложениях для описания наблюдаемых случайных величин (ошибок измерения), является зависимость распределений статистик критериев от конкретных значений параметра или параметров формы закона, соответствующего проверяемой гипотезе (в случае семейств гамма- и бета распределений, обобщенного Вейбулла, обратного гауссовского и др.). Как правило, это касается законов, применение которых наиболее перспективно в различных приложениях, в задачах анализа выживания и исследования надежности сложных изделий и систем.

Так как оценки параметров становятся известными только в процессе анализа, то требуемое для проверки гипотезы распределение статистики нельзя найти заранее (до вычисления оценок по анализируемой выборке!). В случае критериев со статистиками (2.27) – (2.29) проблема усугубляется зависимостью распределений статистик от объемов выборок. Отсюда следует, что распределения статистик применяемых критериев должны находиться в интерактивном режиме в ходе проводимого статистического анализа [30, 22, 104], а затем использоваться при формировании вывода по итогам проверки сложной гипотезы.

Реализация такого интерактивного режима требует наличия развитого программного обеспечения, позволяющего (как в [105]) в целях ускорения распараллеливать процессы моделирования и привлекать доступные вычислительные ресурсы. В условиях распараллеливания время построения (с требуемой точностью) необходимого для проверки гипотезы распределения $G_N(S_n | H_0)$ статистики критерия и определения по нему достигнутого уровня значимости $P\{S_n \ge S^*\}$, где S^* – вычисленное по выборке значение статистики, оказывается не очень заметным на фоне полного решения задачи статистического анализа.

В [105] интерактивный режим исследования распределений статистик реализован для следующих непараметрических критериев согласия: Колмогорова, Крамера-Мизеса-Смирнова, Андерсона-Дарлинга, Купера, Ватсона, Жанга (3-х критериев). При этом могут использоваться различные методы оценивания параметров.

Приводимый ниже пример демонстрирует точность определения достигнутого уровня значимости в зависимости от величины выборки N моделируемого в интерактивном режиме эмпирического распределения статистики [105].

Пример 5.1. Необходимо проверить сложную гипотезу о принадлежности обратному гауссовскому закону с плотностью (3.8) следующей выборки объемом n =100:

0.945	1.040	0.239	0.382	0.398	0.946	1.248	1.437	0.286	0.987
2.009	0.319	0.498	0.694	0.340	1.289	0.316	1.839	0.432	0.705
0.371	0.668	0.421	1.267	0.466	0.311	0.466	0.967	1.031	0.477

0.322	1.656	1.745	0.786	0.253	1.260	0.145	3.032	0.329	0.645
0.374	0.236	2.081	1.198	0.692	0.599	0.811	0.274	1.311	0.534
1.048	1.411	1.052	1.051	4.682	0.111	1.201	0.375	0.373	3.694
0.426	0.675	3.150	0.424	1.422	3.058	1.579	0.436	1.167	0.445
0.463	0.759	1.598	2.270	0.884	0.448	0.858	0.310	0.431	0.919
0.796	0.415	0.143	0.805	0.827	0.161	8.028	0.149	2.396	2.514
1.027	0.775	0.240	2.745	0.885	0.672	0.810	0.144	0.125	1.621

Параметр сдвига $\theta_3 = 0$ предполагается заданным.

По выборке оцениваются параметры формы θ_0, θ_1 и масштабный параметр θ_2. Найденные по данной выборке ОМП параметров $\hat{\theta}_0 = 0.7481$, $\hat{\theta}_1 = 0.7808$, $\hat{\theta}_2 = 1.3202$. Распределения статистик всех непараметрических критериев согласия в данном случае зависят от значений параметров формы θ_0 и θ_1 [31, 32, 34, 41, 76], не зависят от значения параметра масштаба θ_2 и должны быть найдены при значениях $\theta_0 = 0.7481$, $\theta_1 = 0.7808$.

Таблица 5.1

Достигнутые уровни значимости полученные по критериям при проверке согласия с обратным гауссовским законом при различных N

Значения статистик критериев	$N = 10^3$	$N = 10^4$	$N = 10^5$	$N = 10^6$
$V_n^{mod} = 1.1113$	0.479	0.492	0.493	0.492
$U_n^2 = 0.05200$	0.467	0.479	0.483	0.482
$Z_A = 3.3043$	0.661	0.681	0.679	0.678
$Z_C = 4.7975$	0.751	0.776	0.777	0.776
$Z_K = 1.4164$	0.263	0.278	0.272	0.270
$K = 0.5919$	0.643	0.659	0.662	0.662
$KMS = 0.05387$	0.540	0.557	0.560	0.561
$AD = 0.3514$	0.529	0.549	0.548	0.547

Вычисленные по выборке значения S_i^* статистик критериев

Купера, Ватсона, Жанга, Колмогорова, Крамера-Мизеса-Смирнова, Андерсона-Дарлинга и соответствующие этим значениям достигнутые уровни значимости $P\{S \geq S_i^* | H_0\}$ (p-value), полученные при различной точности моделирования (при различном объеме N моделируемых выборок статистик), приведены в таблице 5.1.

Аналогичные результаты при проверке согласия той же выборки с Г-распределением, имеющим плотность вида

$$f(x) = \frac{\theta_1}{\theta_3 \Gamma(\theta_0)} \left(\frac{x - \theta_4}{\theta_3} \right)^{\theta_1 \theta_0 - 1} e^{-\left(\frac{x - \theta_4}{\theta_3} \right)^{\theta_1}},$$

приведены в таблице 5.2. Вычисленные ОМП параметров: $\theta_0 = 2.4933$, $\theta_1 = 0.6065$, $\theta_2 = 0.1697$, $\theta_4 = 0.10308$. В данном случае распределения статистик критериев согласия зависят от значений параметров формы θ_0 и θ_1.

Таблица 5.2

Достигнутые уровни значимости полученные по критериям при проверке согласия с Г-распределением при различных N

Значения статистик критериев	$N = 10^3$	$N = 10^4$	$N = 10^5$	$N = 10^6$
$V_n^{mod} = 1.14855$	0.321	0.321	0.323	0.322
$U_n^2 = 0.057777$	0.271	0.265	0.267	0.269
$Z_A = 3.30999$	0.235	0.245	0.240	0.240
$Z_C = 4.26688$	0.512	0.557	0.559	0.559
$Z_K = 1.01942$	0.336	0.347	0.345	0.344
$K = 0.60265$	0.425	0.423	0.423	0.424
$KMS = 0.05831$	0.278	0.272	0.276	0.277
$AD = 0.39234$	0.234	0.238	0.238	0.237

Гипотеза о согласии с данным законом также не отвергается, однако, исходя из оценок достигаемых уровней значимости по всем критериям, как более подходящей модели предпочтение следует отдать обратному гауссовскому закону.

6. Заключение

Представленные в приложении модели распределений статистик и таблицы процентных точек позволяют корректно применять при проверке сложных гипотез относительно ряда параметрических законов распределения случайных величин критерии Колмогорова, Крамера-Мизеса-Смирнова, Андерсона-Дарлинга в случае использования ОМП и MD-оценок, а критерии Купера и Ватсона – в случае использования ОМП.

Применение для проверки сложных гипотез критериев Жанга со статистиками Z_C и Z_A, которые имеют преимущество в мощности перед всеми остальными, и со статистикой Z_K возможно при наличии соответствующей программной поддержки, обеспечивающей исследование распределений статистик этих критериев методами статистического моделирования, желательно в ходе проверки гипотезы H_0 (в интерактивном режиме). Это ограничение связано с существенной зависимостью распределений статистик критериев Жанга от объема выборок.

Относительно тех же пар возможных конкурирующих гипотез непараметрические критерии обладают различной мощностью. Однако это не означает, что следует отказаться от использования некоторых критериев, имеющих меньшую мощность относительно определённых пар конкурирующих гипотез, так как применение множества критериев, опирающихся на различные меры отклонения эмпирического распределения от теоретического, повышает качество статистических выводов.

Применение рассмотренных в данном руководстве критериев предполагает, что анализируемые выборки являются “точечными”: данные не цензурированные и негруппированные. Применение непараметрических критериев согласия к цензурированным выборкам, особенно при проверке сложных гипотез, сопровождается дополнительными трудностями. Во-первых, это связано с отличием свойств оценок, получаемых по цензурированным выборкам ограниченного объема, от асимптотических свойств этих оценок [71, 73]. Во-вторых, вид и степень цензурирования отражаются на распределениях статистик критериев, модифицированных для анализа цензурированных выборок [82, 67, 15, 78].

Интерес к непараметрическим критериям согласия, особенно в связи с анализом цензурированных данных, в последнее время не снижается [5, 6]. Нельзя забывать и об использовании критериев типа χ^2, так как они имеют свои достоинства [96, 55].

Далеко не всегда настоящее руководство даст однозначный ответ с указанием на модель распределения статистики или процентные точки, используемого Вами критерия. В этом случае можно воспользоваться рекомендациями и методикой компьютерного моделирования, описанной в разд. 5.2. Не следует забывать об интерактивном режиме исследования распределений статистик (разд. 5.3) без которого не обойтись в тех случаях, когда к моменту проверки сложной гипотезы H_0 распределение статистики применяемого критерия, соответствующее справедливости H_0, неизвестно. Возможно, решению проблемы поможет использование программной системы [105], развитию которой обязаны результаты, содержащиеся в приложении **A**. Версии программной системы доступны на странице автора.

Библиографический список

1. *Akushkina K. A.* Models of statistical distributions of nonparametric goodness-of-fit tests in testing composite hypotheses of the generalized Weibull distribution / K. A. Akushkina, S. B. Lemeshko, B. Yu. Lemeshko // Proceedings Third International Conference on Accelerated Life Testing, Reliability-based Analysis and Design. 19-21 May 2010. – Clermont-Ferrand, France, 2010. – P. 125–132.

2. *Anderson T. W.* A test of goodness of fit / T. W. Anderson, D. A. Darling // J. Amer. Stist. Assoc. – 1954. – Vol. 29. – P. 765–769.

3. *Anderson T. W.* Asymptotic theory of certain "Goodness of fit" criteria based on stochastic processes / T. W. Anderson, D. A. Darling // AMS. – 1952. – Vol. 23. – P. 193–212.

4. *Arsham H.* Kuiper's P-value as a measuring tool and decision procedure for the goodness-of-fit test / H. Arsham // J. Appl. Statist. – 1988. – V. 15. – № 2. – P.131-135.

5. Bagdonavicius V. Non-parametric tests for complete sample / V. Bagdonavicius, J. Kruopis, M. Nikulin. – ISTE-Wiley: Hoboken, 2011. – 308 p.

6. Bagdonavicius V. Non-parametric tests for censored sample / V. Bagdonavicius, J. Kruopis, M. Nikulin. – ISTE-Wiley: Hoboken, 2011. – 233 p.

7. *Chandra M.* Statistics for Test of Fit for the Extreme–Value and Weibull Distribution / M. Chandra, N. D. Singpurwalla, M. A. Stephens // J. Am. Statist. Assoc. – 1981. – Vol. 76. – P. 375.

8. D`Agostino R.B. Goodness-of-fit Techniques / R.B. D`Agostino, M.A. Stephens. – Marcel Dekker: New York, 1986. – 560 p.

9. *Darling D. A.* The Cramer-Smirnov test in the parametric case / D. A. Darling // Ann. Math. Statist. – 1955. – Vol. 26. – P. 1–20.

10. *Darling D. A.* The Cramer-Smirnov test in the parametric case / D. A. Darling // Ann. Math. Statist. – 1957. – Vol. 28. – P. 823–838.

11. *Durbin J.* Kolmogoriv-Smirnov test when parameters are estimated / J. Durbin // Lect. Notes Math. – 1976. – Vol. 566. – P. 33–44.

12. *Durbin J.* Kolmogorov-Smirnov tests when parameters are estimated with applications to tests of exponentiality and tests of spacings / J. Durbin // Biometrika. – 1975. – Vol. 62. – P. 5–22.

13. *Durbin J.* Weak convergence of the sample distribution function when parameters are estimated / J. Durbin // Ann. Statist. – 1973. – № 1. – P. 279–290.

14. *Dzhaparidze K. O.* Probability distribution of the Kolmogorov and omega-square statistics for continuous distributions with shift and scale parameters / K. O. Dzhaparidze, M. S. Nikulin // J. Soviet Math. – 1982. Vol. 20. – P. 2147–2163.

15. *Galanova N. S.* Using nonparametric goodness-of-fit tests to validate accelerated failure time models / N. S. Galanova, B. Y. Lemeshko, E. V. Chimitova // Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing. – 2012. – Vol. 48. Is. 6. – P. 580-592.

16. Inverse Gaussian Model and Its Applications in Reliability and Survival Analysis / B.Yu. Lemeshko, S.B. Lemeshko, K.A. Akushkina, M.S. Nikulin, Noureddine Saaidia // In: Mathematical and Statistical Models and Methods in Reliability. Applications to Medicine, Finance, and Quality Control / Editors: V. Rykov, N.

Balakrishnan, M. Nikulin / Series “Statistics for Industry and Technology” / Birkhäuser, Boston. 2011. – P. 433-453.

17. *Kac M.* On tests of normality and other tests of goodness of fit based on distance methods / M. Kac, J. Kiefer, J. Wolfowitz // Ann. Math. Stat. – 1955. – Vol. 26. – P. 189–211.

18. *Kolmogoroff A. N.* Sulla determinazione empirica di una legge di distribuzione / A. N. Kolmogoroff // G. Ist. Ital. attuar. – 1933. – Vol. 4. – № 1. – P. 83–91.

19. *Koziol J. A.* A modification of Watson's statistic for goodness-of-fit / J. A. Koziol. // Communications in Statistics - Theory and Methods. – 1989. – V. 18. – No. 10. – P.3739-3747.

20. *Kuiper N.H.* Tests concerning random points on a circle / N. H. Kuiper // Proc. Konikl. Nederl. Akad. Van Wettenschappen. – 1960. Series A – V. 63. – P.38-47.

21. *Lemeshko B. Yu.* Application and Power of the Nonparametric Kuiper, Watson, and Zhang Tests of Goodness-of-Fit / B. Yu. Lemeshko, A. A. Gorbunova // Measurement Techniques. – 2013. – Vol. 56. – No. 5. – P.465-475.

22. *Lemeshko B. Yu.* Application of nonparametric goodness-of-fit tests for composite hypotheses in case of unknown distributions of statistics / A. A. Gorbunova, B. Yu. Lemeshko, S. B. Lemeshko, A. P. Rogozhnikov // Applied methods of statistical analysis. Applications in survival analysis, reliability and quality control – AMSA’2013, Novosibirsk, 25–27 Sept. 2013 : proc. of the intern. workshop. – Novosibirsk : NSTU publ., 2013. – P. 8-24.

23. *Lemeshko B. Yu.* Application of nonparametric Kuiper and Watson tests of goodness-of-fit for composite hypotheses / B. Yu. Lemeshko, A. A. Gorbunova // Measurement Techniques. – 2013. – Vol. 56. – № 9. – P.965-973.

24. *Lemeshko B. Yu.* Comparative Analysis of the Power of Goodness-of-Fit Tests for Near Competing Hypotheses. I. The Verification of Simple Hypotheses / B. Yu. Lemeshko, S. B. Lemeshko, S. N. Postovalov // Journal of Applied and Industrial Mathematics. – 2009. – Vol. 3, № 4. – P. 462–475.

25. *Lemeshko B. Yu.* Comparative analysis of the power of goodness-of-fit tests for near competing hypotheses. II. Verification of complex hypotheses / B. Yu. Le-meshko, S. B. Lemeshko, S. N. Postovalov // Journal of Applied and Industrial Mathematics. – 2010. – Vol. 4, № 1. – P. 79–93.

26. *Lemeshko B. Yu.* Construction of Statistic Distribution Models for Nonparametric Goodness-of-Fit Tests in Testing Composite Hypotheses: The Computer Approach / B.Yu. Lemeshko, S.B. Lemeshko // Quality Technology & Quantitative Management. 2011. – Vol. 8, No. 4. – P. 359-373.

27. *Lemeshko B. Yu.* Errors when using nonparametric fitting criteria / B. Yu. Lemeshko // Measurement Techniques. – 2004. – Vol. 47, №. 2. – P. 134–142.

28. *Lemeshko B. Yu.* Interactive investigation of statistical regularities in testing composite hypotheses of goodness of fit / B. Yu. Lemeshko, S. B. Lemeshko, A. P. Rogozhnikov // Statistical Models and Methods for Reliability and Survival Analysis : monograph. – Wiley-ISTE , 2013. – Chap. 5. – P. 61–76.

29. *Lemeshko B. Yu.* Models of Statistic Distributions of Nonparametric Goodness-of-Fit Tests in Composite Hypotheses Testing for Double Exponential Law Cases / B.Yu. Lemeshko, S.B. Lemeshko // Communications in Statistics - Theory and Methods – 2011. – Vol. 40. – No. 16. – P. 2879-2892.

30. *Lemeshko B.Yu.* Real-Time Studying of Statistic Distributions of Non-Parametric Goodness-of-Fit Tests when Testing Complex Hypotheses / B. Yu. Lemeshko, S.B. Lemeshko, A. P. Rogozhnikov // Proceedings of the International Workshop “Applied Methods of Statistical Analysis. Simulations and Statistical Inference” – AMSA’2011, Novosibirsk, Russia, 20-22 September, 2011. – P. 19-27.

31. *Lemeshko B. Yu.* Statistic Distribution Models for Some Nonparametric Goodness-of-Fit Tests in Testing Composite Hypotheses / B. Yu. Lemeshko, S. B. Le-meshko, S. N. Postovalov // Communications in Statistics – Theory and Methods. – 2010. – Vol. 39, № 3. – P. 460–471.

32. *Modeling* statistic distributions for nonparametric goodness-of-fit criteria for testing complex hypotheses with respect to the inverse Gaussian law / B. Yu. Lemeshko, S. B. Lemeshko, M. S. Nikulin, N. Saaidia // Automation and Remote Control. – 2010. – Vol. 71, № 7. – P. 1358–1373.

33. *Lemeshko B. Yu.* Distribution models for nonparametric tests for fit in verifying complicated hypotheses and maximum-likelihood estimators. P. 1 / B. Yu. Lemeshko, S. B. Lemeshko // Measurement Techniques. – 2009. – Vol. 52, № 6. – P. 555–565.

34. *Lemeshko B. Yu.* Models for statistical distributions in nonparametric fitting tests on composite hypotheses based on maximum-likelihood estimators. P. II / B. Yu. Lemeshko, S. B. Lemeshko // Measurement Techniques. – 2009. – Vol. 52, № 8. – P. 799–812.

35. *Lemeshko B. Yu.* Models of Statistic Distributions of Nonparametric Goodness-of-fit Tests in Composite Hypotheses Testing in Case of Double Exponential Law / B. Yu. Lemeshko, S. B. Lemeshko // ASMDA-2009. Applied Stochastic Models and Data Analysis : selected papers, the XIII International Conference June 30-Jule 3, 2009. – Vilnius, Lithania, 2009 – P. 153–157.

36. *Lemeshko B. Yu.* Nonparametric Test in Testing Composite Hypotheses on Goodness of Fit Exponential Family Distributions / B. Yu. Lemeshko, A. A. Maklakov // Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing. – 2004. – Vol. 40, № 3. – P. 3–18.

37. *Lemeshko B. Yu.* Application of the nonparametric goodness-of-fit Tests in testing composite hypotheses / B. Yu. Lemeshko, S. N. Postovalov // Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing. – 2001. – № 2. – P. 76–88.

38. *Lemeshko B. Yu.* Statistical analysis of one-dimensional observations from partially grouped data / B. Yu. Lemeshko, S. N. Postovalov // Russian Physics Journal (Historical Archive). – 1995. – Vol. 38, № 9. – P. 901–906.

39. *Lemeshko B. Yu.* The power of goodness of fit tests for close alternatives / B. Yu. Lemeshko, S. B. Lemeshko, S. N. Postovalov // Measurement Techniques. – 2007. – Vol. 50, № 2. – P. 132–141.

40. *Lemeshko S. B.* Statistic distributions of the nonparametric goodness-of-fit tests in testing hypotheses relative to beta-distributions / S. B. Lemeshko, B. Yu. Lemeshko // XIIth Applied Stochastic Models and Data Analysis (ASMDA 2007) International Conference. Book of Abstracts. May 29–June 1, 2007. – Chania, Crete, Greece. Editor Christos H. Skiadas, 2007. – P. 112.

41. *Lemeshko S. B.* Simulation of the statistics distributions and power of the goodness-of-fit tests in composite hypotheses testing rather Inverse Gaussian distribution / S. B. Lemeshko, M. S. Nikulin, N. Saaidia // Proc. 6th St. Petersburg Workshop on Simulation. St. Petersburg. – 2009. – Vol. 1. – P. 323–328.

42. *Lemeshko B. Yu.* Limit distributions of the Pearson chi 2 and likelihood ratio statistics and their dependence on the mode of data grouping / B. Yu. Lemeshko, S. N. Postovalov // Industrial laboratory. – 1998. – Vol. 64, № 5. – P. 344–351. – (Consultants Bureau, New York)

43. *Lemeshko B.Yu.* Statistical distributions of nonparametric goodness-of-fit tests as estimated by the sample parameters of experimentally observed laws / B. Yu. Lemeshko, S. N. Postovalov // Industrial laboratory. – 1998. – Vol. 64, № 3. – P. 197–208. – (Consultants Bureau, New York)

44. *Lilliefors H. W.* On the Kolmogorov-Smirnov test for normality with mean and variance unknown / H. W. Lilliefors // J. Am. Statist. Assoc. – 1967. – Vol. 62. – P. 399–402.

45. *Lilliefors H. W.* On the Kolmogorov-Smirnov test for the exponential distribution with mean unknown / H. W. Lilliefors // J. Am. Statist. Assoc. – 1969. – Vol. 64. – P. 387–389.

46. *Nikitin Ya. Yu.* Bahadur effectiveness of Watson-Darling goodness-of-fit tests / Ya. Yu. Nikitin // Journal of Mathematical Sciences. – 1988. – V. 43. – No. 6. – P.2833-2838.

47. *Nikulin M. S.* Gihman and goodness-of-fit tests for grouped data / M. S. Nikulin // Mathematical Reports of the academy of Science of the Royal Society of Canada. – 1992. – Vol. 14 (4). – P. 151–156.

48. *Biometrica* tables for Statistics / ed.: E. S. Pearson, H. O. Hartley. – Cambridge : University Press, 1972. – Vol. 2. – 385 p.

49. *Rao C. R.* Criteria of estimation in large samples / C. R. Rao // Sankhua. – 1962. – Vol. 25. – P. 189–206.

50. *Rao K.C.* A chi-squared statistic for goodness-of-fit tests within the exponential family / K. C. Rao, D. S. Robson // Comm. Statist. – 1974. – V. 3. – № 12. – P.1139-1153.

51. Software System for Simulation and Research of Probabilistic Regularities and Statistical Data Analysis in Reliability and Quality Control / B.Yu. Lemeshko, S.B. Lemeshko, E.V. Chimitova, S.N. Postovalov, A.P. Rogozhnikov // In: Mathematical and Statistical Models and Methods in Reliability. Applications to Medicine, Finance, and Quality Control / Editors: V. Rykov, N. Balakrishnan, M. Nikulin / Series “Statistics for Industry and Technology” / Birkhäuser, Boston. 2011. – P. 417-432.

52. *Stephens M. A.* EDF statistics for goodness of fit and some comparisons / M. A. Stephens // J. Am. Statist. Assoc. – 1974. – Vol. 69. – No. 347. – P. 730–737.

53. *Stephens M. A.* Use of Kolmogorov–Smirnov, Cramer – von Mises and related statistics – without extensive table / M. A. Stephens // J. R. Stat. Soc. – 1970. – B. 32. – P. 115–122.

54. *Stephens M. A.* The goodness-of-fit statistic V_N: distribution and significance points / M. A. Stephens // *Biometrika.* – 1965. – V. 52. – No. 3-4. – P.309-321.

55. Voinov V. Chi-Squared Goodness-of-fit Tests with Applications / V. Voinov, M. Nikulin, N. Balakrishnan. – Amsterdam : Academic Press/Elsevier, 2013. – 229 p.

56. *Watson G. S.* Goodness-of-fit tests on a circle. I. / G. S. Watson // Biometrika. – 1961. – V. 48. – No. 1-2. – P.109-114.

57. *Watson G. S.* Goodness-of-fit tests on a circle. II. / G. S. Watson // *Biometrika.* – 1962. – V. 49. – No. 1-2. – P.57- 63.

58. *Zhang J.* Powerful goodness-of-fit and multi-sample tests / J. Zhang // PhD Thesis. York University, Toronto. 2001. – 113 p. URL: http://www.collectionscanada.gc.ca/obj/s4/f2/dsk3/ftp05/NQ66371.pdf (дата обращения 28.01.2013).

59. *Zhang J.* Powerful goodness-of-fit tests based on the likelihood ratio / J. Zhang // Journal of the Royal Statistical Society: Series B. – 2002. – V. 64. – № 2. – P.281-294.

60. *Zhang J.* Likelihood-ratio tests for normality / J. Zhang, Yu. Wub // Computational Statistics & Data Analysis. –. V. 49. – No. 3. – P.709-721.

61. *Zhang J.* Powerful Two-Sample Tests Based on the Likelihood Ratio / J. Zhang // Technometrics. – 2006. – V. 48. – No. 1. – P.95-103.

62. *Акушкина К. А.* Модели распределений статистик непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез относительно обобщенного распределения Вейбулла / К. А. Акушкина, Б. Ю. Лемешко, С. Б. Ле-мешко // Информатика и проблемы телекоммуникаций : материалы российской науч.-техн. конф. – Новосибирск, 2010. – Т. 1. – С. 34–37.

63. *Большев Л. Н.* Асимптотические пирсоновские преобразования / Л. Н. Большев // Теория вероятностей и ее применение. – 1963. – Т. 8, № 2. – С. 129–155.

64. *Большев Л. Н.* Теория вероятностей и математическая статистика : избр. тр. / Л. Н. Большев ; под ред. Ю. В. Прохорова. – М. : Наука, 1987. – 286 с.

65. *Большев Л. Н.* Таблицы математической статистики / Л. Н. Большев, Н. В. Смирнов. – М. : Наука, 1983. – 416 с.

66. *Бондарев Б. В.* О проверке сложных статистических гипотез / Б. В. Бондарев // Завод. лаб. – 1986. – Т. 52, № 10. – С. 62–63.

67. Галанова Н. С. Применение непараметрических критериев согласия к проверке адекватности моделей ускоренных испытаний / Н. С. Галанова, Б. Ю. Лемешко, Е. В. Чимитова // Автометрия. – 2012. – № 6. – С.53-68.

68. *Ермаков С. М.* Статистическое моделирование / С. М. Ермаков, Г. А. Михайлов. – М. : Наука, 1982. – 296 с.

69. Козлова А.В. Исследование распределений статистик и мощности непараметрических критериев согласия, предложенных Jin Zhang / А. В. Козлова, Б. Ю. Лемешко // Материалы Российской НТК “Информатика и проблемы телекоммуникаций”. Новосибирск. – 2007. – Т. 1. – С.136-139.

70. *Кулинская Е. В.* О некоторых ошибках в реализации и применении непараметрических методов в пакете для IBM PC / Е. В. Кулинская, Н. Е. Саввушкина // Завод. лаб. – 1990. – Т. 56, № 5. – С. 96–99.

71. *Лемешко Б. Ю.* Об оценивании параметров распределений и проверке гипотез по цензурированным выборкам / Б. Ю. Лемешко // Методы менеджмента качества. – 2001. – № 4. – С. 32–38.

72. *Лемешко Б. Ю.* Об ошибках, совершаемых при использовании непараметрических критериев согласия / Б. Ю. Лемешко // Измер. техника. 2004. – № 2. – С. 15–20.

73. *Лемешко Б. Ю.* К оцениванию параметров надежности по цензурированным выборкам / Б. Ю. Лемешко, С. Я. Гильдебрант, С. Н. Постовалов // Завод. лаб. Диагностика материалов. – 2001. – Т. 67. – № 1. – С. 52–64.

74. *Лемешко Б.Ю.* Компьютерное моделирование и исследование вероятностных закономерностей / Б. Ю. Лемешко, А. А. Горбунова, С. Б. Лемешко, С. Н. Постовалов, А. П. Рогожников, Е. В. Чимитова // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2013. – № 1(22). – С. 74-85.

75. *Лемешко Б. Ю.* Модели распределений статистик непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез с использованием оценок максимального правдоподобия. Ч. I / Б. Ю. Лемешко, С. Б. Лемешко // Измер. техника. – 2009. – № 6. – С. 3–11.

76. *Лемешко Б. Ю.* Модели распределений статистик непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез с использованием оценок максимального правдоподобия. Ч. II / Б. Ю. Лемешко, С. Б. Лемешко // Измер. техника. – 2009. – № 8. – С. 17–26.

77. *Моделирование* распределений статистик непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез относительно обратного гауссовского закона / Б. Ю. Лемешко, С. Б. Лемешко, М. С. Никулин, Н. Сааидиа // Автоматика и телемеханика. – 2010. – Т. 71, № 7. – С. 83–102.

78. *Лемешко Б. Ю.* Модифицированные критерии согласия Колмогорова, Крамера-Мизеса-Смирнова и Андерсона-Дарлинга для случайно цензурированных выборок. Ч. 2 / Б. Ю. Лемешко, Е. В. Чимитова, М. А. Ведерникова // Научный вестник Новосибирского государственного технического университета. – 2013. – № 1(50). – С. 3-16.

79. *Лемешко Б. Ю.* Мощность критериев согласия при близких альтернативах / Б. Ю. Лемешко, С. Б. Лемешко, С. Н. Постовалов // Измер. техника. – 2007. – № 2. – С. 22–27.

80. *Лемешко Б. Ю.* О применении и мощности непараметрических критериев согласия Купера, Ватсона и Жанга / Б. Ю. Лемешко, А. А. Горбунова // Измерительная техника. – 2013. – № 5. – С. 3-9.

81. *Лемешко Б. Ю.* Применение непараметрических критериев согласия Купера и Ватсона при проверке сложных гипотез / Б. Ю. Лемешко, А. А. Горбунова // Измерительная техника. – 2013. – № 9. – С.14-21.

82. Лемешко Б. Ю. Проверка простых и сложных гипотез о согласии по цензурированным выборкам / Б. Ю. Лемешко, Е. В. Чимитова, Т. А. Плешкова // Научный вестник НГТУ. – 2010. – № 4(41). – С.13-28.

83. *Лемешко Б. Ю.* Сравнительный анализ мощности критериев согласия при близких конкурирующих гипотезах. I. Проверка простых гипотез / Б. Ю. Лемешко, С. Б. Лемешко, С. Н. Постовалов // Сиб. журн. индустр. математики. – 2008. – Т. 11, № 2(34). – С. 96–111.

84. *Лемешко Б. Ю.* Сравнительный анализ мощности критериев согласия при близких альтернативах. II. Проверка сложных гипотез / Б. Ю. Лемешко, С. Б. Лемешко, С. Н. Постовалов // Сиб. журн. индустр. математики. – 2008. – Т. 11, № 4(36). – С. 78–93.

85. *Лемешко Б. Ю.* Непараметрические критерии при проверке сложных гипотез о согласии с распределениями экспоненциального семейства / Б. Ю. Лемешко, А. А. Маклаков // Автометрия. – 2004. – № 3. – С. 3–20.

86. *Лемешко Б. Ю.* Исследование допредельных распределений статистик критериев согласия при проверке сложных гипотез / Б. Ю. Лемешко, С. Н. Постовалов // Актуальные проблемы электронного приборостроения : тр. IV междунар. конф. – Новосибирск,1998. – Т. 3. – С. 12–16.

87. *Лемешко Б. Ю.* Компьютерные технологии анализа данных и исследования статистических закономерностей : учеб. пособие / Б. Ю. Лемешко, С. Н. Постовалов. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2004. – 120 с.

88. *Лемешко Б. Ю.* Непараметрические критерии при проверке сложных гипотез о согласии с распределениями Джонсона / Б. Ю. Лемешко, С. Н. Постовалов // Докл. СО АН высш. шк. – 2002. – № 1(5). – С. 65–74.

89. *Лемешко Б. Ю.* О зависимости предельных распределений статистик χ^2 Пирсона и отношения правдоподобия от способа группирования данных / Б. Ю. Лемешко, С. Н. Постовалов // Завод. лаб. – 1998. – Т. 64, № 5. – С. 56–63.

90. *Лемешко Б. Ю.* О зависимости распределений статистик непараметрических критериев и их мощности от метода оценивания параметров / Б. Ю. Лемешко, С. Н. Постовалов // Завод. лаб. Диагностика материалов. – 2001. – Т. 67, № 7. – С. 62–71.

91. *Лемешко Б. Ю.* О правилах проверки согласия опытного распределения с теоретическим / Б. Ю. Лемешко, С. Н. Постовалов // Методы менеджмента качества. Надежность и контроль качества. – 1999. – № 11. – С. 34–43.

92. *Лемешко Б. Ю.* О распределениях статистик непараметрических критериев согласия при оценивании по выборкам параметров наблюдаемых законов / Б. Ю. Лемешко, С. Н. Постовалов // Завод. лаб. – 1998. – Т. 64, № 3. – С. 61–72.

93. *Лемешко Б. Ю.* Прикладная статистика. Правила проверки согласия опытного распределения с теоретическим : метод. рек. / Б. Ю. Лемешко, С. Н. Постовалов. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 1999. – Ч. II. Непараметрические критерии. – 85 с.

94. *Лемешко Б. Ю.* Прикладные аспекты использования критериев согласия в случае проверки сложных гипотез / Б. Ю. Лемешко, С. Н. Постовалов // Надежность и контроль качества. – 1997. – № 11. – С. 3–17.

95. *Лемешко Б.Ю.* Применение непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез / Б. Ю. Лемешко, С. Н. Постовалов // Автометрия. – 2001. – № 2. – С. 88–102.

96. *Лемешко Б.Ю.* Статистический анализ данных, моделирование и исследование вероятностных закономерностей. Компьютерный подход : [монография] : монография / Б. Ю. Лемешко, С. Б. Лемешко, С. Н. Постовалов, Е. В. Чимитова. – : Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2011. – 888 с.

97. *Лемешко Б. Ю.* Статистический анализ одномерных наблюдений по частично группированным данным / Б. Ю. Лемешко, С. Н. Постовалов // Изв. вузов. Физика. – Томск, 1995. – № 9. – С. 39–45.

98. *Лемешко Б. Ю.* Статистический анализ смесей распределений по частично группированным данным / Б. Ю. Лемешко, С. Н. Постовалов // Сб. науч. тр. НГТУ. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 1995. – № 1. – С. 25–31.

99. *Лемешко Б. Ю.* К применению непараметрических критериев согласия для проверки адекватности непараметрических моделей / Б. Ю. Лемешко, С. Н. Постовалов, А. В. Французов // Автометрия. – 2002. – № 2. – С. 3–14.

100. *Лемешко Б. Ю.* О выборе числа интервалов в критериях согласия типа χ^2 / Б. Ю. Лемешко, Е. В. Чимитова // Завод. лаб. Диагностика материалов. – 2003. – Т. 69, № 1. – С. 61–67.

101. *Лемешко Б. Ю.* Численное сравнение оценок максимального правдоподобия с одношаговыми и влияние точности оценивания на распределения статистик критериев согласия / Б. Ю. Лемешко, Е. В. Чимитова // Завод. лаб. Диагностика материалов. – 2003. – Т. 69, № 5. – С. 62–68.

102. *Лемешко С. Б.* Расширение прикладных возможностей некоторых классических методов математической статистики : дис. … канд. тех. наук : 05.13.17 : защищена 16.05.07 / С. Б. Лемешко. – Новосибирск, 2007. – 306 с.

103. *Лемешко С. Б.* Распределения статистик непараметрических критериев согласия при проверке гипотез относительно бета-распределений / С. Б. Лемешко, Б. Ю. Лемешко // Докл. АН высш. шк. – 2007. – № 2(9). – С. 6–16.

104. *Лемешко Б. Ю.* О решении проблем применения некоторых непараметрических критериев согласия / Б. Ю. Лемешко, А. А. Горбунова, С. Б. Лемешко, А.П. Рогожников // Автометрия. – 2014. – № 1. – С. 26–43.

105. Пат. 2013615968, МКИ. Статистический анализ интервальных наблюдений одномерных непрерывных случайных величин "Интервальная статистка 5.1" / А. А. Горбунова, Б. Ю. Лемешко, С. Б. Лемешко, С. Н. Постовалов, А. П. Рогожников, Е. В. Чимитова; НГТУ - 2013612140; заяв. 21.03.13; опуб. 25.06.13. - 1 с. Дополнительно: приоритет от 21.03.13, выдавшая страна: РФ, сведения об издании: Реестр программ для ЭВМ. URL: http://www.ami.nstu.ru/~headrd/ISW_exe.zip (дата обращения 15.01.2014).

106. *Мартынов Г. В.* Критерии омега-квадрат / Г. В. Мартынов. – М. : Наука, 1978. – 80 с.

107. *Никулин М. С.* Один вариант обобщенной статистики омега-квадрат / М. С. Никулин // Записки науч. семинаров ЛОМИ, 1989. – Т. 177. – С. 108–113.

108. *Никулин М. С.* О критерии хи-квадрат для непрерывных распределений / М. С. Никулин // Теория вероятностей и ее применение. – 1973. – Т. 18. – № 3. – С.675-676.

109. *Никулин М. С.* Критерий хи-квадрат для непрерывных распределений с параметрами сдвига и масштаба / М. С. Никулин // Теория вероятностей и ее применение. – 1973. – Т. 18. – № 3. – С.583-591.

110. *Орлов А. И.* Распространенная ошибка при использовании критериев Колмогорова и омега-квадрат / А. И. Орлов // Завод. лаб. – 1985. – Т. 51, № 1. – С. 60–62.

111. Р 50.1.037–2002. Рекомендации по стандартизации. Прикладная статистика. Правила проверки согласия опытного распределения с теоретическим. Ч. II. Непараметрические критерии. – М. : Изд-во стандартов, 2002. – 64 с.

112. *Рао С. Р.* Линейные статистические методы и их применение / С. Р. Рао. – М. : Наука, 1968. – 548 с.

113. *Саввушкина Н. Е.* Критерий Колмогорова–Смирнова для логистического и гамма-распределения / Н. Е. Саввушкина // Сб. тр. ВНИИ систем. исслед. – 1990. – № 8.

114. *Тюрин Ю. Н.* Исследования по непараметрической статистике (непараметрические методы и линейная модель) : автореф. дис. … д-ра физ.-мат. наук / Ю. Н. Тюрин. – М., 1985. – 33 с. – (МГУ).

115. *Тюрин Ю. Н.* О предельном распределении статистик Колмогорова–Смирнова для сложной гипотезы / Ю. Н. Тюрин // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1984. – Т. 48, № 6. – С. 1314–1343.

116. *Тюрин Ю. Н.* Анализ данных на компьютере / Ю. Н. Тюрин, А. А. Макаров. – М. : ИНФРА-М, Финансы и статистика, 1995. – 384 с.

117. *Тюрин Ю. Н.* Критерии согласия для распределения Вейбулла–Гнеденко / Ю. Н. Тюрин, Н. Е. Саввушкина // Изв. АН СССР. Сер. Техн. кибернетика. – 1984. – № 3. – С. 109–112.

Приложение А. Таблицы распределений статистик непараметрических критериев согласия при простых и сложных гипотезах

Таблица А.1

Функция распределения статистики Колмогорова K(S) при проверке простой гипотезы

S	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.2	0.000000	000 000	000 000	000 000	000 000	000 000	000 000	000 000	000 001	000 004
0.3	0.000009	000 021	000 046	000 091	000 171	000 303	000 511	000 826	001 285	001 929
0.4	0.002808	003 972	005 476	007 377	009 730	012 589	016 005	020 022	024 682	030 017
0.5	0.036055	042 814	050 306	058 534	067 497	077 183	087 577	098 656	110 394	122 760
0.6	0.135718	149 229	163 255	177 752	192 677	207 987	223 637	239 582	255 780	272 188
0.7	0.288765	305 471	322 265	339 114	355 981	372 833	389 640	406 372	423 002	439 505
0.8	0.455858	472 039	488 028	503 809	519 365	534 682	549 745	564 545	579 071	593 315
0.9	0.607269	620 928	634 285	647 337	660 081	672 515	684 836	696 445	707 941	719 126
1.0	0.730000	740 566	750 825	760 781	770 436	779 794	788 860	797 637	806 130	814 343
1.1	0.822282	829 951	837 356	844 502	851 395	858 040	864 443	870 610	876 546	882 258
1.2	0.887750	893 030	898 102	903 973	907 648	912 134	916 435	920 557	924 506	928 288
1.3	0.931908	935 371	938 682	941 847	944 871	947 758	950 514	953 144	955 651	958 041
1.4	0.960318	962 487	964 551	966 515	968 383	970 159	971 846	973 448	974 969	976 413
1.5	0.977782	979 080	980 310	981 475	982 579	983 623	984 610	985 544	986 427	987 261
1.6	0.988048	988 791	989 492	990 154	990 777	991 364	991 917	992 438	992 928	993 389
1.7	0.993823	994 230	994 612	994 972	995 309	995 625	995 922	996 200	996 460	996 704
1.8	0.996932	997 146	997 346	997 533	997 707	997 870	998 023	998 165	998 297	998 421
1.9	0.998536	998 644	998 744	998 837	998 924	999 004	999 079	999 149	999 213	999 273
2.0	0.999329	999 381	999 429	999 473	999 514	999 553	999 588	999 620	999 651	999 679
2.1	0.999705	999 728	999 750	999 771	999 790	999 807	999 823	999 837	999 851	999 863
2.2	0.999874	999 886	999 895	999 904	999 912	999 920	999 927	999 933	999 939	999 944
2.3	0.999949	999 954	999 958	999 961	999 965	999 968	999 971	999 974	999 976	999 978
2.4	0.999980	999 982	999 984	999 985	999 987	999 988	999 989	999 990	999 991	999 992

Таблица А.2

Процентные точки распределения статистики Колмогорова при проверке простой гипотезы

Функция распределения	Верхние процентные точки				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
$K(S)$	1.1379	1.2238	1.3581	1.4802	1.6276

Таблица А.3

Функция распределения статистики ω^2 Крамера–Мизеса–Смирнова a1(S) при проверке простой гипотезы

S	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.00000	00 001	00 300	02 568	06 685	12 372	18 602	24 844	30 815	36 386
0.1	0.41513	46 196	50 457	54 329	57 846	61 042	63 951	66 600	69 019	71 229
0.2	0.73253	75 109	76 814	78 383	79 829	81 163	82 396	83 536	84 593	85 573
0.3	0.86483	87 329	88 115	88 848	89 531	90 167	90 762	91 317	91 836	92 321
0.4	0.92775	93 201	93 599	93 972	94 323	94 651	94 960	95 249	95 521	95 777
0.5	0.96017	96 242	96 455	96 655	96 843	97 020	97 186	97 343	97 491	97 630
0.6	0.97762	97 886	98 002	98 112	98 216	98 314	98 406	98 493	98 575	98 653
0.7	0.98726	98 795	98 861	98 922	98 981	99 036	99 088	99 137	99 183	99 227
0.8	0.99268	99 308	99 345	99 380	99 413	99 444	99 474	99 502	99 528	99 553
0.9	0.99577	99 599	99 621	99 641	99 660	99 678	99 695	99 711	99 726	99 740
1.0	0.99754	99 764	99 776	99 787	99 799	99 812	99 820	99 828	99 837	99 847
1.1	0.99856	99 862	99 869	99 876	99 883	99 890	99 895	99 900	99 905	99 910
1.2	0.99916	99 919	99 923	99 927	99 931	99 935	99 938	99 941	99 944	99 947
1.3	0.99950	99 953	99 955	99 957	99 959	99 962	99 964	99 965	99 967	99 969
1.4	0.99971	99 972	99 973	99 975	99 976	99 978	99 978	99 979	99 980	99 980

Таблица А.4

Процентные точки распределения статистики ω^2 Крамера–Мизеса–Смирнова при проверке простой гипотезы

Функция распределения	Верхние процентные точки				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
$a1(S)$	0.2841	0.3473	0.4614	0.5806	0.7434

Таблица А.5

Функция распределения статистики Ω^2 Андерсона–Дарлинга $a2(S)$ при проверке простой гипотезы

S	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.00000	00 000	00 000	00 000	00 000	00 000	00 000	00 000	00 000	00 001
0.1	0.00003	00 008	00 020	00 043	00 081	00 141	00 228	00 349	00 508	00 710
0.2	0.00959	01 256	01 605	02 005	02 457	02 961	03 514	04 115	04 762	05 453
0.3	0.06184	06 954	07 759	08 596	09 463	10 356	11 273	12 211	13 168	14 140
0.4	0.15127	16 124	17 132	18 146	19 166	20 190	21 217	22 244	23 271	24 296
0.5	0.25319	26 337	27 351	28 359	29 360	30 355	31 342	32 320	33 290	34 250
0.6	0.35200	36 141	37 071	37 991	38 900	39 798	40 684	41 560	42 424	43 277
0.7	0.44118	44 947	45 765	46 572	47 367	48 150	48 922	49 683	50 432	51 170
0.8	0.51897	52 613	53 318	54 012	54 695	55 368	56 030	56 682	57 324	57 956
0.9	0.58577	59 189	59 791	60 383	60 966	61 540	62 104	62 660	63 206	63 744
1.0	0.64273	64 794	65 306	65 811	66 307	66 795	67 275	67 748	68 213	68 670
1.1	0.69120	69 563	69 999	70 428	70 851	71 266	71 675	72 077	72 473	72 863
1.2	0.73247	73 624	73 996	74 361	74 721	75 075	75 424	75 767	76 105	76 438
1.3	0.76765	77 088	77 405	77 717	78 025	78 328	78 626	78 919	79 209	79 493
1.4	0.79773	80 049	80 321	80 589	80 852	81 112	81 368	81 620	81 868	82 112
1.5	0.82352	82 589	82 823	83 053	83 279	83 503	83 723	83 939	84 153	84 363
1.6	0.84570	84 774	84 975	85 173	85 369	85 561	85 751	85 938	86 122	86 303

Окончание табл. А.5

S	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.7	0.86482	86 659	86 832	87 004	87 173	87 339	87 503	87 665	87 824	87 981
1.8	0.88136	88 289	88 439	88 588	88 734	88 878	89 021	89 161	89 299	89 435
1.9	0.89570	89 703	89 833	89 962	90 089	90 215	90 338	90 460	90 581	90 699
2.0	0.90816	90 932	91 046	91 158	91 269	91 378	91 486	91 592	91 697	91 800
2.1	0.91902	92 003	92 102	92 200	92 297	92 392	92 486	92 579	92 671	92 761
2.2	0.92851	92 939	93 025	93 111	93 196	93 279	93 361	93 443	93 523	93 602
2.3	0.93680	93 757	93 833	93 908	93 983	94 056	94 128	94 199	94 269	94 339
2.4	0.94407	94 475	94 542	94 608	94 673	94 737	94 800	94 863	94 925	94 986
2.5	0.95046	95 105	95 164	95 222	95 279	95 336	95 391	95 446	95 501	95 554
2.6	0.95607	95 660	95 711	95 762	95 813	95 862	95 912	95 960	96 008	96 055
2.7	0.96102	96 148	96 194	96 239	96 283	96 327	96 370	96 413	96 455	96 497
2.8	0.96538	96 579	96 619	96 659	96 698	96 737	96 775	96 813	96 850	96 887
2.9	0.96923	96 959	96 995	97 030	97 064	97 099	97 132	97 166	97 199	97 231
3.0	0.97263	97 295	97 327	97 358	97 388	97 419	97 449	97 478	97 507	97 536
3.1	0.97565	97 593	97 621	97 648	97 675	97 702	97 729	97 755	97 781	97 806
3.2	0.97831	97 856	97 881	97 905	97 929	97 953	97 977	98 000	98 023	98 046
3.3	0.98068	98 090	98 112	98 134	98 155	98 176	98 197	98 217	98 238	98 258
3.4	0.98278	98 297	98 317	98 336	98 355	98 374	98 392	98 410	98 429	98 447
3.5	0.98464	98 482	98 499	98 516	98 533	98 549	98 566	98 582	98 598	98 614
3.6	0.98630	98 645	98 660	98 676	98 691	98 705	98 720	98 734	98 749	98 763
3.7	0.98777	98 791	98 804	98 818	98 831	98 844	98 857	98 870	98 883	98 895
3.8	0.98908	98 920	98 932	98 944	98 956	98 968	98 979	98 991	99 002	99 013
3.9	0.99024	99 035	99 046	99 057	99 067	99 078	99 088	99 098	99 108	99 118
4.0	0.99128	99 221	99 303	99 377	99 442	99 501	99 553	99 600	99 642	99 679
5.0	0.99713	99 742	99 769	99 793	99 814	99 834	99 851	99 866	99 880	99 892
6.0	0.99903	99 913	99 922	99 930	99 937	99 944	99 949	99 954	99 959	99 963
7.0	0.99967	99 970	99 973	99 976	99 978	99 981	99 983	99 984	99 986	99 987
8.0	0.99989	99 990	99 991	99 992	99 993	99 993	99 994	99 995	99 995	99 996
9.0	0.99996	–	–	–	–	–	–	–	–	–

Таблица А.6

Процентные точки распределения статистики Ω^2 Андерсона–Дарлинга при проверке простой гипотезы

Функция распределения	Верхние процентные точки				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
$a2(S)$	1.6212	1.9330	2.4924	3.0775	3.8781

Таблица А.7

Аппроксимация предельных распределений статистики Колмогорова при использовании метода максимального правдоподобия

Распределение случайной величины	При оценивании только масштабного параметра	При оценивании только параметра сдвига	При оценивании двух параметров
Экспоненциальное	γ(5.1092; 0.0861; 0.2950)	–	–
Полунормальное	γ(4.5462; 0.1001; 0.3100)	–	–
Рэлея	γ(5.1092; 0.0861; 0.2950)	–	–
Максвелла	γ (5.4566; 0.0794; 0.2870)	–	–
Лапласа	B_{III}(4.4680; 4.8450; 3.9105; 2.3784; 0.324)	B_{III}(5.3541; 7.2519; 2.5630; 1.7652; 0.302)	γ(6.2949; 0.0624; 0.2613)
Нормальное	B_{III}(4.8849; 5.2341; 3.6279; 2.3872; 0.303)	B_{III}(5.2604; 7.4327; 2.1872; 1.4774; 0.30)	γ(6.4721; 0.0580; 0.2620)
Логнормальное	B_{III}(4.8849; 5.2341; 3.6279; 2.3872; 0.303)	B_{III}(5.2604; 7.4327; 2.1872; 1.4774; 0.30)	γ(6.4721; 0.0580; 0.2620)
Коши	γ (3.0987; 0.1463; 0.3350)	γ(5.9860; 0.0780; 0.2528)	γ(5.3642; 0.0654; 0.2600)
Логистическое	γ(3.4954; 0.1411; 0.3325)	γ (7.6325; 0.0531; 0.2368)	γ (7.5402; 0.0451; 0.2422)
Наибольшего значения	γ(3.6805; 0.1355; 0.3350)	γ(5.2194; 0.0848; 0.2920)	γ(6.6012; 0.0563; 0.2598)
Наименьшего значения	γ(3.6805; 0.1355; 0.3350)	γ(5.2194; 0.0848; 0.2920)	γ(6.6012; 0.0563; 0.2598)
Вейбулла	γ(3.6805; 0.1355; 0.3350) [1)]	γ(5.2194; 0.0848; 0.2920)	γ(6.6012; 0.0563; 0.2598)

[1)] При оценивании параметра формы распределения Вейбулла. [2)] При оценивании параметра масштаба.

Таблица А.8

Процентные точки распределения статистики Колмогорова при использовании метода максимального правдоподобия

Распределение случайной величины	Оцениваемый параметр	Верхние процентные точки		
		0.9	0.95	0.99
Экспоненциальное	Масштабный	0.995	1.094	1.292
Полунормальное	Масштабный	1.051	1.160	1.381
Рэлея	Масштабный	0.995	1.094	1.292
Максвелла	Масштабный	0.969	1.062	1.251
Лапласа	Масштабный	1.177	1.313	1.587
	Сдвиг	0.957	1.045	1.223
	Два параметра	0.863	0.940	1.095
Нормальное	Масштабный	1.190	1.327	1.600
	Сдвиг	0.888	0.963	1.114
	Два параметра	0.835	0.909	1.057
Логнормальное	Масштабный	1.190	1.327	1.600
	Сдвиг	0.888	0.963	1.114
	Два параметра	0.835	0.909	1.057
Коши	Масштабный	1.137	1.275	1.550
	Сдвиг	0.975	1.070	1.260
	Два параметра	0.815	0.893	1.048
Логистическое	Масштабный	1.180	1.316	1.589
	Сдвиг	0.837	0.907	1.046
	Два параметра	0.746	0.805	0.923
Наибольшего значения	Масштабный	1.182	1.316	1.583
	Сдвиг	0.995	1.093	1.292
	Два параметра	0.824	0.895	1.037
Наименьшего значения	Масштабный	1.182	1.316	1.583
	Сдвиг	0.995	1.093	1.292
	Два параметра	0.824	0.895	1.037
Вейбулла	Формы	1.182	1.316	1.583
	Масштаба	0.995	1.093	1.292
	Два параметра	0.824	0.895	1.037

Таблица А.9

Аппроксимация предельных распределений минимума статистики Колмогорова (при использовании *MD*-оценок, минимизирующих статистику S_K)

Распределение случайной величины	При оценивании только масштабного параметра	При оценивании только параметра сдвига	При оценивании двух параметров
Экспоненциальное	B_{III}(10.1047;11.416;3.9886;2.000;0.220)	–	–
Полунормальное	B_{III}(8.4539;5.7642;3.9919;1.2506;0.250)	–	–
Рэлея	B_{III}(9.8786;11.869;3.7308;2.000;0.220)	–	–
Максвелла	B_{III}(9.9238;12.240;3.6690;2.000;0.220)	–	–
Лапласа	B_{III}(7.9966;2.8104;9.0972; 1.6714;0.2700)	B_{III}(10.1801;4.3354; 4.8401;1.0000;0.245)	B_{III}(8.0482;9.8170;2.4138;1.000; 0.230)
Нормальное	B_{III}(6.6224;3.7243;6.5824; 2.0000;0.2600)	B_{III}(6.9596;16.7982; 2.0840;2.0000;0.2500)	B_{III}(8.3672;23.3179;2.4614;2.000; 0.230)
Логнормальное	B_{III}(6.6224;3.7243;6.5824; 2.0000;0.2600)	B_{III}(6.9596;16.7982; 2.0840;2.0000;0.2500)	B_{III}(8.3672;23.3179;2.4614;2.000; 0.2300)
Коши	B_{III}(9.7322;3.3521;11.101; 2.0000;0.2500)	B_{III}(7.2906;11.383; 3.0026;2.0000;0.2500)	B_{III}(8.7725;18.409;3.1479;2.0000; 0.2250)
Логистическое	B_{III}(8.8854;3.4570;9.5489; 2.0000;0.2500)	B_{III}(7.1205;15.0816; 2.3913;2.0000;0.2500)	B_{III}(8.8222;29.569;2.0052;2.0000; 0.2200)
Наибольшего значения	B_{III}(4.8983;4.1137;5.0179; 2.0000;0.2950)	B_{III}(6.2543;14.3154; 2.2279;2.0000;0.2625)	B_{III}(8.3633;23.1522;2.4637;2.0000; 0.229)
Наименьшего значения	То же	То же	То же
Вейбулла	То же [1)]	То же [2)]	То же

[1)] При оценивании параметра формы распределения Вейбулла.. [2)] При оценивании параметра масштаба.

Таблица А.10

Процентные точки распределения минимума статистики Колмогорова (при использовании MD-оценок, минимизирующих статистику SK)

Распределение случайной величины	Оцениваемый параметр	Верхние процентные точки		
		0.9	0.95	0.99
Экспоненциальное	Масштабный	0.778	0.845	0.983
Полунормальное	Масштабный	0.795	0.865	1.005
Рэлея	Масштабный	0.778	0.844	0.981
Максвелла	Масштабный	0.772	0.837	0.971
Лапласа	Масштабный	1.076	1.208	1.488
	Сдвиг	0.773	0.837	0.966
	Два параметра	0.614	0.657	0.748
Нормальное	Масштабный	1.082	1.213	1.492
	Сдвиг	0.758	0.819	0.944
	Два параметра	0.610	0.652	0.740
Логнормальное	Масштабный	1.082	1.213	1.492
	Сдвиг	0.758	0.819	0.944
	Два параметра	0.610	0.652	0.740
Коши	Масштабный	1.071	1.210	1.489
	Сдвиг	0.805	0.875	1.017
	Два параметра	0.623	0.671	0.768
Логистическое	Масштабный	1.081	1.212	1.491
	Сдвиг	0.758	0.819	0.944
	Два параметра	0.598	0.639	0.720
Наибольшего значения	Масштабный	1.044	1.172	1.438
	Сдвиг	0.777	0.844	0.946
	Два параметра	0.611	0.652	0.741
Наименьшего значения	Масштабный	1.044	1.172	1.438
	Сдвиг	0.777	0.844	0.946
	Два параметра	0.611	0.652	0.741
Вейбулла	Формы	1.044	1.172	1.438
	Масштаба	0.777	0.844	0.946
	Два параметра	0.611	0.652	0.741

Таблица А.11

Аппроксимация предельных распределений статистики Смирнова при использовании метода максимального правдоподобия

Распределение случайной величины	При оценивании только масштабного параметра	При оценивании только параметра сдвига	При оценивании двух параметров
Экспоненциальное	ln N(0.2260; 0.6951)	–	–
Полунормальное	ln N(0.2050; 0.7718)	–	–
Рэлея	ln N(0.2248; 0.7248)	–	–
Максвелла	ln N(0.2462; 0.6779)	–	–
Лапласа	γ(0. 8539; 1.9952; 0.0000)	γ(1.7941; 0.8324; 0.0149)	γ(1.7071; .7234; 0.0170)
Нормальное	γ(0.8700; 2.0786; 0.0004)	γ(2.6428; 0.5089; 0.2056) ln N(0.2992; 0.5298)	ln N(0.1164; 0.5436)
Логнормальное	γ(0.8231; 2.1973; 0.0001)	Su(–2.5588; 1.6251; 0.4763; 0.2134)	Su(–2.2909; 1.3491; 0.3115; 0.3134)
Коши	γ(0.8839; 1.7507; 0.0019)	γ(1.4108; 1.0209; 0.0004)	γ(1.3546; 0.7565; 0.0005)
Логистическое	γ(0.8376; 2.1815; 0.0001)	Su(–2.9441; 1.7404; 0.3783; 0.3082)	ln N(0.0831; 0.4473)
Наибольшего значения	γ(0.8856; 2.0700; 0.0002)	ln N(0.2414; 0.7017)	ln N(0.1501; 0.5108)
Наименьшего значения	γ(0.8856; 0.4831; 0.0002)	ln N(0.2414; 0.7017)	ln N(0.1501; 0.5108)
Вейбулла	γ(0.8856; 0.4831; 0.0002) [1)]	ln N(0.2414; 0.7017) [2)]	ln N(0.1501; 0.5108)

[1)] При оценивании параметра формы распределения Вейбулла.
[2)] При оценивании параметра масштаба распределения Вейбулла.

Таблица А.12

Процентные точки распределения статистики Смирнова при использовании метода максимального правдоподобия

Распределение случайной величины	Оцениваемый параметр	Верхние процентные точки		
		0.9	0.95	0.99
Экспоненциальное	Масштабный	3.055	3.933	6.316
Полунормальное	Масштабный	3.301	4.369	7.393
Рэлея	Масштабный	3.170	4.125	6.759
Максвелла	Масштабный	3.050	3.901	6.192
Лапласа	Масштабный	4.078	5.399	8.503
	Сдвиг	2.983	3.801	5.823
	Два параметра	2.434	3.016	4.450
Нормальное	Масштабный	4.309	5.693	8.940
	Сдвиг	2.688	3.221	4.416
	Два параметра	2.286	2.810	4.058
Логнормальное	Масштабный	4.368	5.807	9.200
	Сдвиг	2.721	3.360	5.014
	Два параметра	2.503	3.185	5.081
Коши	Масштабный	3.675	4.846	7.589
	Сдвиг	3.047	3.831	5.607
	Два параметра	2.190	2.763	4.067
Логистическое	Масштабный	4.488	6.022	8.740
	Сдвиг	2.436	2.937	4.207
	Два параметра	1.928	2.268	3.076
Наибольшего значения	Масштабный	4.349	5.735	8.980
	Сдвиг	3.036	3.918	6.321
	Два параметра	2.236	2.692	3.813
Наименьшего значения	Масштабный	4.349	5.735	8.980
	Сдвиг	3.036	3.918	6.321
	Два параметра	2.236	2.692	3.813
Вейбулла	Формы	4.349	5.735	8.980
	Масштаба	3.036	3.918	6.321
	Два параметра	2.236	2.692	3.813

Таблица А.13

Аппроксимация предельных распределений статистики ω^2 Крамера–Мизеса–Смирнова при использовании метода максимального правдоподобия

Распределение случайной величины	При оценивании только масштабного параметра	При оценивании только параметра сдвига	При оценивании двух параметров
Экспоненциальное	Sb(3.3738;1.2145; 1.0792; 0.0110)	–	–
Полунормальное	Sb(3.5270; 1.1515; 1.5527; 0.0121)	–	–
Рэлея	Sb(3.3738;1.2145; 1.0792; 0.0110)	–	–
Максвелла	Sb(3.3531; 1.2201; 0.9786; 0.0118)	–	–
Лапласа	B_3(3.9800; 1.4667; 38.0035; 1.13; 0.0111)	B_{III}(3.3130; 3.8338; 10.097; 0.7517; 0.011)	B_{III}(4.489; 3.7706; 17.577; 0.7065; 0.0085)
Нормальное	Sb(3.153; 0.9448; 2.5477; 0.0160)	B_{III}(4.433; 3.6365; 13.920; 0.6632; 0.0084)	B_{III}(4.1153; 4.1748; 11.035; 0.5116; 0.009)
Логнормальное	Sb(3.153; 0.9448; 2.5477; 0.0160)	B_{III}(4.433; 3.6365; 13.920; 0.6632; 0.0084)	B_{III}(4.1153; 4.1748; 11.035; 0.5116; 0.009)
Коши	Sb(3.1895; 0.9134; 2.6900; 0.0130)	Sb((2.3588; 1.0732; 0.5950; 0.0129)	Sb(3.4364; 1.0678; 1.0000; 0.0110)
Логистическое	Sb(3.2637; 0.9581; 2.7046; 0.0138)	Sb(4.0026; 1.2853; 1.0000; 0.0122)	Sb(3.2137; 1.3612; 0.3600; 0.0105)
Наибольшего значения	Sb(3.3431; 0.9817; 2.7533; 0.0148)	Sb(3.4978; 1.2236; 1.1632; 0.0110)	Sb(3.3854; 1.4453; 0.4986; 0.0070)
Наименьшего значения	Sb(3.3431; 0.9817; 2.7533; 0.0148)	Sb(3.4978; 1.2236; 1.1632; 0.0110)	Sb(3.3854; 1.4453; 0.4986; 0.0070)
Вейбулла	Sb(3.3431; 0.9817; 2.7533; 0.0148) [1)]	Sb(3.4978; 1.2236; 1.1632; 0.0110) [2)]	Sb(3.3854; 1.4453; 0.4986; 0.0070)
[1)] При оценивании параметра формы распределения Вейбулла. [2)] При оценивании параметра масштаба.			

Таблица А.14

Процентные точки распределения статистики ω^2 Крамера–Мизеса–Смирнова при использовании метода максимального правдоподобия

Распределение случайной величины	Оцениваемый параметр	Верхние процентные точки		
		0.9	0.95	0.99
Экспоненциальное	Масштабный	0.174	0.221	0.337
Полунормальное	Масштабный	0.205	0.266	0.415
Рэлея	Масштабный	0.174	0.221	0.337
Максвелла	Масштабный	0.162	0.204	0.306
Лапласа	Масштабный	0.323	0.439	0.719
	Сдвиг	0.151	0.187	0.268
	Два параметра	0.115	0.144	0.213
Нормальное	Масштабный	0.327	0.442	0.725
	Сдвиг	0.134	0.165	0.238
	Два параметра	0.103	0.126	0.178
Логнормальное	Масштабный	0.327	0.443	0.727
	Сдвиг	0.134	0.165	0.238
	Два параметра	0.103	0.126	0.178
Коши	Масштабный	0.316	0.430	0.711
	Сдвиг	0.172	0.216	0.319
	Два параметра	0.129	0.170	0.271
Логистическое	Масштабный	0.323	0.438	0.719
	Сдвиг	0.119	0.148	0.216
	Два параметра	0.081	0.098	0.135
Наибольшего значения	Масштабный	0.320	0.431	0.704
	Сдвиг	0.174	0.221	0.336
	Два параметра	0.102	0.124	0.174
Наименьшего значения	Масштабный	0.320	0.431	0.704
	Сдвиг	0.174	0.221	0.336
	Два параметра	0.102	0.124	0.174
Вейбулла	Формы	0.320	0.431	0.704
	Масштаба	0.174	0.221	0.336
	Два параметра	0.102	0.124	0.174

Таблица А.15

Аппроксимация предельных распределений минимума статистики ω^2 Крамера–Мизеса–Смирнова (при использовании *MD*-оценок, минимизирующих статистику S_ω)

Распределение случайной величины	При оценивании только масштабного параметра	При оценивании только параметра сдвига	При оценивании двух параметров
Экспоненциальное	B_{III}(4.9447; 3.3321; 17.9475; 0.6294; 0.0076)	–	–
Полунормальное	B_{III}(5.0298; 3.1391; 20.2534; 0.6748; 0.0076)	–	–
Рэлея	B_{III}(4.9447; 3.3321; 17.9475; 0.6294; 0.0076)	–	–
Максвелла	B_{III}(4.2522; 3.3149; 14.4364; 0.5677; 0.0091)	–	–
Лапласа	B_{III}(6.9738; 1.2431; 64.671; 0.8500; 0.0070)	B_{III}(3.4294; 4.5613; 15.535; 1.000; 0.0105)	B_{III}((5.9209; 6.2025; 29.691; 1.00; 0.006)
Нормальное	B_{III}(4.2408; 1.3235; 43.1064; 1.0024; 0.0098)	B_{III}(8.0893; 2.7420; 22.762; 0.400; 0.0055)	B_{III}(7.1085; 4.6558; 18.160; 0.400; 0.0055)
Логнормальное	B_{III}(4.2408; 1.3235; 43.1064; 1.0024; 0.0098)	B_{III}(8.0893; 2.7420; 22.762; 0.400; 0.0055)	B_{III}(7.1085; 4.6558; 18.160; 0.400; 0.0055)
Коши	B_{III}(6.9689; 1.2312; 66.646; 0.8532; 0.007)	B_{III}(7.7819 ;2.6634; 21.488; 0.400; 0.0055)	B_{III}(7.7609; 3.9539; 23.6617; 0.400; 0.0055)
Логистическое	B_{III}(4.3037; 1.3262; 43.393; 1.000; 0.009)	B_{III}(8.0715; 2.7628; 22.791; 0.400; 0.0055)	B_{III}(7.0691; 4.8564; 17.781; 0.400; 0.0055)
Наибольшего значения	B_{III}(4.4554; 1.5367; 40.594; 1.000; 0.0085)	B_{III}(9.0419; 2.5131; 26.636; 0.400; 0.005)	B_{III}(5.4459; 4.7659; 14.016; 0.400; 0.007)
Наименьшего значения	То же	То же	То же
Вейбулла	То же [1]	То же [2]	То же

[1] При оценивании параметра формы распределения Вейбулла.. [2] При оценивании параметра масштаба.

Таблица А.16

Процентные точки распределения минимума статистики ω^2 Крамера–Мизеса–Смирнова (при использовании *MD*-оценок, минимизирующих статистику S_ω)

Распределение случайной величины	Оцениваемый параметр	Верхние процентные точки		
		0.9	0.95	0.99
Экспоненциальное	Масштабный	0.126	0.157	0.235
Полунормальное	Масштабный	0.133	0.168	0.252
Рэлея	Масштабный	0.126	0.157	0.235
Максвелла	Масштабный	0.123	0.153	0.230
Лапласа	Масштабный	0.315	0.429	0.711
	Сдвиг	0.119	0.147	0.216
	Два параметра	0.070	0.084	0.118
Нормальное	Масштабный	0.317	0.434	0.707
	Сдвиг	0.118	0.147	0.215
	Два параметра	0.071	0.085	0.118
Логнормальное	Масштабный	0.317	0.434	0.707
	Сдвиг	0.118	0.147	0.215
	Два параметра	0.071	0.085	0.118
Коши	Масштабный	0.314	0.428	0.710
	Сдвиг	0.124	0.153	0.224
	Два параметра	0.074	0.090	0.130
Логистическое	Масштабный	0.317	0.433	0.707
	Сдвиг	0.117	0.145	0.213
	Два параметра	0.068	0.082	0.113
Наибольшего значения	Масштабный	0.274	0.368	0.603
	Сдвиг	0.125	0.157	0.234
	Два параметра	0.071	0.085	0.119
Наименьшего значения	Масштабный	0.262	0.368	0.698
	Сдвиг	0.125	0.157	0.234
	Два параметра	0.071	0.085	0.119
Вейбулла	Формы	0.262	0.368	0.698
	Масштаба	0.125	0.157	0.234
	Два параметра	0.071	0.085	0.119

Таблица А.17

Аппроксимация предельных распределений статистики Ω^2 Андерсона–Дарлинга при использовании метода максимального правдоподобия

Распределение случайной величины	При оценивании только масштабного параметра	При оценивании только параметра сдвига	При оценивании двух параметров
Экспоненциальное	Sb(3.8386; 1.3429; 7.5000; 0.0900)	–	–
Полунормальное	Sb(4.2019; 1.2918; 11.5000; 0.1000)	–	–
Рэлея	Sb(3.8386; 1.3429; 7.5000; 0.0900)	–	–
Максвелла	Sb(3.9591; 1.3296; 7.8000; 0.1010)	–	–
Лапласа	B_{III}(4.0842; 1.7532; 28.1434; 6.00; 0.105)	B_{III}(4.2734; 4.0281; 10.9008; 4.9365; 0.085)	B_{III}(5.3576; 3.869; 17.215; 4.2386; 0.073)
Нормальное	B_{III}(3.4638; 2.330; 35.7115; 12.603; 0.105)	B_{III}(4.1081; 5.0598; 16.9721; 7.9065; 0.09)	B_{III}(4.7262; 4.6575; 9.4958; 2.717; 0.0775)
Логнормальное	B_{III}(3.4638; 2.330; 35.7115; 12.603; 0.105)	B_{III}(4.1081; 5.0598; 16.9721; 7.9065; 0.09)	B_{III}(4.7262; 4.6575; 9.4958; 2.717; 0.0775)
Коши	Sb(3.7830; 1.0678; 18.0000; 0.1100)	Sb(3.4814; 1.2375; 7.8100; 0.1000)	Sb(3.2902; 1.1290; 5.8367 ; 0.0990)
Логистическое	Sb(3.5159; 1.0544; 14.7484; 0.1167)	Sb(5.1316; 1.5681; 10.0000; 0.0651)	Sb(3.4091; 1.4337; 2.4482; 0.0950)
Наибольшего значения	Sb(3.5122; 1.0640; 14.4957; 0.1250)	Sb(4.7988; 1.4023; 13.0000; 0.0850)	Sb(3.4830; 1.5138; 3.0000; 0.0700)
Наименьшего значения	Sb(3.5122; 1.0640; 14.4957; 0.1250)	Sb(4.7988; 1.4023; 13.0000; 0.0850)	Sb(3.4830; 1.5138; 3.0000; 0.0700)
Вейбулла	Sb(3.5122; 1.0640; 14.4957; 0.1250) [1)]	Sb(4.7988; 1.4023; 13.0000; 0.0850) [2)]	Sb(3.4830; 1.5138; 3.0000; 0.0700)

[1)] При оценивании параметра формы распределения Вейбулла.
[2)] При оценивании параметра масштаба распределения Вейбулла.

Таблица А.18

Процентные точки распределения статистики Ω^2 Андерсона–Дарлинга при использовании метода максимального правдоподобия

Распределение случайной величины	Оцениваемый параметр	Верхние процентные точки		
		0.9	0.95	0.99
Экспоненциальное	Масштабный	1.060	1.319	1.954
Полунормальное	Масштабный	1.188	1.499	2.267
Рэлея	Масштабный	1.060	1.319	1.954
Максвелла	Масштабный	1.010	1.247	1.832
Лапласа	Масштабный	1.725	2.290	3.685
	Сдвиг	1.071	1.302	1.837
	Два параметра	0.798	0.982	1.439
Нормальное	Масштабный	1.743	2.309	3.704
	Сдвиг	0.892	1.087	1.552
	Два параметра	0.630	0.750	1.032
Логнормальное	Масштабный	1.745	2.310	3.708
	Сдвиг	0.892	1.087	1.551
	Два параметра	0.630	0.751	1.034
Коши	Масштабный	1.716	2.277	3.673
	Сдвиг	1.215	1.512	2.211
	Два параметра	0.948	1.226	1.913
Логистическое	Масштабный	1.724	2.285	3.682
	Сдвиг	0.856	1.043	1.495
	Два параметра	0.562	0.665	0.903
Наибольшего значения	Масштабный	1.723	2.273	3.634
	Сдвиг	1.059	1.318	1.952
	Два параметра	0.634	0.755	1.040
Наименьшего значения	Масштабный	1.723	2.273	3.634
	Сдвиг	1.059	1.318	1.952
	Два параметра	0.634	0.755	1.040
Вейбулла	Формы	1.723	2.273	3.634
	Масштаба	1.059	1.318	1.952
	Два параметра	0.634	0.755	1.040

Таблица А.19

Аппроксимация предельных распределений минимума статистики Ω^2 Андерсона–Дарлинга (при использовании *MD*-оценок, минимизирующих статистику S_Ω)

Распределение случайной величины	При оценивании только масштабного параметра	При оценивании только параметра сдвига	При оценивании двух параметров
Экспоненциальное	B_{III}(5.7300; 2.8473; 14.019; 2.800; 0.0756)	–	–
Полунормальное	B_{III}(5.5443; 2.7125; 13.759; 2.800; 0.0756)	–	–
Рэлея	B_{III}(5.7037; 2.8898; 13.776; 2.800; 0.0756)	–	–
Максвелла	B_{III}(5.7025; 2.9409; 13.656; 2.800; 0.0756)	–	–
Лапласа	B_{III}(2.9843; 1.7527; 21.374; 6.0167; 0.1200)	B_{III}(6.0527; 3.0151; 12.770; 2.600; 0.070)	B_{III}(5.6664; 4.9207; 11.124; 2.600; 0.065)
Нормальное	B_{III}(3.0806; 1.7302; 22.281; 6.0167; 0.1200)	B_{III}(6.2042; 3.0621; 13.256; 2.600; 0.0700)	B_{III}(5.9430; 4.9562; 11.832; 2.600; 0.065)
Логнормальное	B_{III}(3.0806; 1.7302; 22.281; 6.0167; 0.1200)	B_{III}(6.2042; 3.0621; 13.256; 2.600; 0.070)	B_{III}(5.9430; 4.9562; 11.832; 2.600; 0.065)
Коши	B_{III}(3.0806; 1.7514; 22.281; 6.0167; 0.1200)	B_{III}(6.0442; 2.7944; 13.006; 2.600; 0.070)	B_{III}(6.3298; 3.6877; 16.016; 2.600; 0.065)
Логистическое	B_{III}(3.0806; 1.7426; 22.281; 6.0167; 0.1200)	B_{III}(6.0554; 3.1354; 12.724; 2.600; 0.070)	B_{III}(5.8164; 5.2684; 11.109, 2.600, 0.065)
Наибольшего значения	B_{III}(5.4774; 1.8864; 36.593; 6.200; 0.080)	B_{III}(6.2044; 3.0961; 13.251; 2.600; 0.070)	B_{III}(5.7944; 5.1240; 11.040; 2.600; 0.065)
Наименьшего значения	То же	То же	То же
Вейбулла	То же [1)]	То же [2)]	То же

[1)] При оценивании параметра формы распределения Вейбулла.
[2)] При оценивании параметра масштаба распределения Вейбулла.

Таблица А.20

Процентные точки распределения минимума статистики Ω^2 Андерсона–Дарлинга (при использовании *MD*-оценок, минимизирующих статистику S_Ω)

Распределение случайной величины	Оцениваемый параметр	Верхние процентные точки		
		0.9	0.95	0.99
Экспоненциальное	Масштабный	0.915	1.124	1.638
Полунормальное	Масштабный	0.960	1.185	1.744
Рэлея	Масштабный	0.912	1.120	1.634
Максвелла	Масштабный	0.896	1.097	1.606
Лапласа	Масштабный	1.703	2.284	3.646
	Сдвиг	0.879	1.073	1.532
	Два параметра	0.568	0.676	0.933
Нормальное	Масштабный	1.708	2.288	3.654
	Сдвиг	0.864	1.051	1.505
	Два параметра	0.555	0.657	0.896
Логнормальное	Масштабный	1.708	2.288	3.654
	Сдвиг	0.864	1.051	1.505
	Два параметра	0.555	0.657	0.896
Коши	Масштабный	1.703	2.284	3.647
	Сдвиг	0.942	1.143	1.629
	Два параметра	0.632	0.771	1.108
Логистическое	Масштабный	1.703	2.267	3.644
	Сдвиг	0.855	1.042	1.505
	Два параметра	0.540	0.638	0.870
Наибольшего значения	Масштабный	1.614	2.125	3.412
	Сдвиг	0.855	1.042	1.505
	Два параметра	0.557	0.661	0.906
Наименьшего значения	Масштабный	1.614	2.125	3.412
	Сдвиг	0.855	1.042	1.505
	Два параметра	0.557	0.661	0.906
Вейбулла	Формы	1.614	2.125	3.412
	Масштаба	0.855	1.042	1.505
	Два параметра	0.557	0.661	0.906

Таблица А.21

Верхние процентные точки и модели предельных распределений статистик непараметрических критериев согласия в случае проверки гипотез относительно распределений Sb-Джонсона при использовании ОМП

Оцениваемые параметры	Процентные точки			Модель
	0.9	0.95	0.99	
Для критерия Колмогорова				
θ_0	0.888	0.963	1.115	B_{III}(6.3484; 7.4913; 2.3663; 1.4790; 0.27)
θ_1	1.189	1.326	1.600	B_{III}(6.8242; 4.7737; 5.2621; 2.3878; 0.27)
θ_0 , θ_1	0.836	0.909	1.058	B_{III}(6.6559;8.1766; 2.9405; 1.6143; 0.27)
Для критерия Крамера–Мизеса–Смирнова				
θ_0	0.134	0.165	0.238	B_{III}(4.2304; 3.8058; 13.1934; 0.6908; 0.0086)
θ_1	0.327	0.442	0.724	B_{III}(2.9153; 2.0048; 33.4135;2.07821; 0.0114)
θ_0 , θ_1	0.104	0.126	0.179	B_{III}(4.3897; 4.0574; 12.1009; 0.5119; 0.0086)
Для критерия Андерсона–Дарлинга				
θ_0	0.893	1.086	1.553	B_{III}(4.2657; 4.3788; 11.4946; 4.6551; 0.084)
θ_1	1.741	2.309	3.702	B_{III}(4.1703; 2.3363; 42.0833; 12.6019; 0.088)
θ_0 , θ_1	0.631	0.751	1.034	B_{III}(4.0891; 5.9708; 9.6497; 4.0000 ; 0.082)

Таблица А.22

Верхние процентные точки и модели предельных распределений статистик непараметрических критериев согласия в случае проверки гипотез относительно распределений Sl-Джонсона при использовании ОМП

Оцениваемые параметры	Процентные точки			Модель
	0.9	0.95	0.99	
Для критерия Колмогорова				
θ_0	0.888	0.963	1.115	B_{III}(6.3484; 7.4913; 2.3663; 1.4790; 0.27)
θ_1	1.189	1.326	1.600	B_{III}(6.8242; 4.7737; 5.2621; 2.3878; 0.27)
θ_2	0.888	0.963	1.115	B_{III}(6.3484; 7.4913; 2.3663; 1.4790; 0.27)
θ_0 , θ_1	0.836	0.909	1.058	B_{III}(6.6559; 8.1766; 2.9405; 1.6143; 0.27)
θ_0 , θ_2	0.888	0.963	1.115	B_{III}(6.3484; 7.4913; 2.3663; 1.4790; 0.27)
θ_1 , θ_2	0.836	0.909	1.058	B_{III}(6.6559; 8.1766; 2.9405; 1.6143; 0.27)
θ_0 , θ_1 , θ_2	0.836	0.909	1.058	B_{III}(6.6559; 8.1766; 2.9405; 1.6143; 0.27)
Для критерия Крамера–Мизеса–Смирнова				
θ_0	0.134	0.165	0.238	B_{III}(4.2304; 3.8058; 13.1934; 0.6908; 0.0086)
θ_1	0.327	0.442	0.724	B_{III}(2.9153; 2.0048; 33.4135; 2.07821; 0.0114)
θ_2	0.134	0.165	0.238	B_{III}(4.2304; 3.8058; 13.1934; 0.6908; 0.0086)
θ_0 , θ_1	0.104	0.126	0.179	B_{III}(4.3897; 4.0574; 12.1009; 0.5119; 0.0086)
θ_0 , θ_2	0.134	0.165	0.238	B_{III}(4.2304; 3.8058; 13.1934; 0.6908; 0.0086)
θ_1 , θ_2	0.104	0.126	0.179	B_{III}(4.3897; 4.0574; 12.1009; 0.5119; 0.0086)
θ_0 , θ_1 , θ_2	0.104	0.126	0.179	B_{III}(4.3897; 4.0574; 12.1009; 0.5119; 0.0086)
Для критерия Андерсона–Дарлинга				
θ_0	0.893	1.086	1.553	B_{III}(4.2657; 4.3788; 11.4946; 4.6551; 0.084)
θ_1	1.741	2.309	3.702	B_{III}(4.1703; 2.3363; 42.0833; 12.6019; 0.088)
θ_2	0.893	1.086	1.553	B_{III}(4.2657; 4.3788; 11.4946; 4.6551; 0.084)
θ_0 , θ_1	0.631	0.751	1.034	B_{III}(4.0891; 5.9708; 9.6497; 4.0000; 0.082)
θ_0 , θ_2	0.893	1.086	1.553	B_{III}(4.2657; 4.3788; 11.4946; 4.6551; 0.084)
θ_1 , θ_2	0.631	0.751	1.034	B_{III}(4.0891; 5.9708; 9.6497; 4.0000; 0.082)
θ_0 , θ_1 , θ_2	0.631	0.751	1.034	B_{III}(4.0891; 5.9708; 9.6497; 4.0000; 0.082)

Таблица А.23

Верхние процентные точки и модели предельных распределений статистик непараметрических критериев согласия в случае проверки гипотез относительно распределений Su-Джонсона при использовании ОМП

Оцениваемые параметры	Процентные точки			Модель
	0.9	0.95	0.99	
Для критерия Колмогорова				
θ_0	0.888	0.963	1.115	B_{III}(6.3484; 7.4913; 2.3663; 1.4790; 0.27)
θ_1	1.189	1.326	1.600	B_{III}(6.8242; 4.7737; 5.2621; 2.3878; 0.27)
θ_2	1.161	1.300	1.576	B_{III}(5.3417; 4.6440; 4.7448; 2.3802; 0.29)
θ_3	0.880	0.960	1.122	B_{III}(6.6252; 7.4025; 3.0590; 1.6516; 0.27)
θ_0 , θ_1	0.836	0.909	1.058	B_{III}(6.4792; 7.0243; 2.8437; 1.4260; 0.27)
θ_0 , θ_2	0.798	0.872	1.024	B_{III}(6.4496; 6.7714; 3.3119; 1.4226; 0.27)
θ_0 , θ_3	0.802	0.875	1.023	B_{III}(6.3069; 6.1065; 3.2916; 1.3317; 0.27)
θ_1 , θ_2	1.142	1.282	1.561	B_{III}(5.9751; 4.4559; 5.6810; 2.4123; 0.27)
θ_1 , θ_3	0.792	0.858	0.994	B_{III}(6.4839; 7.0152; 2.7376; 1.2838; 0.27)
θ_2 , θ_3	0.733	0.791	0.910	B_{III}(6.2438; 6.9161; 2.5011; 1.0904; 0.27)
θ_0 , θ_1 , θ_2	0.776	0.851	1.007	B_{III}(6.2414; 6.4027; 3.7458; 1.4361; 0.27)
θ_0 , θ_1 , θ_3	0.720	0.780	0.901	B_{III}(6.4262; 6.9732; 2.7325; 1.1317; 0.26)
θ_0 , θ_2 , θ_3	0.658	0.706	0.806	B_{III}(6.1239; 7.9516; 2.24033; 0.9839; 0.26)
θ_1 , θ_2 , θ_3	0.704	0.760	0.878	B_{III}(7.1354; 8.0363; 2.7466; 1.1766; 0.25)
θ_0 , θ_1 , θ_2 , θ_3	0.622	0.666	0.755	B_{III}(6.6889; 8.1712; 2.3857; 0.9291; 0.25)
Для критерия Крамера–Мизеса–Смирнова				
θ_0	0.134	0.165	0.238	B_{III}(3.6736; 3.9355; 11.2146; 0.6908; 0.01)
θ_1	0.327	0.442	0.724	B_{III}(2.9153; 2.0048; 33.4135; 2.07821; 0.0114)
θ_2	0.318	0.433	0.716	B_{III}(2.2077; 1.7250; 28.4959; 1.75; 0.015)
θ_3	0.125	0.154	0.225	B_{III}(3.6990; 3.8775; 11.9942; 0.6601; 0.01)
θ_0 , θ_1	0.103	0.126	0.178	B_{III}(4.3897; 4.0574; 12.1009; 0.5119; 0.0086)
θ_0 , θ_2	0.090	0.110	0.161	B_{III}(5.2030; 3.9325; 15.6968; 0.4659; 0.0075)

Окончание табл. А.23

Оцениваемые параметры	Процентные точки			Модель
	0.9	0.95	0.99	
θ_0 , θ_3	0.104	0.133	0.203	B_{III}(5.9540; 3.1023; 30.6943; 0.6380; 0.0071)
θ_1 , θ_2	0.314	0.428	0.711	B_{III}(2.4905; 1.6985; 45.9674; 2.3084; 0.012)
θ_1 , θ_3	0.094	0.113	0.158	B_{III}(4.6011; 5.7370; 19.1580; 1.0; 0.0075)
θ_2 , θ_3	0.080	0.096	0.137	B_{III}(4.7686; 4.6085; 11.1421; 0.3929; 0.0075)
θ_0 , θ_1 , θ_2	0.083	0.104	0.155	B_{III}(5.2574; 3.6440; 19.9213; 0.4707; 0.0075)
θ_0 , θ_1 , θ_3	0.071	0.086	0.122	B_{III}(5.7750; 4.7935; 18.1182; 0.4777; 0.0065)
θ_0 , θ_2 , θ_3	0.056	0.066	0.089	B_{III}(7.3500; 5.4726; 13.7452; 0.2883; 0.0052)
θ_1 , θ_2 , θ_3	0.073	0.089	0.130	B_{III}(5.6379; 4.0985; 18.5518; 0.42100; 0.007)
θ_0 , θ_1 , θ_2 , θ_3	0.048	0.056	0.075	B_{III}(6.9739; 6.6406; 13.7433; 0.3151; 0.0052)
Для критерия Андерсона–Дарлинга				
θ_0	0.892	1.087	1.552	B_{III}(4.2329; 4.5369; 10.8807; 4.6551; 0.082)
θ_1	1.743	2.309	3.704	B_{III}(4.1703; 2.3363;42.0833; 12.6019; 0.088)
θ_2	1.707	2.275	3.667	B_{III}(2.6348; 1.9774; 21.3842; 7.75; 0.125)
θ_3	0.952	1.161	1.648	B_{III}(3.5597; 4.9656; 11.4180; 6.5202; 0.092)
θ_0 , θ_1	0.630	0.750	1.032	B_{III}(4.0891; 5.9708; 9.6497; 4.0000 ; 0.082)
θ_0 , θ_2	0.576	0.689	0.961	B_{III}(5.5368; 4.9114; 13.1278; 3.0625; 0.07)
θ_0 , θ_3	0.737	0.920	1.386	B_{III}(5.6629; 3.4912; 25.1600; 4.5052; 0.07)
θ_1 , θ_2	1.666	2.232	3.627	B_{III}(3.8896; 1.6253; 31.1820; 5.80; 0.09)
θ_1 , θ_3	0.694	0.842	1.200	B_{III}(4.6199; 5.2874; 19.2708; 6.5610; 0.074)
θ_2 , θ_3	0.642	0.935	1.140	B_{III}(4.4276; 4.30288; 14.6688; 3.7865; 0.08)
θ_0 , θ_1 , θ_2	0.518	0.627	0.898	B_{III}(5.5158; 4.3512; 14.7750; 2.6199; 0.067)
θ_0 , θ_1 , θ_3	0.454	0.536	0.733	B_{III}(5.3306; 5.8858; 10.7581; 2.5087; 0.065)
θ_0 , θ_2 , θ_3	0.395	0.459	0.606	B_{III}(5.7098; 6.8325; 7.9837; 1.8803; 0.06)
θ_1 , θ_2 , θ_3	0.585	0.729	1.087	B_{III}(5.1840; 3.2993; 19.3614; 2.7865; 0.073)
θ_0 , θ_1 , θ_2 , θ_3	0.329	0.378	0.488	B_{III}(7.1015; 5.8708; 7.1323; 1.0517; 0.05)

Таблица А.24

Верхние процентные точки и модели предельных распределений статистики критерия Колмогорова при проверке гипотез относительно гамма-распределения при использовании ОМП

Значение параметра формы	Оцениваемые параметры	Процентные точки			Модель
		0.9	0.95	0,99	
0.3	Масштаба	1.096	1.211	1.444	B_{III}(6.6871; 4.8368; 4.4047; 1.9440; 0.281)
	Формы	0.976	1.070	1.262	B_{III}(6.4536; 5.7519; 3.3099; 1.6503; 0.280)
	Два параметра	0.905	0.990	1.162	B_{III}(6.9705; 5.6777; 3.6297; 1.5070; 0.270)
0.5	Масштаба	1.051	1.160	1.379	B_{III}(6.9356; 5.0081; 4.3582; 1.8470; 0.280)
	Формы	0.961	1.052	1.236	B_{III}(6.3860; 5.9685; 3.1228; 1.6154; 0.280)
	Два параметра	0.884	0.965	1.131	B_{III}(6.4083; 5.9339; 3.2063; 1.4483; 0.2774)
1.0	Масштаба	0.994	1.095	1.299	B_{III}(6.7187; 5.3740; 3.7755; 1.6875; 0.282)
	Формы	0.936	1.022	1.191	B_{III}(6.1176; 6.4704; 2.6933; 1.5501; 0.280)
	Два параметра	0.862	0.940	1.097	B_{III}(5.6031; 6.1293; 2.7065; 1.3607; 0.2903)
2.0	Масштаба	0.952	1.044	1.228	B_{III}(5.8359; 22.6032; 2.1921; 4.00; 0.282)
	Формы	0.915	0.995	1.155	B_{III}(6.1387; 6.5644; 2.6021; 1.4840; 0.280)
	Два параметра	0.849	0.924	1.077	B_{III}(5.8324; 6.1446; 2.7546; 1.3280; 0.2862)
3.0	Масштаба	0.933	1.020	1.200	B_{III}(5.9055; 24.4312; 2.0996; 4.00; 0.282)
	Формы	0.906	0.985	1.140	B_{III}(6.1221; 6.6131; 2.5536; 1.4590; 0.280)
	Два параметра	0.845	0.919	1.070	B_{III}(6.0393; 6.1276; 2.8312; 1.3203; 0.2827)
4.0	Масштаба	0.923	1.008	1.181	B_{III}(5.9419; 27.1264; 1.9151; 4.00; 0.282)
	Формы	0.901	0.980	1.132	B_{III}(6.0827; 6.7095; 2.4956; 1.4494; 0.280)
	Два параметра	0.843	0.916	1.066	B_{III}(6.1584; 6.1187; 2.8748; 1.3170; 0.2807)
5.0	Масштаба	0.917	1.000	1.170	B_{III}(5.8774; 30.0692; 1.7199; 4.00; 0.282)
	Формы	0.899	0.977	1.127	B_{III}(6.0887; 6.7265; 2.4894; 1.4432; 0.280)
	Два параметра	0.842	0.915	1.063	B_{III}(6.1957; 6.1114; 2.8894; 1.3140; 0.2801)

Таблица А.25

Верхние процентные точки и модели предельных распределений статистики критерия Крамера–Мизеса–Смирнова при проверке гипотез относительно гамма-распределения при использовании ОМП

Значение параметра формы	Оцениваемые параметры	Процентные точки			Модель
		0.9	0.95	0.99	
0.3	Масштаба	0.233	0.305	0.482	B_{III}(3.2722; 1.9595; 16.1768; 0.750; 0.013)
	Формы	0.166	0.209	0.316	B_{III}(3.0247; 3.2256; 11.113; 0.7755; 0.0125)
	Два параметра	0.127	0.158	0.233	B_{III}(2.3607; 4.0840; 7.0606; 0.6189; 0.0145)
0.5	Масштаба	0.205	0.264	0.413	B_{III}(3.2296; 2.1984; 14.3153; 0.700; 0.013)
	Формы	0.159	0.199	0.298	B_{III}(3.0143; 3.3504; 10.095; 0.7214; 0.0125)
	Два параметра	0.119	0.146	0.212	B_{III}(2.7216; 3.9844; 7.4993; 0.5372; 0.013)
1.0	Масштаба	0.175	0.220	0.336	B_{III}(3.1201; 2.5460; 11.1200; 0.600; 0.013)
	Формы	0.149	0.186	0.273	B_{III}(2.9928; 3.4716; 8.8275; 0.6346; 0.0125)
	Два параметра	0.111	0.136	0.194	B_{III}(3.0000; 3.8959; 7.3247; 0.4508; 0.012)
2.0	Масштаба	0.155	0.193	0.288	B_{III}(2.9463; 3.1124; 9.1160; 0.600; 0.013)
	Формы	0.142	0.176	0.256	B_{III}(2.9909; 3.5333; 8.2010; 0.5786; 0.0125)
	Два параметра	0.107	0.131	0.185	B_{III}(3.0533; 3.9402; 7.1173; 0.4246; 0.0118)
3.0	Масштаба	0.148	0.184	0.272	B_{III}(2.8840; 3.3796; 8.4342; 0.600; 0.013)
	Формы	0.139	0.172	0.251	B_{III}(2.9737; 3.5528; 7.8843; 0.5549; 0.0125)
	Два параметра	0.106	0.129	0.182	B_{III}(3.0703; 3.9618; 7.034; 0.4163; 0.0117)
4.0	Масштаба	0.145	0.179	0.264	B_{III}(2.8522; 3.5285; 8.1044; 0.600; 0.013)
	Формы	0.138	0.171	0.248	B_{III}(2.9677; 3.5426; 7.7632; 0.5418; 0.0125)
	Два параметра	0.105	0.128	0.180	B_{III}(3.0967; 3.9539; 7.064; 0.4122; 0.0116)
5.0	Масштаба	0.142	0.176	0.259	B_{III}(2.8249; 3.6280; 7.8756; 0.6000; 0.013)
	Формы	0.137	0.169	0.246	B_{III}(2.9638; 3.5465; 7.6558; 0.5334; 0.0125)
	Два параметра	0.105	0.128	0.179	B_{III}(4.4332; 3.6256; 10.552; 0.4098; 0.0084)

Таблица А.26

Верхние процентные точки и модели предельных распределений статистики критерия Андерсона-Дарлинга при проверке гипотез относительно гамма-распределения при использовании ОМП

Значение параметра формы	Оцениваемые параметры	Процентные точки			Модель
		0.9	0.95	0.99	
0.3	Масштаба	1.300	1.655	2.543	B_{III}(3.3848; 2.8829; 14.684; 6.0416; 0.1088)
	Формы	1.021	1.258	1.865	B_{III}(3.1073; 3.7039; 8.6717; 4.3439; 0.1120)
	Два параметра	0.718	0.870	1.233	B_{III}(4.5322; 4.060; 10.0718; 2.9212; 0.078)
0.5	Масштаба	1.183	1.490	2.260	B_{III}(5.0045; 2.9358; 18.8524; 5.2436; 0.077)
	Формы	0.993	1.221	1.791	B_{III}(3.1104; 3.7292; 8.0678; 4.0132; 0.1120)
	Два параметра	0.684	0.824	1.145	B_{III}(5.0079; 4.056; 10.0292; 2.5872; 0.073)
1.0	Масштаба	1.058	1.313	1.955	B_{III}(5.0314; 3.1848; 15.4626; 4.3804; 0.077)
	Формы	0.952	1.166	1.696	B_{III}(3.1149; 3.7919; 7.4813; 3.6770; 0.1120)
	Два параметра	0.657	0.785	1.084	B_{III}(5.0034; 4.1093; 9.1610; 2.3427; 0.073)
2.0	Масштаба	0.980	1.203	1.771	B_{III}(4.9479; 3.3747; 13.0426; 3.8304; 0.077)
	Формы	0.922	1.125	1.625	B_{III}(3.0434; 4.1620; 7.1516; 3.8500; 0.1120)
	Два параметра	0.643	0.766	1.051	B_{III}(4.9237; 4.2091; 8.6643; 2.2754; 0.073)
3.0	Масштаба	0.952	1.163	1.702	B_{III}(5.0367; 3.4129; 12.9013; 3.6867; 0.077)
	Формы	0.912	1.110	1.601	B_{III}(3.0565; 3.9092; 6.7844; 3.3972; 0.1120)
	Два параметра	0.639	0.761	1.043	B_{III}(4.9475; 4.2070; 8.6686; 2.2512; 0.073)
4.0	Масштаба	0.937	1.141	1.662	B_{III}(4.9432; 3.5038; 12.2240; 3.6302; 0.077)
	Формы	0.906	1.103	1.590	B_{III}(3.0531; 3.9437; 6.7619; 3.3993; 0.1120)
	Два параметра	0.637	0.758	1.039	B_{III}(4.9274; 4.2279; 8.5573; 2.2390; 0.073)
5.0	Масштаба	0.927	1.130	1.640	B_{III}(4.8810; 3.5762; 11.7894; 3.6051; 0.077)
	Формы	0.902	1.099	1.586	B_{III}(3.0502; 3.9640; 6.7510; 3.4024; 0.1120)
	Два параметра	0.636	0.757	1.037	B_{III}(4.9207; 4.2432; 8.4881; 2.2314; 0.073)

Таблица А.27

Аппроксимация предельных распределений статистики Смирнова при использовании метода максимального правдоподобия и проверке согласия с гамма-распределением

Значение параметра формы	При оценивании		
	Только масштабного параметра	Только параметра формы	Двух параметров
0.3	Su(–3.1901; 1.1381; 0.1399; 0.0081)	Su(–2.8117; 1.3517; 0.2973; 0.1474)	Su(–2.4288; 1.2878; 0.2749; 0.2074)
0.5	Su(–2.8625; 1.1796; 0.2003; 0.079)	Su(–2.8816; 1.4625; 0.3377; 0.1280)	Su(–2.4027; 1.3861; 0.3389; 0.2290) ln *N*(–0.1506; 0.6511)
1.0	ln *N*(0.2062; 0.7337) Su(–2.5635; 1.2797; 0.2922; 0.1584)	Su(–2.5861; 1.4818; 0.4130; 0.174)	Su(–2.2666; 1.3824; 0.3515; 0.2731)
2.0	Su(–2.5372; 1.3749; 0.3464; 0.2162)	Su(–2.3222; 1.4442; 0.4335; 0.2845)	Su(–2.2109; 1.3527; 0.3317; 0.3149)
3.0	Su(–2.3014; 1.3875; 0.3991; 0.2750)	Su(–2.3895; 1.4817; 0.4344; 0.2824)	Su(–2.4295; 1.4110; 0.3163; 0.2784)
4.0	Su(–2.3759; 1.4418; 0.4149; 0.2480)	Su(–2.2574; 1.4921; 0.4694; 0.3216)	Su(–2.4153; 1.4306; 0.3318; 0.2604)
5.0	Su(–2.4574; 1.4599; 0.3976; 0.2712)	Su(–2.2611; 1.4644; 0.4393; 0.3231)	Su(–2.1345; 1.3945; 0.3655; 0.3263)

Таблица А.28

Процентные точки распределения статистики Смирнова при использовании метода максимального правдоподобия и проверке гипотезы о согласии с гамма-распределением

Значение параметра формы	Оцениваемый параметр	Верхние процентные точки		
		0.9	0.95	0.99
0.3	Масштабный	3.564	4.903	8.917
	Формы	3.211	4.160	6.797
	Два параметра	2.651	3.452	5.722
0.5	Масштабный	3.436	4.649	8.226
	Формы	3.027	3.850	6.066
	Два параметра	2.635	3.362	5.361
1.0	Масштабный	3.147	4.108	6.774
	Формы	2.967	3.751	5.851
	Два параметра	2.548	3.239	5.140
2.0	Масштабный	2.990	3.835	6.165
	Формы	2.895	3.651	5.694
	Два параметра	2.495	3.174	5.056
3.0	Масштабный	2.900	3.693	5.873
	Формы	2.852	3.575	5.511
	Два параметра	2.461	3.108	4.874
4.0	Масштабный	2.853	3.608	5.651
	Формы	2.815	3.513	5.377
	Два параметра	2.446	3.085	4.818
5.0	Масштабный	2.830	3.561	5.530
	Формы	2.772	3.471	5.351
	Два параметра	2.428	3.061	4.797

Таблица А.29

Верхние процентные точки и модели предельных распределений статистик непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез относительно обобщенного нормального распределения (3.7) в случае использования ОМП при значении параметра формы $\theta_0 = 0.5$

Оцениваемые параметры	Процентные точки			Модель
	0.9	0.95	0.99	
Для критерия Колмогорова				
θ_0	1.184	1.322	1.596	γ(3.7437; 0.1349; 0.325)
θ_1	1.165	1.303	1.578	γ(3.5811; 0.1366; 0.325)
θ_2	1.182	1.308	1.560	γ(4.4361; 0.1186; 0.320)
θ_0 , θ_1	1.123	1.259	1.534	γ(3.1115; 0.1442; 0.330)
θ_0 , θ_2	1.144	1.271	1.528	γ(3.8417; 0.1265; 0.322)
θ_1 , θ_2	1.110	1.233	1.480	γ(3.6713; 0.1251; 0.326)
θ_0 , θ_1 , θ_2	1.129	1.255	1.508	B_{III}(4.4961; 5.7241; 3.1229; 2.26825; 0.306)
Для критерия Крамера–Мизеса–Смирнова				
θ_0	0.325	0.441	0.723	B_{III}(2.6596; 1.5374; 22.6346; 1.100; 0.015)
θ_1	0.321	0.435	0.718	B_{III}(2.3196; 1.5425; 22.7256; 1.2000; 0.016)
θ_2	0.318	0.421	0.676	B_{III}(2.8412; 1.9552; 17.4052; 1.200; 0.014)
θ_0 , θ_1	0.313	0.428	0.711	B_{III}(1.6693; 1.3771; 15.5765; 0.940; 0.017)
θ_0 , θ_2	0.300	0.405	0.664	B_{III}(2.4600; 1.7966; 19.8161; 1.20; 0.014)
θ_1 , θ_2	0.286	0.388	0.637	B_{III}(3.8085; 1.5324; 32.1564; 0.950; 0.011)
θ_0 , θ_1 , θ_2	0.295	0.399	0.656	B_{III}(3.0778; 1.6214; 30.1798; 1.2; 0.013)
Для критерия Андерсона–Дарлинга				
θ_0	1.735	2.303	3.697	B_{III}(5.1673; 1.7964; 33.1733; 6.000; 0.088)
θ_1	1.718	2.286	3.676	B_{III}(5.3595; 1.7388; 37.1241; 6.000; 0.087)
θ_2	1.819	2.335	3.617	B_{III}(3.4953; 2.2898; 14.9125; 6.400; 0.116)
θ_0 , θ_1	1.671	2.238	3.633	B_{III}(5.786; 1.500; 45.3895; 5.200; 0.08)
θ_0 , θ_2	1.631	2.159	3.454	B_{III}(3.1191; 2.0392; 20.4775; 6.600; 0.116)
θ_1 , θ_2	1.578	2.093	3.356	B_{III}(3.0953; 2.0351; 22.1953; 6.800; 0.118)
θ_0 , θ_1 , θ_2	1.608	2.132	3.416	B_{III}(4.5039; 2.0396; 37.0448; 8.000; 0.092)

Таблица А.30

Верхние процентные точки и модели предельных распределений статистик непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез относительно обобщенного нормального распределения (3.7) в случае использования ОМП при значении параметра формы $\theta_0 = 0.75$

Оцениваемые параметры	Процентные точки			Модель
	0.9	0.95	0.99	
Для критерия Колмогорова				
θ_0	1.196	1.333	1.605	γ(3.7808; 0.1349; 0.330)
θ_1	1.172	1.309	1.584	B_{III}(4.5525; 4.9086; 3.8651; 2.3718; 0.315)
θ_2	1.068	1.173	1.384	B_{III}(4.7066; 10.8120; 1.8954; 2.50; 0.302)
θ_0 , θ_1	1.126	1.263	1.560	B_{III}(4.0450; 4.9340; 3.7586; 2.3832; 0.310)
θ_0 , θ_2	1.021	1.123	1.328	B_{III}(4.9912; 6.4499; 2.6816; 1.90; 0.295)
θ_1 , θ_2	0.985	1.084	1.283	B_{III}(5.5451; 7.3578; 3.0559; 2.100; 0.280)
θ_0 , θ_1 , θ_2	0.937	1.032	1.223	B_{III}(4.5753; 6.8907; 2.74626; 1.8903; 0.294)
Для критерия Крамера–Мизеса–Смирнова				
θ_0	0.329	0.4440	0.726	B_{III}(4.9844; 1.4891; 37.5211; 1.001; 0.0085)
θ_1	0.322	0.437	0.719	B_{III}(6.1042; 1.2892; 53.3676; 0.8800; 0.009)
θ_2	0.226	0.289	0.443	B_{III}(3.5628; 2.6431; 16.5587; 1.030; 0.010)
θ_0 , θ_1	0.313	0.428	0.711	B_{III}(1.6779; 1.3775; 15.6587; 0.940; 0.017)
θ_0 , θ_2	0.202	0.265	0.420	B_{III}(2.5230; 2.8292; 19.5602; 1.4650; 0.014)
θ_1 , θ_2	0.192	0.255	0.408	B_{III}(2.6652; 2.4143; 24.7681; 1.300; 0.013)
θ_0 , θ_1 , θ_2	0.184	0.248	0.404	B_{III}(3.2636; 1.7846; 29.6713; 0.800; 0.0118)
Для критерия Андерсона–Дарлинга				
θ_0	1.755	2.322	3.715	B_{III}(5.5017; 1.7097; 32.6151; 5.4000; 0.09)
θ_1	1.721	2.290	3.681	B_{III}(5.7288; 1.7042; 38.1627; 5.700; 0.085)
θ_2	1.422	1.779	2.626	B_{III}(3.1406; 2.9653; 10.3579; 5.500; 0.12)
θ_0 , θ_1	1.669	2.236	3.632	B_{III}(5.7330; 1.5217; 44.0784; 5.200; 0.078)
θ_0 , θ_2	1.208	1.553	2.410	B_{III}(5.9765; 2.6769; 32.3123; 6.400; 0.070)
θ_1 , θ_2	1.166	1.509	2.362	B_{III}(6.5437; 2.5007; 38.5262; 6.000; 0.07)
θ_0 , θ_1 , θ_2	1.116	1.465	2.322	B_{III}(6.2120; 2.1027; 40.3780; 4.800; 0.075)

Таблица А.31

Верхние процентные точки и модели предельных распределений статистик непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез относительно обобщенного нормального распределения (3.7) в случае использования ОМП при значении параметра формы $\theta_0 = 1$

Оцениваемые параметры	Процентные точки			Модель
	0.9	0.95	0.99	
Для критерия Колмогорова				
θ_0	1.204	1.340	1.613	γ(3.9433; 0.1340; 0.3200)
θ_1	1.177	1.313	1.587	B_{III}(4.4680; 4.8450; 3.9105; 2.3784; 0.324)
θ_2	0.957	1.045	1.223	B_{III}(5.3541; 7.2519; 2.5630; 1.7652; 0.302)
θ_0 , θ_1	1.1300	1.268	1.545	B_{III}(3.9724; 4.8877; 3.7872; 2.3973; 0.3150)
θ_0 , θ_2	0.911	0.995	1.162	B_{III}(4.9365; 8.1400; 2.2383; 1.7312; 0.3)
θ_1 , θ_2	0.863	0.940	1.095	γ(6.2949; 0.0624; 0.2613)
θ_0 , θ_1 , θ_2	0.798	0.870	1.014	γ(5.5391; 0.0606; 0.2700)
Для критерия Крамера–Мизеса–Смирнова				
θ_0	0.333	0.447	0.7295	B_{III}(2.8981; 1.5614; 20.0694; 1.00; 0.014)
θ_1	0.323	0.438	0.719	B_{III}(3.9800; 1.4667; 38.0035; 1.13; 0.0111)
θ_2	0.152	0.187	0.268	B_{III}(3.3130; 3.8338; 10.0967; 0.7517; 0.011)
θ_0 , θ_1	0.313	0.428	0.711	B_{III}(3.7712; 1.1413; 38.6694; 0.790; 0.011)
θ_0 , θ_2	0.131	0.162	0.234	B_{III}(3.9062; 3.9000; 13.5396; 0.7491; 0.009)
θ_1 , θ_2	0.115	0.144	0.213	B_{III}(4.4891; 3.7706; 17.5774; 0.7065; 0.0085)
θ_0 , θ_1 , θ_2	0.103	0.132	0.207	B_{III}(5.2856; 3.0510; 34.1638; 0.7312; 0.0079)
Для критерия Андерсона–Дарлинга				
θ_0	1.775	2.342	3.734	B_{III}(2.9208; 2.5613; 25.6028; 12.5850; 0.117)
θ_1	1.725	2.290	3.685	B_{III}(4.0842; 1.7532; 28.1434; 6.00; 0.105)
θ_2	1.071	1.302	1.837	B_{III}(4.2270; 3.0430; 8.4289; 3.000; 0.09)
θ_0 , θ_1	1.668	2.235	3.630	B_{III}(3.7352; 1.5349; 29.4582; 5.300; 0.098)
θ_0 , θ_2	0.871	1.062	1.522	B_{III}(4.8431; 4.1424; 14.2651; 4.6769; 0.073)
θ_1 , θ_2	0.798	0.982	1.439	B_{III}(5.3576; 3.8690; 17.2148; 4.2386; 0.073)
θ_0 , θ_1 , θ_2	0.726	1.116	1.394	B_{III}(5.2973; 3.3781; 27.5085; 4.8145; 0.073)

Таблица А.32

Верхние процентные точки и модели предельных распределений статистик непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез относительно обобщенного нормального распределения (3.7) в случае использования ОМП при значении параметра формы $\theta_0 = 1.6$

Оцениваемые параметры	Процентные точки			Модель
	0.9	0.95	0.99	
Для критерия Колмогорова				
θ_0	1.216	1.351	1.621	B_{III}(4.2366; 5.7254; 2.8969; 2.4200; 0.330)
θ_1	1.185	1.322	1.596	B_{III}(4.3698; 5.2853; 3.3545; 2.3863; 0.318)
θ_2	0.851	0.923	1.069	B_{III}(5.4129; 7.6381; 2.1289; 1.3936; 0.290)
θ_0 , θ_1	1.141	1.280	1.557	B_{III}(4.9730; 4.5743; 4.6422; 2.3576; 0.29)
θ_0 , θ_2	0.828	0.898	1.039	B_{III}(6.2506; 7.4916; 2.5914; 1.4130; 0.275)
θ_1 , θ_2	0.770	0.831	0.953	B_{III}(5.3623; 7.3149; 2.1379; 1.1702; 0.29))
θ_0 , θ_1 , θ_2	0.704	0.759	0.873	B_{III}(7.4853; 7.2752; 3.2095; 1.14609; 0.260)
Для критерия Крамера–Мизеса–Смирнова				
θ_0	0.339	0.453	0.735	Sb(3.6139; 1.0337; 3.400; 0.013)
θ_1	0.325	0.440	0.723	Sb(2.7348; 0.9148; 1.800; 0.016)
θ_2	0.121	0.149	0.219	B_{III} (4.5239; 3.7332; 15.6889; 0.6596; 0.009)
θ_0 , θ_1	0.314	0.429	0.711	Sb(2.3111; 0.8115; 1.350; 0.016)
θ_0 , θ_2	0.109	0.134	0.194	B_{III}(4.2190; 3.9949; 12.6139; 0.5642; 0.0087)
θ_1 , θ_2	0.087	0.104	0.143	B_{III}(4.5491; 4.8658; 9.0448; 0.4000; 0.008)
θ_0 , θ_1 , θ_2	0.069	0.083	0.118	B_{III}(6.8750; 4.6392; 18.020; 0.3937; 0.006)
Для критерия Андерсона–Дарлинга				
θ_0	1.819	2.383	3.774	B_{III}(3.7982; 2.4042; 26.2612; 10.00; 0.095)
θ_1	1.735	2.304	3.697	B_{III}(3.6908; 2.1990; 32.1310; 10.00; 0.10)
θ_2	0.864	1.052	1.513	B_{III}(4.0782; 5.1594; 17.0570; 7.900; 0.09)
θ_0 , θ_1	1.669	2.235	3.630	B_{III}(4.6625; 1.4267; 33.5120; 4.500; 0.09)
θ_0 , θ_2	0.716	0.863	1.207	B_{III}(4.5576; 4.2326; 10.9573; 3.23142; 0.08)
θ_1 , θ_2	0.589	0.695	0.941	B_{III}(4.5825; 5.3012; 7.9243; 2.5555; 0.0775)
θ_0 , θ_1 , θ_2	0.492	0.587	0.819	B_{III}(5.08840; 5.2459; 10.6760; 2.4738; 0.068)

Таблица А.33

Верхние процентные точки и модели предельных распределений статистик непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез относительно обобщенного нормального распределения (3.7) в случае использования ОМП при значении параметра формы $\theta_0 = 2$

Оцениваемые параметры	Процентные точки			Модель
	0.9	0.95	0.99	
Для критерия Колмогорова				
θ_0	1.219	1.354	1.624	$B_{III}(4.6934; 5.6544; 3.0971; 2.4099; 0.315)$
θ_1	1.190	1.327	1.600	$B_{III}(4.8849; 5.2341; 3.6279; 2.3872; 0.303)$
θ_2	0.888	0.963	1.114	$B_{III}(5.2604; 7.4327; 2.1872; 1.4774; 0.30)$
θ_0 , θ_1	1.148	1.287	1.564	$B_{III}(4.6127; 4.8440; 4.1337; 2.4080; 0.295)$
θ_0 , θ_2	0.880	0.956	1.108	$B_{III}(5.7052; 7.2179; 2.5877; 1.5433; 0.29)$
θ_1 , θ_2	0.835	0.909	1.057	$\gamma(6.4721; 0.0580; 0.2620)$
θ_0 , θ_1 , θ_2	0.784	0.861	1.021	$B_{III}(9.3597; 5.7532; 5.8275; 1.4507; 0.2500)$
Для критерия Крамера–Мизеса–Смирнова				
θ_0	0.341	0.456	0.737	$Sb(2.7740; 0.9495; 1.9000; 0.0170)$
θ_1	0.327	0.442	0.725	$Sb(3.3182; 0.94801; 2.9500; 0.016)$
θ_2	0.134	0.165	0.238	$B_{III}(4.4331; 3.6365; 13.9198; 0.6632; 0.0084)$
θ_0 , θ_1	0.315	0.430	0.712	$Sb(2.2458; 0.7970; 1.300; 0.017)$
θ_0 , θ_2	0.127	0.156	0.225	$B_{III}(4.0430; 3.72568; 12.5794; 0.6313; 0.0087)$
θ_1 , θ_2	0.103	0.126	0.178	$B_{III}(4.1153; 4.1748; 11.0347; 0.5116; 0.009)$
θ_0 , θ_1 , θ_2	0.086	0.107	0.161	$B_{III}(6.7594; 3.8575; 28.6668; 0.5921; 0.006)$
Для критерия Андерсона–Дарлинга				
θ_0	1.842	2.404	3.796	$B_{III}(3.0026; 2.7848; 21.7432; 12.5565; 0.111)$
θ_1	1.743	2.309	3.704	$B_{III}(3.4638; 2.3300; 35.7115; 12.6033; 0.105)$
θ_2	0.892	1.087	1.552	$B_{III}(4.1081; 5.0598; 16.9721; 7.9065; 0.09)$
θ_0 , θ_1	1.672	2.237	3.632	$B_{III}(4.2125; 1.5874; 32.6127; 5.500; 0.09)$
θ_0 , θ_2	0.779	0.945	1.335	$B_{III}(4.6827; 3.7977; 12.6413; 3.4486; 0.08)$
θ_1 , θ_2	0.630	0.750	1.032	$B_{III}(4.7262; 4.6575; 9.4958; 2.7171; 0.0775)$
θ_0 , θ_1 , θ_2	0.529	0.640	0.919	$B_{III}(4.3857; 5.7110; 17.3440; 5.0052; 0.075)$

Таблица А.34

Верхние процентные точки и модели предельных распределений статистик непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез относительно обобщенного нормального распределения (3.7) в случае использования ОМП при значении параметра формы $\theta_0 = 3$

Оцениваемые параметры	Процентные точки			Модель
	0.9	0.95	0.99	
Для критерия Колмогорова				
θ_0	1.222	1.357	1.626	B_{III}(6.5249; 5.0755; 4.5306; 2.4069; 0.285)
θ_1	1.197	1.334	1.606	B_{III}(5.2350; 5.0903; 3.9316; 2.3905; 0.300)
θ_2	0.998	1.095	1.291	B_{III}(8.5402; 6.1019; 4.4047; 1.8871; 0.250)
θ_0 , θ_1	1.161	1.301	1.577	B_{III}(5.5689; 4.6553; 4.9339; 2.4147; 0.280)
θ_0 , θ_2	0.999	1.096	1.293	B_{III}(6.5008; 7.8186; 3.25827; 2.1735; 0.270)
θ_1 , θ_2	0.970	1.069	1.269	B_{III}(6.8503; 6.2212; 3.9819; 1.9216; 0.265)
θ_0 , θ_1 , θ_2	0.936	1.039	1.247	γ(3.6025; 0.10128; 0.3125)
Для критерия Крамера–Мизеса–Смирнова				
θ_0	0.345	0.459	0.741	B_{III}(3.2178; 1.6133; 19.2436; 1.000; 0.0125)
θ_1	0.330	0.445	0.727	B_{III}(3.6534; 1.5249; 28.5258; 1.0550; 0.0117)
θ_2	0.179	0.224	0.329	B_{III}(3.6203; 2.6395; 11.3638; 0.600; 0.010)
θ_0 , θ_1	0.317	0.432	0.715	B_{III}(6.6688; 1.2016 ;63.6672; 0.830; 0.008)
θ_0 , θ_2	0.177	0.222	0.329	B_{III}(3.5065; 2.5837; 11.5972; 0.600; 0.010)
θ_1 , θ_2	0.154	0.196	0.299	B_{III}(3.7581; 2.3887; 13.3525; 0.500; 0.010)
θ_0 , θ_1 , θ_2	0.138	0.181	0.289	Sl(1.1736; 1.2083; 0.1163; 0.0103)
Для критерия Андерсона–Дарлинга				
θ_0	1.881	2.441	3.835	B_{III}(3.7511; 2.3357;19.6979; 8.0000; 0.095)
θ_1	1.757	2.324	3.718	B_{III}(4.1218; 2.1349; 30.0763; 8.500; 0.094)
θ_2	1.049	1.282	1.823	B_{III}(4.6108; 3.3193; 12.0931; 4.0000; 0.079)
θ_0 , θ_1	1.679	2.245	3.638	B_{III}(6.0616; 1.6126; 47.4733; 5.800; 0.074)
θ_0 , θ_2	0.989	1.215	1.741	B_{III}(4.7371; 3.2610; 13.7406; 4.0000; 0.070)
θ_1 , θ_2	0.819	1.009	1.472	B_{III}(5.2098; 3.5915; 16.7524; 4.0000; 0.070)
θ_0 , θ_1 , θ_2	0.716	0.908	1.391	B_{III}(5.9548; 2.9777; 28.5342; 3.800; 0.069)

Таблица А.35

Верхние процентные точки и модели предельных распределений статистик непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез относительно обобщенного нормального распределения (3.7) в случае использования ОМП при значении параметра формы $\theta_0 = 4$

Оцениваемые параметры	Процентные точки			Модель
	0.9	0.95	0.99	
Для критерия Колмогорова				
θ_0	1.223	1.358	1.626	B_{III}(3.6243; 5.3291; 2.4503; 2.1853;0.36)
θ_1	1.202	1.338	1.610	B_{III}(4.4775; 5.7536; 2.9612; 2.4028; 0.31)
θ_2	1.060	1.169	1.388	B_{III}(3.8031; 7.8639; 1.9955; 2.1337; 0.34)
θ_0 , θ_1	1.172	1.311	1.586	B_{III}(2.6607; 6.1554; 2.0175; 2.4197; 0.364)
θ_0 , θ_2	1.061	1.170	1.389	B_{III}(4.1178; 7.0193; 2.3554; 2.1116; 0.330)
θ_1 , θ_2	1.039	1.150	1.372	B_{III}(4.4530; 6.5204; 2.8504; 2.1247; 0.315)
θ_0 , θ_1 , θ_2	1.013	1.126	1.353	γ(3.5001; 0.1150; 0.3200)
Для критерия Крамера–Мизеса–Смирнова				
θ_0	0.346	0.460	0.742	B_{III}(2.6493; 2.3780; 23.7392; 2.3027; 0.0133)
θ_1	0.332	0.447	0.729	B_{III}(2.9074; 1.7706; 24.9344; 1.40; 0.0134)
θ_2	0.212	0.270	0.409	B_{III}(3.2370; 2.7787; 15.5238; 1.05; 0.011)
θ_0 , θ_1	0.319	0.434	0.717	B_{III}(2.8323; 1.4558; 24.26690; 1.0; 0.012)
θ_0 , θ_2	0.212	0.271	0.412	B_{III}(2.9892; 2.7082; 14.1961; 1.0; 0.0117)
θ_1 , θ_2	0.193	0.250	0.390	B_{III}(3.7333; 2.7350; 28.9872; 1.4094; 0.0094)
θ_0 , θ_1 , θ_2	0.178	0.236	0.381	B_{III}(3.5304; 2.1937; 29.8592; 1.000; 0.01)
Для критерия Андерсона–Дарлинга				
θ_0	1.899	2.458	3.853	B_{III}(2.7055; 3.0084; 16.8946; 12.5483; 0.12)
θ_1	1.771	2.338	3.729	B_{III}(2.6333; 2.6314; 22.5692; 12.5941; 0.125)
θ_2	1.188	1.467	2.118	B_{III}(2.7800; 5.1280; 11.7638; 10.5031; 0.11)
θ_0 , θ_1	1.687	2.255	3.648	B_{III}(2.0354; 2.3209; 23.5136; 12.7679; 0.132)
θ_0 , θ_2	1.153	1.432	2.090	B_{III}(3.6594; 3.4364; 13.5600; 5 .9140; 0.084)
θ_1 , θ_2	0.985	1.239	1.862	B_{III}(4.0113; 3.4057; 19.6395; 6.2684; 0.084)
θ_0 , θ_1 , θ_2	0.886	1.143	1.785	B_{III}(4.1564; 2.7774; 30.5627; 6.0165; 0.0822)

Таблица А.36

Верхние процентные точки и модели предельных распределений статистик непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез относительно обобщенного нормального распределения (3.7) в случае использования ОМП при значении параметра формы $\theta_0 = 5$

Оцениваемые параметры	Процентные точки			Модель
	0.9	0.95	0.99	
Для критерия Колмогорова				
θ_0	1.223	1.357	1.626	B_{III}(3.4549; 6.2388; 2.0813; 2.300; 0.3600)
θ_1	1.205	1.342	1.613	B_{III}(3.1581; 6.2159; 1.9964;2.300; 0.360)
θ_2	1.097	1.212	1.443	B_{III}(4.8171; 5.5295; 3.0757; 2.000; 0.320)
θ_0 , θ_1	1.179	1.318	1.593	B_{III}(3.7224; 4.6425; 3.1224; 2.2000; 0.330)
θ_0 , θ_2	1.097	1.213	1.444	B_{III}(4.9052; 5.6639; 2.9616; 2.0000; 0.310)
θ_1 , θ_2	1.080	1.196	1.429	B_{III}(4.5122; 5.6639; 2.8588; 2.0000; 0.310)
θ_0 , θ_1 , θ_2	1.057	1.176	1.414	B_{III}(3.5446; 6.6218; 2.5197; 2.2850; 0.325)
Для критерия Крамера–Мизеса–Смирнова				
θ_0	0.347	0.460	0.742	B_{III}(3.3548; 1.7217; 20.2585; 1.1000; 0.012)
θ_1	0.334	0.448	0.731	B_{III}(3.2927; 1.6388; 23.4040; 1.100; 0.012)
θ_2	0.236	0.303	0.469	B_{III}(4.0012; 2.0310; 17.0057; 0.730; 0.0095)
θ_0 , θ_1	0.321	0.436	0.719	B_{III}(4.0952; 1.3628; 33.3948; 0.900; 0.0095)
θ_0 , θ_2	0.236	0.304	0.470	B_{III}(3.8227; 2.0270; 16.0637; 0.7200; 0.0095)
θ_1 , θ_2	0.219	0.287	0.453	B_{III3}(4.1888; 1.9896; 21.3460; 0.7450; 0.009)
θ_0 , θ_1 , θ_2	0.206	0.275	0.444	B_{III}(4.5253; 1.7162; 31.4699; 0.715; 0.009)
Для критерия Андерсона–Дарлинга				
θ_0	1.908	2.467	3.861	B_{III}(3.2750; 2.7257; 19.7022; 11.000; 0.105)
θ_1	1.782	2.349	3.740	B_{III}(3.7185; 2.2262; 24.9194; 8.500; 0.10)
θ_2	1.292	1.608	2.358	B_{III}(3.8528; 2.9989; 12.7999; 5.2000; 0.09)
θ_0 , θ_1	1.696	2.264	3.658	B_{III}(3.9441; 1.9099; 34.2183; 8.000; 0.085)
θ_0 , θ_2	1.271	1.588	2.346	B_{III}(3.6684; 3.0110; 13.4931; 5.550; 0.085)
θ_1 , θ_2	1.110	1.411	2.153	B_{III}(4.1345; 3.0883; 22.0926; 6.800; 0.080)
θ_0 , θ_1 , θ_2	1.014	1.322	2.084	B_{III}(4.3601; 2.6164; 38.0670; 7.4729; 0.0785)

Таблица А.37

Верхние процентные точки и модели предельных распределений статистик непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез относительно обобщенного нормального распределения (3.7) в случае использования ОМП при значении параметра формы $\theta_0 = 7$

Оцениваемые параметры	Процентные точки			Модель
	0.9	0.95	0.99	
Для критерия Колмогорова				
θ_0	1.222	1.357	1.625	B_{III}(3.4527; 6.2874; 2.062; 2.300; 0.3600)
θ_1	1.210	1.345	1.616	B_{III}(3.1789; 6.3997; 1.9239; 2.300; 0.360)
θ_2	1.137	1.137	1.502	B_{III}(4.4660; 5.47624; 2.6851; 2.000; 0.320)
θ_0 , θ_1	1.190	1.328	1.601	B_{III}(3.8325; 4.7340; 3.0569; 2.2000; 0.330)
θ_0 , θ_2	1.137	1.259	1.503	B_{III}(4.9890; 5.1511; 3.1470; 2.0000; 0.310)
θ_1 , θ_2	1.124	1.247	1.493	B_{III}(4.5766; 5.2588; 2.9181; 2.0000; 0.310)
θ_0 , θ_1 , θ_2	1.107	1.232	1.480	B_{III}(3.5462; 6.6218; 2.2864; 2.2850; 0.325)
Для критерия Крамера–Мизеса–Смирнова				
θ_0	0.347	0.460	0.742	B_{III}(3.4065; 1.72170; 20.5769; 1.1000; 0.012)
θ_1	0.336	0.451	0.733	B_{III}(3.3961; 1.6388; 23.7205; 1.100; 0.012)
θ_2	0.265	0.345	0.542	B_{III}(4.0337; 1.7885; 18.1049; 0.730; 0.0095)
θ_0 , θ_1	0.325	0.440	0.722	B_{III}(4.5574; 1.36280; 36.1643; 0.900; 0.0095)
θ_0 , θ_2	0.266	0.346	0.545	B_{III}(4.1853; 1.7329; 19.4044; 0.7200; 0.0095)
θ_1 , θ_2	0.253	0.333	0.531	B_{III}(4.3597; 1.7257; 23.2817; 0.7450; 0.009)
θ_0 , θ_1 , θ_2	0.241	0.323	0.522	B_{III}(4.3835; 1.5744; 28.6719; 0.715; 0.009)
Для критерия Андерсона–Дарлинга				
θ_0	1.916	2.475	3.864	B_{III}(3.3337; 2.7380; 19.7773; 11.000; 0.105)
θ_1	1.800	2.366	3.755	B_{III}(3.7496; 2.2445; 24.3153; 8.500; 0.10)
θ_2	1.431	1.804	2.698	B_{III}(3.9524; 2.6173; 14.0679; 5.2000; 0.09)
θ_0 , θ_1	1.714	2.282	3.674	B_{III}(4.4259;1.8843; 34.1400; 7.30; 0.085)
θ_0 , θ_2	1.419	1.793	2.697	B_{III}(3.6688; 2.7003; 13.7324; 5.550; 0.085)
θ_1 , θ_2	1.279	1.644	2.539	B_{III}(4.1773; 2.7020; 22.9667; 6.800; 0.080)
θ_0 , θ_1 , θ_2	1.188	1.560	2.470	B_{III}(4.5480; 2.1191; 28.5121; 5.000; 0.0785)

Таблица А.38

Процентные точки и распределения статистики Колмогорова при проверке сложных гипотез с вычислением ОМП двух параметров обратного гауссовского распределения

θ_0	θ_1	Процентные точки			Модель распределения статистики
		0.9	0.95	0.99	
1	1	0.910	0.998	1.180	B_{III}(5.9569; 6.7824; 3.0220; 1.6782; 0.2806)
1	2	0.957	1.055	1.264	B_{III}(6.2372; 6.7506; 3.6809; 1.9867; 0.2800)
1	3	0.997	1.105	1.342	B_{III}(6.6946; 6.3716; 4.5298; 2.2117; 0.2775)
1	4	1.034	1.151	1.400	B_{III}(6.0585; 5.8419; 4.3611; 2.2007; 0.2883)
1	5	1.066	1.189	1.450	B_{III}(6.1201; 5.4407; 4.5330; 2.2010; 0.2880)
1	6	1.094	1.221	1.489	B_{III}(6.1759; 5.1904; 4.6124; 2.2013; 0.2878)
1	7	1.121	1.250	1.525	B_{III}(6.2265; 4.9927; 4.6521; 2.2018; 0.2873)
1	8	1.143	1.273	1.548	B_{III}(6.0718; 4.9852; 4.4776; 2.2284; 0.2896)
1	9	1.159	1.292	1.565	B_{III}(5.6511; 4.9390; 4.0653; 2.1915; 0.2975)
1	10	1.172	1.306	1.577	B_{III}(5.6247; 4.8832; 4.0106; 2.1894; 0.2995)
2	1	0.882	0.964	1.137	B_{III}(6.3443; 7.5748; 2.9473; 1.6876; 0.2713)
2	2	0.917	1.006	1.199	B_{III}(10.791; 6.9904; 5.6290; 1.9870; 0.2247)
2	3	0.948	1.045	1.258	B_{III}(5.0737; 7.2993; 2.9576; 1.9859; 0.3000)
2	4	0.977	1.082	1.319	B_{III}(5.4784; 7.0420; 3.5741; 2.2027; 0.2950)
2	5	1.006	1.120	1.369	B_{III}(5.9645; 6.1578; 4.3007; 2.2159; 0.2900)
2	6	1.032	1.152	1.408	B_{III}(7.6025; 5.4045; 5.7487; 2.2002; 0.2700)
2	7	1.057	1.180	1.446	B_{III}(7.9396; 5.1500; 6.0298; 2.2004; 0.2650)
2	8	1.079	1.206	1.476	B_{III}(5.9398; 5.1990; 4.6104; 2.2008; 0.2930)
2	9	1.100	1.228	1.503	B_{III}(5.7955; 5.1024; 4.4620; 2.2011; 0.2950)
2	10	1.120	1.250	1.528	B_{III}(5.9634; 4.9581; 4.5469; 2.1960; 0.2920)
3	1	0.869	0.949	1.118	B_{III}(6.3357; 7.5977; 2.8564; 1.6279; 0.2706)
3	2	0.897	0.984	1.168	B_{III}(6.5174; 7.4125; 3.2234; 1.7769; 0.2700)
3	3	0.923	1.016	1.217	B_{III}(12.343; 6.5394; 6.7642; 1.9877; 0.2179)
3	4	0.947	1.046	1.269	B_{III}(8.9671; 6.1291; 5.5576; 1.9890; 0.2500)
3	5	0.971	1.078	1.318	B_{III}(10.2720; 6.0888; 6.8884; 2.1989; 0.2400)
3	6	0.997	1.110	1.361	B_{III}(12.4552; 5.4731; 8.9051; 2.2027; 0.2300)
3	7	1.019	1.137	1.395	B_{III}(14.7050; 5.1363; 10.7535; 2.2125; 0.2200)
3	8	1.040	1.162	1.429	B_{III}(14.7958; 4.8912; 11.0081; 2.1998; 0.2200)
3	9	1.061	1.187	1.457	B_{III}(15.9316; 4.7067; 11.8935; 2.2001; 0.2150)
3	10	1.079	1.208	1.478	B_{III}(16.1109; 4.5707; 12.1176; 2.2003; 0.2150)
4	1	0.862	0.941	1.107	B_{III}(6.6438; 7.7673; 2.9294; 1.6332; 0.2653)
4	2	0.885	0.969	1.149	B_{III}(6.1888; 7.3858; 2.9758; 1.6875; 0.2750)

Продолжение табл. А.38

θ_0	θ_1	Процентные точки			Модель распределения статистики
		0.9	0.95	0.99	
4	3	0.907	0.997	1.189	B_{III}(6.9205; 7.8981; 3.6110; 1.9962; 0.2650)
4	4	0.928	1.023	1.234	B_{III}(5.9780; 9.1512; 3.3926; 2.400; 0.2806)
4	5	0.950	1.051	1.282	B_{III}(11.9075; 5.7447; 7.5201; 1.9905; 0.2300)
4	6	0.971	1.079	1.323	B_{III}(11.9043; 5.8982; 8.1014; 2.2019; 0.2300)
4	7	0.993	1.107	1.360	B_{III}(16.9484; 5.3410; 11.9176; 2.1990; 0.2100)
4	8	1.013	1.131	1.391	B_{III}(17.0835; 5.1135; 12.3060; 2.2027; 0.2100)
4	9	1.032	1.155	1.423	B_{III}(17.3084; 4.8961; 12.7239; 2.1996; 0.2100)
4	10	1.051	1.177	1.449	B_{III}(17.2467; 4.7356; 12.8311; 2.1997; 0.2100)
5	1	0.857	0.935	1.099	B_{III}(6.7006; 7.8312; 2.9541; 1.6335; 0.2651)
5	2	0.877	0.960	1.135	B_{III}(9.00487; 6.9071; 4.2573; 1.6881; 0.2400)
5	3	0.897	0.984	1.172	B_{III}(8.9213; 7.7502; 4.5226; 2.0008; 0.2400)
5	4	0.915	1.008	1.212	B_{III}(9.4154; 6.9359; 5.2226; 1.9946; 0.2400)
5	5	0.934	1.033	1.2518	B_{III}(5.8431; 14.4730; 3.6811; 4.000; 0.2806)
5	6	0.953	1.057	1.294	B_{III}(14.8173; 5.6823; 9.4427; 2.0492; 0.2150)
5	7	0.974	1.083	1.331	B_{III}(15.2826; 5.6389; 10.5512; 2.2057; 0.2150)
5	8	0.993	1.109	1.364	B_{III}(20.7049; 5.2372; 14.5735; 2.200; 0.2000)
5	9	1.011	1.130	1.392	B_{III}(20.6647; 5.0521; 14.7877; 2.2001; 0.2000)
5	10	1.029	1.152	1.421	B_{III}(26.3791; 4.8072; 19.0811; 2.2027; 0.1900)
6	1	0.854	0.932	1.093	B_{III}(6.6964; 7.8242; 2.9493; 1.6287; 0.2640)
6	2	0.871	0.953	1.126	B_{III}(8.8962; 7.1069; 4.1210; 1.6892; 0.2400)
6	3	0.888	0.974	1.159	B_{III}(9.1443; 6.9243; 4.5492; 1.7798; 0.2400)
6	4	0.906	0.996	1.193	B_{III}(9.2454; 7.2428; 4.9786; 1.9991; 0.2400)
6	5	0.923	1.018	1.228	B_{III}(12.5264; 6.3510; 7.1854; 1.9935; 0.2200)
6	6	0.940	1.041	1.269	B_{III}(5.8883; 17.8508; 4.6295; 6.000; 0.2806)
6	7	0.956	1.064	1.306	B_{III}(18.3816; 5.8741; 11.9529; 2.2081; 0.2000)
6	8	0.977	1.088	1.343	B_{III}(23.3374; 5.4599; 15.6767; 2.2051; 0.1900)
6	9	0.995	1.111	1.369	B_{III}(34.6437; 5.1591; 23.3905; 2.2019; 0.1750)
6	10	1.011	1.131	1.395	B_{III}(39.1153; 4.9860; 26.4984; 2.1988; 0.1700)
7	1	0.854	0.930	1.091	B_{III}(6.5586; 8.0638; 2.8375; 1.6313; 0.2673)
7	2	0.867	0.948	1.119	B_{III}(7.1224; 7.6538; 3.2597; 1.6903; 0.2600)
7	3	0.883	0.967	1.149	B_{III}(7.2034; 7.5737; 3.4800; 1.7800; 0.2600)
7	4	0.898	0.987	1.180	B_{III}(7.3038; 7.9550; 3.8033; 2.0010; 0.2600)
7	5	0.914	1.007	1.214	B_{III}(8.5307; 6.9961; 4.8484; 1.9974; 0.2500)
7	6	0.930	1.028	1.250	B_{III}(15.1195; 5.9784; 8.9543; 1.9927; 0.2100)
7	7	0.946	1.049	1.285	B_{III}(5.8391; 17.5429; 4.6421; 6.000; 0.2806)

Окончание табл. А.38

θ_0	θ_1	Процентные точки			Модель распределения статистики
		0.9	0.95	0.99	
7	8	0.963	1.071	1.322	B_{III}(31.3194; 5.6956; 19.4931; 2.2085; 0.1700)
7	9	0.980	1.094	1.353	B_{III}(42.2228; 5.0877; 30.0214; 2.2059; 0.1800)
7	10	0.997	1.115	1.376	B_{III}(42.3418; 5.0662; 28.8200; 2.2033; 0.1700)
4	6	0.971	1.079	1.323	B_{III}(11.9043; 5.8982; 8.1014; 2.2019; 0.2300)
8	1	0.854	0.930	1.091	B_{III}(6.7259; 7.9921; 2.8961; 1.6227; 0.2658)
8	2	0.864	0.943	1.113	B_{III}(13.28101; 6.7409; 6.0703; 1.6914; 0.2100)
8	3	0.878	0.961	1.140	B_{III}(13.1182; 6.5995; 6.1889; 1.7308; 0.2100)
8	4	0.892	0.980	1.168	B_{III}(12.8930; 7.2771; 6.5124; 2.0016; 0.2100)
8	5	0.907	0.998	1.201	B_{III}(14.5402; 6.6949; 7.78121; 2.0005; 0.2050)
8	6	0.921	1.017	1.231	B_{III}(17.0918; 6.1135; 9.7622; 1.9962; 0.2000)
8	7	0.936	1.037	1.267	B_{III}(21.3221; 5.5875; 13.0056; 1.9922; 0.1950)
8	8	0.952	1.057	1.300	B_{III}(5.8759; 19.0528; 5.7987; 8.000; 0.2806)
8	9	0.968	1.079	1.332	B_{III}(26.8192; 5.4765; 18.0105; 2.2088; 0.1850)
8	10	0.984	1.100	1.360	B_{III}(33.2892; 5.1108; 23.7224; 2.2066; 0.1850)
9	1	0.855	0.932	1.092	B_{III}(7.0181; 8.0734; 2.9699; 1.6366; 0.2620)
9	2	0.861	0.940	1.108	B_{III}(14.8480; 6.7456; 6.6141; 1.6911; 0.2000)
9	3	0.874	0.956	1.133	B_{III}(15.1905; 6.3828; 7.0328; 1.6895; 0.2000)
9	4	0.887	0.973	1.161	B_{III}(14.5137; 7.3126; 7.1548; 2.0020; 0.2000)
9	5	0.900	0.991	1.191	B_{III}(15.4545; 6.7896; 8.1115; 2.0011; 0.2000)
9	6	0.914	1.008	1.220	B_{III}(16.8407; 6.2819; 9.4483; 1.9990; 0.2000)
9	7	0.928	1.027	1.254	B_{III}(26.4103; 5.6444; 15.7438; 1.9953; 0.1850)
9	8	0.943	1.046	1.285	B_{III}(27.0115; 5.3931; 16.5812; 1.9918; 0.1850)
9	9	0.958	1.066	1.318	B_{III}(5.9761; 18.1201; 6.9936; 9.000; 0.2806)
9	10	0.973	1.086	1.346	B_{III}(28.3999; 5.3460; 19.5082; 2.2090; 0.1850)
10	1	0.858	0.935	1.094	B_{III}(6.3708; 8.3028; 2.6724; 1.6339; 0.2719)
10	2	0.859	0.937	1.105	B_{III}(21.0180; 6.2702; 9.1530; 1.6325; 0.1800)
10	3	0.871	0.952	1.128	B_{III}(20.8492; 6.2545; 9.3852; 1.6899; 0.1800)
10	4	0.883	0.968	1.153	B_{III}(18.5209; 7.3068; 8.7206; 2.0024; 0.1800)
10	5	0.896	0.985	1.179	B_{III}(20.1426; 6.8010; 10.0869; 2.0016; 0.1800)
10	6	0.908	1.001	1.209	B_{III}(22.0824; 6.3600; 11.7113; 2.0008; 0.1800)
10	7	0.921	1.018	1.239	B_{III}(25.7879; 5.8810; 14.6469; 1.9979; 0.1800)
10	8	0.935	1.037	1.269	B_{III}(31.0404; 5.5468; 18.2144; 1.9946; 0.1750)
10	9	0.949	1.055	1.301	B_{III}(31.0159; 5.7740; 19.6302; 2.2075; 0.1750)
10	10	0.964	1.075	1.331	B_{III}(5.9754; 17.6996; 7.5357; 9.5000; 0.2806)

Таблица А.39

Процентные точки и распределения статистики Крамера–Мизеса–Смирнова при проверке сложных гипотез с вычислением ОМП двух параметровобратного гауссовского распределения

θ_0	θ_1	Процентные точки			Модель распределения статистики
		0.9	0.95	0.99	
1	1	0.130	0.162	0.246	B_{III}(4.7725; 2.8933; 15.4899; 0.500; 0.0086)
1	2	0.150	0.194	0.321	B_{III}(4.7817; 2.7916; 24.1428; 0.800; 0.0086)
1	3	0.173	0.229	0.408	B_{III}(5.0019; 2.4825; 33.657; 1.000; 0.0086)
1	4	0.195	0.265	0.481	B_{III}(4.8570; 2.3136; 39.4252; 1.200; 0.0087)
1	5	0.218	0.298	0.537	B_{III}(4.8192; 2.1138; 40.1445; 1.200; 0.0088)
1	6	0.239	0.328	0.575	B_{III}(4.7926; 1.9813; 40.1460; 1.200; 0.0089)
1	7	0.260	0.355	0.613	B_{III}(4.3522; 1.9184; 38.5472; 1.300; 0.0097)
1	8	0.277	0.378	0.645	B_{III}(4.1660; 1.9401; 36.7953; 1.400; 0.0097)
1	9	0.290	0.395	0.663	B_{III}(1.7177; 2.5911; 14.9047; 2.0049; 0.020)
1	10	0.302	0.409	0.682	B_{III}(1.7373; 2.6035; 14.6773; 2.0578; 0.020)
2	1	0.119	0.146	0.216	B_{III}(5.5933; 2.8761; 15.0784; 0.400; 0.0075)
2	2	0.132	0.167	0.265	B_{III}(4.7336; 2.9815; 17.9631; 0.600; 0.0086)
2	3	0.146	0.189	0.323	B_{III}(5.0307; 2.7954; 26.1410; 0.800; 0.0084)
2	4	0.162	0.214	0.387	B_{III}(5.2560; 2.5116; 32.9308; 0.900; 0.0084)
2	5	0.178	0.242	0.446	B_{III}(5.4485; 2.2935; 39.9250; 1.000; 0.0084)
2	6	0.195	0.267	0.498	B_{III}(5.3297; 2.1938; 42.6895; 1.100; 0.0084)
2	7	0.212	0.292	0.534	B_{III}(5.3797; 2.0580; 45.8508; 1.150; 0.0084)
2	8	0.228	0.316	0.565	B_{III}(5.4058; 1.9526; 46.3260; 1.150; 0.0084)
2	9	0.244	0.336	0.590	B_{III}(5.3765; 1.8676; 45.9372; 1.150; 0.0084)
2	10	0.259	0.356	0.618	B_{III}(5.3119; 1.8093; 45.0334; 1.160; 0.0084)
3	1	0.114	0.140	0.204	B_{III}(4.6237; 3.1152; 11.9551; 0.400; 0.0087)
3	2	0.124	0.155	0.239	B_{III}(4.5231; 3.3129; 15.9686; 0.600; 0.0087)
3	3	0.135	0.172	0.284	B_{III}(4.7701; 3.0644; 22.1622; 0.750; 0.0087)
3	4	0.146	0.191	0.336	B_{III}(4.9007; 2.7581; 26.0854; 0.8000; 0.0087)
3	5	0.159	0.212	0.391	B_{III}(5.1313; 2.4877; 31.2188; 0.8500; 0.0087)
3	6	0.174	0.235	0.440	B_{III}(5.1565; 2.4026; 40.7673; 1.1000; 0.0087)
3	7	0.187	0.256	0.483	B_{III}(5.2195; 2.2343; 42.6422; 1.1000; 0.0087)
3	8	0.202	0.278	0.520	B_{III}(5.2685; 2.1243; 47.574; 1.2000; 0.0087)
3	9	0.216	0.299	0.548	B_{III}(5.2645; 2.0191; 47.9732; 1.2000; 0.0087)
3	10	0.229	0.318	0.570	B_{III}(5.2768; 1.9423; 48.0147; 1.2000; 0.0087)
4	1	0.112	0.137	0.198	B_{III}(4.5782; 3.2113; 11.6509; 0.4000; 0.0087)
4	2	0.120	0.148	0.224	B_{III}(4.6470; 3.0937; 13.7864; 0.4645; 0.0087)

Продолжение табл. А.39

θ_0	θ_1	Процентные точки			Модель распределения статистики
		0.9	0.95	0.99	
4	3	0.128	0.162	0.262	B_{III}(4.7447; 3.0421; 18.1139; 0.6000; 0.0087)
4	4	0.137	0.177	0.304	B_{III}(4.6410; 3.2743; 29.7398; 1.100; 0.0087)
4	5	0.148	0.194	0.354	B_{III}(4.9182; 2.9156; 37.7830; 1.2000; 0.0087)
4	6	0.159	0.213	0.402	B_{III}(4.9451; 2.8167; 54.9745; 1.7197; 0.0087)
4	7	0.172	0.234	0.442	B_{III}(4.9463; 2.6275; 56.8175; 1.7197; 0.0087)
4	8	0.184	0.253	0.479	B_{III}(5.2218; 2.4515; 61.8564; 1.7198; 0.0083)
4	9	0.197	0.272	0.512	B_{III}(5.1854; 2.3115; 63.0610; 1.7198; 0.0085)
4	10	0.210	0.291	0.542	B_{III}(5.1470; 2.2041; 63.2902; 1.7198; 0.0085)
5	1	0.111	0.135	0.194	B_{III}(4.5239; 3.2857; 11.3509; 0.4000; 0.0087)
5	2	0.117	0.144	0.216	B_{III}(4.3756; 3.6726; 14.4290; 0.6000; 0.0087)
5	3	0.124	0.156	0.247	B_{III}(4.4097; 3.6237; 19.2576; 0.8000; 0.0087)
5	4	0.132	0.168	0.283	B_{III}(4.5663; 3.4838; 28.1077; 1.1000; 0.0087)
5	5	0.140	0.183	0.325	B_{III}(4.6087; 3.2941; 37.3032; 1.4000; 0.0087)
5	6	0.150	0.199	0.369	B_{III}(4.6721; 3.0859; 44.9449; 1.6000; 0.0087)
5	7	0.161	0.217	0.415	B_{III}(4.9820; 2.8196; 64.4405; 2.0000; 0.0086)
5	8	0.172	0.235	0.448	B_{III}(4.9695; 2.6609; 69.3170; 2.1000; 0.0086)
5	9	0.183	0.252	0.483	B_{III}(4.9353; 2.5489; 72.7848; 2.2000; 0.0086)
5	10	0.195	0.270	0.511	B_{III}(4.9489; 2.4090; 74.7198; 2.2000; 0.0086)
6	1	0.110	0.133	0.192	B_{III}(4.5010; 3.2285; 10.9781; 0.380; 0.0088)
6	2	0.115	0.141	0.210	B_{III}(4.5811; 3.3997; 13.7378; 0.5000; 0.0087)
6	3	0.121	0.151	0.235	B_{III}(4.5344; 3.3779; 16.0429; 0.6000; 0.0087)
6	4	0.128	0.162	0.269	B_{III}(4.7010; 3.1896; 20.2456; 0.7000; 0.0087)
6	5	0.135	0.174	0.305	B_{III}(4.7778; 3.1179; 26.6577; 0.9000; 0.0087)
6	6	0.143	0.188	0.348	B_{III}(4.6979; 3.2496; 45.496; 1.6546; 0.0087)
6	7	0.152	0.205	0.389	B_{III}(4.7377; 3.0239; 52.3921; 1.8000; 0.0087)
6	8	0.163	0.221	0.426	B_{III}(4.8088; 2.8386; 61.3983; 2.0000; 0.0087)
6	9	0.173	0.237	0.453	B_{III}(4.8848; 2.6529; 70.0431; 2.1500; 0.0087)
6	10	0.183	0.253	0.487	B_{III}(4.9708; 2.5260; 74.5301; 2.2000; 0.0087)
7	1	0.110	0.133	0.191	B_{III}(4.3709; 3.2673; 10.5551; 0.3800; 0.0090)
7	2	0.114	0.140	0.207	B_{III}(4.5828; 3.2976; 12.7789; 0.4500; 0.0087)
7	3	0.119	0.148	0.227	B_{III}(4.4677; 3.4969; 15.4121; 0.6000; 0.0087)
7	4	0.125	0.158	0.258	B_{III}(4.6214; 3.3308; 19.2746; 0.7000; 0.0087)
7	5	0.131	0.168	0.289	B_{III}(4.7195; 3.2125; 24.4491; 0.8500; 0.0087)
7	6	0.138	0.181	0.327	B_{III}(4.6567; 3.3731; 44.3195; 1.6546; 0.0087)
7	7	0.146	0.194	0.364	B_{III}(4.8434; 3.0794; 51.559; 1.7197; 0.0087)

Окончание табл. А.39

θ_0	θ_1	Процентные точки			Модель распределения статистики
		0.9	0.95	0.99	
7	8	0.155	0.209	0.405	B_{III}(4.7910; 2.9523; 57.1575; 1.9000; 0.0087)
7	9	0.165	0.225	0.436	B_{III}(4.8713; 2.7903; 72.7647; 2.3000; 0.0086)
7	10	0.175	0.241	0.463	B_{III}(4.2642; 2.6670; 74.6989; 2.6000; 0.01)
4	6	0.159	0.213	0.402	B_{III}(4.9451; 2.8167; 54.9745; 1.7197; 0.0087)
8	1	0.110	0.134	0.191	B_{III}(4.4757; 3.2680; 10.7031; 0.380; 0.0090)
8	2	0.113	0.138	0.203	B_{III}(4.5960; 3.1619; 11.8642; 0.4000; 0.0087)
8	3	0.117	0.145	0.221	B_{III}(4.4434; 3.5777; 15.1135; 0.6000; 0.0087)
8	4	0.122	0.154	0.247	B_{III}(4.4746; 3.6125; 19.9058; 0.8000; 0.0087)
8	5	0.128	0.164	0.278	B_{III}(4.5738; 3.4174; 23.8064; 0.9000; 0.0087)
8	6	0.135	0.174	0.312	B_{III}(4.7719; 3.2182; 31.9744; 1.1000; 0.0087)
8	7	0.142	0.187	0.349	B_{III}(4.7862; 3.1033; 40.0738; 1.3500; 0.0087)
8	8	0.149	0.200	0.384	B_{III}(4.9118; 2.9697; 53.987; 1.7197; 0.0087)
8	9	0.159	0.215	0.420	B_{III}(4.9553; 2.8177; 68.7411; 2.1000; 0.0087)
8	10	0.167	0.230	0.447	B_{III}(4.8712; 2.7161; 74.7643; 2.3000; 0.0087)
9	1	0.111	0.135	0.192	B_{III}(4.3128; 3.3456; 10.2390; 0.390; 0.0092)
9	2	0.112	0.137	0.200	B_{III}(4.6271; 3.1831; 11.9529; 0.4000; 0.0087)
9	3	0.116	0.143	0.217	B_{III}(4.3927; 3.6661; 14.6644; 0.6000; 0.0087)
9	4	0.121	0.151	0.240	B_{III}(4.3715; 3.7463; 18.8452; 0.8000; 0.0087)
9	5	0.126	0.160	0.269	B_{III}(4.5116; 3.6109; 25.0174; 1.0000; 0.0087)
9	6	0.131	0.169	0.169	B_{III}(4.6314; 3.4428; 31.9594; 1.2000; 0.0087)
9	7	0.138	0.181	0.333	B_{III}(4.7526; 3.2398; 40.0792; 1.4000; 0.0087)
9	8	0.145	0.193	0.368	B_{III}(4.9123; 3.0606; 49.4625; 1.6000; 0.0087)
9	9	0.153	0.207	0.403	B_{III}(5.1040; 2.8347; 58.579; 1.7197; 0.0086)
9	10	0.161	0.221	0.432	B_{III}(4.9243; 2.7838; 65.2796; 2.0000; 0.0087)
10	1	0.112	0.137	0.195	B_{III}(4.5358; 3.2996; 10.6858; 0.390; 0.0088)
10	2	0.111	0.136	0.198	B_{III}(4.6058; 3.2130; 11.8374; 0.4000; 0.0087)
10	3	0.115	0.142	0.213	B_{III}(4.4094; 3.7077; 14.6643; 0.6000; 0.0087)
10	4	0.119	0.149	0.233	B_{III}(4.2916; 3.9108; 17.7709; 0.8000; 0.0087)
10	5	0.124	0.157	0.261	B_{III}(4.4707; 3.7166; 24.2703; 1.0000; 0.0087)
10	6	0.129	0.165	0.288	B_{III}(4.5864; 3.5556; 30.9135; 1.2000; 0.0087)
10	7	0.135	0.176	0.320	B_{III}(4.6398; 3.3941; 37.6304; 1.4000; 0.0087)
10	8	0.141	0.187	0.354	B_{III}(4.8071; 3.1823; 48.6216; 1.6546; 0.0087)
10	9	0.148	0.199	0.388	B_{III}(4.8468; 3.0568; 60.6841; 2.0000; 0.0087)
10	10	0.156	0.213	0.420	B_{III}(5.0443; 2.7436; 59.626; 1.7197; 0.0088)

Таблица А.40

Процентные точки и распределения статистики Андерсона–Дарлинга при проверке сложных гипотез с вычислением ОМП двух параметров обратного гауссовского распределения

θ_0	θ_1	Процентные точки			Модель распределения статистики
		0.9	0.95	0.99	
1	1	0.737	0.895	1.313	B_{III}(6.1238; 3.1751; 14.0035; 2.400; 0.0698)
1	2	0.843	1.059	1.735	B_{III}(6.0219; 3.6293; 30.2458; 6.200; 0.0675)
1	3	0.961	1.255	2.196	B_{III}(6.5550; 3.0737; 46.299; 7.800; 0.0663)
1	4	1.098	1.454	2.580	B_{III}(6.8209; 2.6705; 51.187; 7.700; 0.0667)
1	5	1.228	1.647	2.869	B_{III}(6.6473; 2.4177; 51.272; 7.700; 0.0680)
1	6	1.351	1.809	3.071	B_{III}(6.3414; 2.2618; 48.992; 7.700; 0.0716)
1	7	1.467	1.950	3.257	B_{III}(5.9850; 2.2012; 44.595; 7.800; 0.0731)
1	8	1.558	2.067	3.412	B_{III}(5.2130; 2.2645; 33.943; 7.700; 0.0735)
1	9	1.634	2.156	3.490	B_{III}(5.3059; 2.2709; 32.7287; 7.800; 0.0714)
1	10	1.698	2.224	3.572	B_{III}(5.9944; 2.0162; 30.5401; 6.000; 0.0708)
2	1	0.690	0.829	1.181	B_{III}(6.0060; 3.5986; 12.5163; 2.400; 0.0675)
2	2	0.754	0.925	1.428	B_{III}(5.5094; 4.2127; 21.2179; 5.200; 0.0698)
2	3	0.826	1.041	1.764	B_{III}(6.4998; 3.7767; 45.2636; 8.6662; 0.0650)
2	4	0.908	1.181	2.096	B_{III}(6.8554; 3.2620; 53.0151; 8.6676; 0.0650)
2	5	1.007	1.337	2.424	B_{III}(7.4420; 2.8256; 66.5455; 9.0239; 0.0650)
2	6	1.104	1.483	2.677	B_{III}(7.4598; 2.6158; 68.3448; 9.0242; 0.0650)
2	7	1.203	1.624	2.864	B_{III}(7.4859; 2.4311; 69.9471; 9.0242; 0.0650)
2	8	1.299	1.746	3.026	B_{III}(6.9268; 2.4170; 69.9882; 10.3004; 0.0650)
2	9	1.387	1.854	3.153	B_{III}(6.9942; 2.3297; 69.5407; 10.2998; 0.0650)
2	10	1.471	1.958	3.286	B_{III}(6.0278; 2.3810; 54.3565; 10.2991; 0.0650)
3	1	0.673	0.805	1.134	B_{III}(5.8991; 3.7868; 11.8595; 2.400; 0.0672)
3	2	0.718	0.873	1.311	B_{III}(6.1369; 4.8632; 35.6146; 8.6670; 0.0650)
3	3	0.771	0.955	1.561	B_{III}(5.7293; 4.0413; 27.6069; 6.200; 0.0698)
3	4	0.829	1.057	1.840	B_{III}(6.4965; 3.7146; 46.0939; 8.6656; 0.0650)

Продолжение табл. А.40

θ_0	θ_1	Процентные точки			Модель распределения статистики
		0.9	0.95	0.99	
3	5	0.900	1.176	2.132	B_{III}(7.4099; 3.1291; 61.1273; 8.6667; 0.0650)
3	6	0.980	1.308	2.399	B_{III}(7.9874; 2.7921; 74.4933; 9.0231; 0.0650)
3	7	1.063	1.427	2.600	B_{III}(8.0571; 2.7087; 72.5225; 9.0237; 0.0600)
3	8	1.146	1.554	2.781	B_{III}(8.5422; 2.4144; 63.7751; 7.0000; 0.0600)
3	9	1.227	1.667	2.935	B_{III}(8.7988; 2.2737; 68.9529; 7.2000; 0.0600)
3	10	1.307	1.763	3.047	B_{III}(8.8004; 2.1754; 68.9524; 7.2000; 0.0600)
4	1	0.664	0.793	1.110	B_{III}(5.8519; 3.8882; 11.5594; 2.400; 0.0671)
4	2	0.698	0.845	1.238	B_{III}(5.3538; 5.3288; 22.9349; 7.0000; 0.0675)
4	3	0.740	0.910	1.436	B_{III}(5.6387; 4.5708; 27.5081; 7.0000; 0.0675)
4	4	0.787	0.986	1.686	B_{III}(5.7589; 4.09340; 39.9826; 9.000; 0.0698)
4	5	0.842	1.084	1.934	B_{III}(6.5537; 3.4655; 46.4219; 8.0000; 0.0675)
4	6	0.904	1.190	2.194	B_{III}(6.8253; 3.1718; 61.2636; 9.5000; 0.0675)
4	7	0.974	1.307	2.419	B_{III}(7.4076; 2.8129; 69.3032; 9.0224; 0.0675)
4	8	1.048	1.412	2.592	B_{III}(7.4062; 2.6410; 71.0431; 9.0231; 0.0675)
4	9	1.123	1.524	2.760	B_{III}(7.4858; 2.4792; 73.6341; 9.0235; 0.0675)
4	10	1.195	1.628	2.897	B_{III}(7.4411; 2.3667; 73.6365; 9.0239; 0.0675)
5	1	0.659	0.786	1.096	B_{III}(5.8800; 3.9339; 11.5621; 2.400; 0.0671)
5	2	0.687	0.827	0.827	B_{III}(5.3832; 5.5916; 27.7521; 8.6678; 0.0675)
5	3	0.720	0.881	1.360	B_{III}(5.5318; 5.0043; 31.1395; 8.6673; 0.0675)
5	4	0.760	0.944	1.571	B_{III}(5.8814; 4.3301; 37.6029; 8.6663; 0.0675)
5	5	0.803	1.023	1.799	B_{III}(6.1596; 3.8709; 60.9340; 12.000; 0.0698)
5	6	0.856	1.113	2.035	B_{III}(6.6082; 3.3950; 51.7023; 8.6650; 0.0675)
5	7	0.917	1.220	2.268	B_{III}(7.2066; 2.9940; 65.5245; 9.0213; 0.0680)
5	8	0.979	1.318	1.318	B_{III}(7.3289; 2.7883; 69.4323; 9.0220; 0.0680)
5	9	1.044	1.414	2.602	B_{III}(7.4884; 2.6173; 73.2183; 9.0226; 0.0680)
5	10	1.114	1.514	2.757	B_{III}(7.4934; 2.4672; 75.0000; 9.0231; 0.0680)
6	1	0.655	0.781	1.085	B_{III}(5.7986; 3.9980; 11.2400; 2.400; 0.0671)

П р о д о л ж е н и е т а б л . А.40

θ_0	θ_1	Процентные точки			Модель распределения статистики
		0.9	0.95	0.99	
6	2	0.679	0.815	1.174	B_{III}(5.2935; 5.8182; 26.4298; 8.6680; 0.0680)
6	3	0.707	0.860	1.305	B_{III}(5.3441; 5.3154; 28.5532; 8.6676; 0.0680)
6	4	0.740	0.915	1.489	B_{III}(5.7947; 4.5262; 35.9854; 8.6670; 0.0680)
6	5	0.778	0.979	1.694	B_{III}(6.1074; 4.0045; 42.1634; 8.6662; 0.0680)
6	6	0.822	1.0587	1.907	B_{III}(6.1637; 3.6120; 46.396; 8.6652; 0.0698)
6	7	0.872	1.145	2.123	B_{III}(6.7575; 3.1650; 57.3316; 8.6649; 0.0700)
6	8	0.929	1.246	2.340	B_{III}(7.1614; 2.8755; 68.2312; 9.0211; 0.0700)
6	9	0.988	1.333	2.474	B_{III}(7.2146; 2.7131; 70.7516; 9.0217; 0.0700)
6	10	1.049	1.422	2.628	B_{III}(7.2844; 2.5752; 72.9798; 9.0222; 0.0700)
7	1	0.655	0.780	1.081	B_{III}(5.8421; 4.0362; 11.1704; 2.400; 0.0672)
7	2	0.673	0.807	1.156	B_{III}(5.4561; 5.9720; 26.4093; 8.6680; 0.0650)
7	3	0.697	0.846	1.270	B_{III}(5.5685; 5.4358; 29.1024; 8.6678; 0.0650)
7	4	0.726	0.894	1.427	B_{III}(5.9802; 4.7226; 35.6184; 8.6673; 0.0650)
7	5	0.759	0.948	1.617	B_{III}(6.3225; 4.1978; 41.7939; 8.6668; 0.0650)
7	6	0.779	0.984	1.734	B_{III}(6.8608; 3.8616; 49.1300; 8.6666; 0.0640)
7	7	0.841	1.096	2.018	B_{III}(6.1138; 3.6208; 63.498; 12.000; 0.0698)
7	8	0.891	1.181	2.217	B_{III}(7.1968; 3.1822; 61.7629; 9.0202; 0.0650)
7	9	0.943	1.272	2.388	B_{III}(7.5770; 2.9005; 69.9780; 9.0208; 0.0650)
7	10	1.001	1.357	2.515	B_{III}(7.7412; 2.7373; 73.7918; 9.0214; 0.0650)
8	1	0.660	0.785	1.081	B_{III}(6.1227; 4.0360; 11.5336; 2.400; 0.0666)
8	2	0.668	0.801	1.138	B_{III}(5.5121; 5.8006; 27.9640; 8.6681; 0.0670)
8	3	0.690	0.836	1.241	B_{III}(5.4002; 5.5554; 27.9506; 8.6679; 0.0670)
8	4	0.715	0.877	1.380	B_{III}(5.6470; 4.9453; 32.4456; 8.6676; 0.0670)
8	5	0.745	0.926	1.550	B_{III}(5.9674; 4.4102; 37.9915; 8.6671; 0.0670)
8	6	0.779	0.984	1.734	B_{III}(6.4110; 3.8911; 45.8150; 8.6666; 0.0670)
8	7	0.817	1.054	1.929	B_{III}(7.0348; 3.4829; 55.3483; 8.6659; 0.0660)
8	8	0.859	1.129	2.106	B_{III}(6.4429; 3.4105; 71.057; 12.000; 0.0698)

Окончание табл. А.40

θ_0	θ_1	Процентные точки			Модель распределения статистики
		0.9	0.95	0.99	
8	9	0.910	1.220	2.295	B_{III}(7.8320; 2.8953; 75.0000; 9.0201; 0.0670)
8	10	0.961	1.300	2.435	B_{III}(7.6032; 2.8065; 72.8901; 9.0207; 0.0670)
9	1	0.667	0.794	1.091	B_{III}(6.0785; 4.0967; 11.0332; 2.400; 0.0672)
9	2	0.664	0.796	1.126	B_{III}(5.2061; 6.2168; 24.4769; 8.6680; 0.0670)
9	3	0.684	0.827	1.210	B_{III}(5.3219; 5.7271; 26.7940; 8.6680; 0.0670)
9	4	0.707	0.865	1.345	B_{III}(5.4618; 5.1961; 29.9012; 8.6677; 0.0670)
9	5	0.734	0.910	1.496	B_{III}(5.9892; 4.487; 37.8576; 8.6674; 0.0670)
9	6	0.763	0.959	1.666	B_{III}(6.2913; 4.0565; 43.4772; 8.6670; 0.0670)
9	7	0.797	1.023	1.855	B_{III}(6.4827; 3.7214; 48.0168; 8.6664; 0.0670)
9	8	0.836	1.092	2.036	B_{III}(6.7595; 3.4190; 53.6318; 8.6659; 0.0670)
9	9	0.881	1.170	2.211	B_{III}(6.3746; 3.3201; 74.534; 12.500; 0.0698)
9	10	0.927	1.252	2.362	B_{III}(7.7636; 2.8465; 75.0000; 9.0201; 0.0670)
10	1	0.678	0.808	1.108	B_{III}(5.8108; 4.1511; 10.1199; 2.400; 0.0676)
10	2	0.662	0.792	1.119	B_{III}(5.4827; 5.5338; 20.0888; 6.0043; 0.0671)
10	3	0.679	0.820	1.192	B_{III}(5.2739; 5.8610; 26.0201; 8.6680; 0.0670)
10	4	0.700	0.854	1.312	B_{III}(5.4167; 5.3561; 28.8890; 8.6678; 0.0670)
10	5	0.724	0.895	1.455	B_{III}(5.8460; 4.6549; 35.7438; 8.6676; 0.0670)
10	6	0.751	0.939	1.616	B_{III}(6.1462; 4.2118; 41.1210; 8.6672; 0.0670)
10	7	0.782	0.997	1.785	B_{III}(6.5669; 3.7838; 48.4614; 8.6668; 0.0670)
10	8	0.818	1.059	1.959	B_{III}(7.0172; 3.4172; 56.7255; 8.6663; 0.0670)
10	9	0.855	1.128	2.120	B_{III}(6.4784; 3.4405; 74.0853; 12.5000; 0.0692)
10	10	0.902	1.210	2.295	B_{III}(6.2788; 3.2908; 73.169; 12.500; 0.0698)

Таблица А.41

Процентные точки и модели распределения статистик непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез с вычислением ОМП параметров обобщенного распределения Вейбулла ($\theta_1 = 0.5$)

Оцениваемые параметры	Процентные точки			Модель распределения статистик
	0.9	0.95	0.99	
Критерий Колмогорова				
θ_0	1.001	1.102	1.309	B_{III}(6.5294; 6.8315; 3.5901; 2.0446;0.2801)
θ_1	1.084	1.199	1.427	B_{III}(5.4860; 5.9744; 3.4348; 2.1402; 0.3000)
θ_2	1.038	1.144	1.360	B_{III}(4.7833; 6.1285; 3.0596; 2.0214; 0.3200)
θ_0, θ_1	0.849	0.922	1.071	B_{III}(6.2332; 6.0259;2.8200; 1.3000; 0.2800)
θ_0, θ_2	0.837	0.909	1.054	Sb(2.1787; 1.8756; 1.5259; 0.2567)
θ_1, θ_2	0.848	0.922	1.076	Sb(2.4861; 1.8758; 1.7026; 0.2664)
θ_0, θ_1, θ_2	0.780	0.845	0.979	Sb(2.3507; 1.9291; 1.4629; 0.2495)
Критерий ω^2 Крамера–Мизеса–Смирнова				
θ_0	0.181	0.232	0.359	B_{III}(5.1297; 2.5959; 22.9591;0.8000; 0.0081)
θ_1	0.227	0.296	0.466	B_{III}(7.4650; 2.6576; 44.4162; 1.3633; 0.0000)
θ_2	0.198	0.255	0.395	B_{III}(5.4489; 2.7019; 31.5609; 1.1500; 0.0062)
θ_0, θ_1	0.110	0.135	0.192	B_{III}(6.3779; 4.6451; 27.3376; 1.0000; 0.0050)
θ_0, θ_2	0.106	0.129	0.183	Sb(3.7541; 1.5434; 0.5800; 0.0058)
θ_1, θ_2	0.112	0.138	0.200	B_{III}(10.3369; 4.0734; 25.8270; 0.5802; 0.0000)
θ_0, θ_1, θ_2	0.086	0.103	0.145	B_{III}(6.7252; 4.6508; 16.7920; 0.4800; 0.0050)
Критерий Ω^2 Андерсона–Дарлинга				
θ_0	1.125	1.415	2.140	B_{III}(4.9800; 4.1685; 17.0454; 7.1000; 0.0500)
θ_1	1.279	1.625	2.478	B_{III}(4.7602; 5.1000; 9.8527; 6.8675; 0.0000)
θ_2	1.157	1.454	2.186	B_{III}(3.0331; 4.0598; 9.3429; 5.9880; 0.1000)
θ_0, θ_1	0.673	0.806	1.120	B_{III}(5.7172; 5.0419; 10.1641; 3.0044; 0.0550)
θ_0, θ_2	0.655	0.781	1.079	Sb(3.8953; 1.6481; 3.5052; 0.0513)
θ_1, θ_2	0.743	0.902	1.290	Sb(4.1462; 1.6136; 4.6254; 0.0535)
θ_0, θ_1, θ_2	0.523	0.617	0.839	Sb(3.9313; 1.6905; 2.7078; 0.0530)

Таблица А.42

Процентные точки и модели распределения статистик непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез с вычислением ОМП параметров обобщенного распределения Вейбулла ($\theta_1 = 1$)

Оцениваемые параметры	Процентные точки			Модель распределения статистики
	0.9	0.95	0.99	
Критерий Колмогорова				
θ_0	1.181	1.316	1.585	B_{III}(6.9734; 4.8247; 5.3213; 2.3800; 0.2690)
θ_1	1.083	1.196	1.425	B_{III}(4.6425; 6.6688; 2.8491; 2.2246; 0.3200)
θ_2	0.994	1.092	1.290	B_{III}(6.2635; 7.1481; 3.2059; 2.0000; 0.2800)
θ_0 , θ_1	0.874	0.954	1.117	Sb(2.4299; 1.8866; 1.7504; 0.2598)
θ_0 , θ_2	0.823	0.893	1.033	B_{III}(5.8989; 7.5040; 2.4180; 1.3724; 0.2800)
θ_1 , θ_2	0.815	0.883	1.023	Sb(2.4499; 1.9720; 1.6016; 0.2486)
θ_0 , θ_1 , θ_2	0.758	0.820	0.946	Sb(2.3012; 1.9386; 1.3863; 0.2464)
Критерий ω^2 Крамера–Мизеса–Смирнова				
θ_0	0.320	0.431	0.706	B_{III}(2.2422; 2.2970; 16.4663; 1.6500; 0.0130)
θ_1	0.227	0.295	0.464	B_{III}(5.3830; 2.6954; 40.5199; 1.6450; 0.0050)
θ_2	0.174	0.221	0.336	B_{III}(3.6505; 3.2499; 16.5445; 1.0000; 0.0100)
θ_0 , θ_1	0.117	0.144	0.209	Sb(3.8667; 1.4603; 0.7583; 0.0059)
θ_0 , θ_2	0.102	0.123	0.174	B_{III}(12.2776; 4.1107; 27.2069; 0.4875; 0.0000)
θ_1 , θ_2	0.103	0.127	0.182	B_{III}(4.7144; 4.6690; 10.8816; 0.5261; 0.0059)
θ_0 , θ_1 , θ_2	0.080	0.097	0.135	Sb(4.1842; 1.6587; 0.4794; 0.0061)
Критерий Ω^2 Андерсона–Дарлинга				
θ_0	1.724	2.280	3.639	B_{III}(4.8106; 2.6855; 35.5593;11.8700; 0.0500)
θ_1	1.275	1.617	2.468	B_{III}(3.6999; 3.9108; 16.4841; 9.0300; 0.0740)
θ_2	1.056	1.314	1.953	B_{III}(4.9871; 4.1479; 16.5432; 6.4500; 0.0600)
θ_0 , θ_1	0.687	0.827	1.161	B_{III}(4.6368; 6.6727; 7.1680; 3.6356; 0.0521)
θ_0 , θ_2	0.633	0.753	1.037	B_{III}(3.0467; 5.9239; 5.0944; 2.7870; 0.1000)
θ_1 , θ_2	0.696	0.842	1.194	B_{III}(6.9638; 4.5238; 17.7792; 3.8000; 0.0522)
θ_0 , θ_1 , θ_2	0.494	0.582	0.786	Sb(3.9578; 1.6861; 2.5760; 0.0547)

Т а б л и ц а А.43

Процентные точки и модели распределения статистик непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез с вычислением ОМП параметров обобщенного распределения Вейбулла ($\theta_1 = 2$)

Оцениваемые параметры	Процентные точки			Модель распределения статистики
	0.9	0.95	0.99	
Критерий Колмогорова				
θ_0	1.177	1.311	1.578	B_{III}(6.7515; 4.8240; 5.0591; 2.3291; 0.2717)
θ_1	1.084	1.199	1.427	B_{III}(7.2140; 5.6650; 4.4446; 2.1402; 0.2673)
θ_2	0.926	1.010	1.183	B_{III}(6.5000; 7.9678; 2.4137; 1.6736; 0.2571)
θ_0, θ_1	0.939	1.032	1.221	Sb(2.5036; 1.8528; 2.0153; 0.2538)
θ_0, θ_2	0.815	0.885	1.027	B_{III}(7.0390; 6.6412; 3.0252; 1.3277; 0.2614)
θ_1, θ_2	0.795	0.859	0.990	Sb(2.2155; 1.9799; 1.4517; 0.2396)
θ_0, θ_1, θ_2	0.744	0.802	0.924	B_{III}(8.2570; 7.1724; 3.0694; 1.1864; 0.2393)
Критерий ω^2 Крамера–Мизеса–Смирнова				
θ_0	0.311	0.418	0.682	B_{III}(1.4500; 2.8637; 11.1054; 2.1513; 0.0190)
θ_1	0.227	0.295	0.465	B_{III}(3.2000; 2.8218; 18.9578; 1.3633; 0.0100)
θ_2	0.145	0.181	0.266	B_{III}(4.7339; 3.9276; 14.1490; 0.7643; 0.0060)
θ_0, θ_1	0.141	0.178	0.270	B_{III}(3.3876; 3.6600; 14.8708; 0.8911; 0.0100)
θ_0, θ_2	0.098	0.119	0.168	B_{III}(3.1294; 5.5738; 6.3802; 0.5092; 0.0100)
θ_1, θ_2	0.097	0.119	0.170	B_{III}(5.3732; 4.5740; 12.3385; 0.4921; 0.0050)
θ_0, θ_1, θ_2	0.078	0.093	0.131	B_{III}(5.6572; 4.1890; 12.1005; 0.3299; 0.0066)
Критерий Ω^2 Андерсона–Дарлинга				
θ_0	1.666	2.198	3.506	B_{III}(4.1450; 2.6539; 29.9915; 10.8869; 0.0700)
θ_1	1.279	1.624	2.478	B_{III}(5.0009; 3.4025; 18.8098; 6.8675; 0.0535)
θ_2	0.944	1.158	1.684	B_{III}(4.9000; 4.5319; 10.9284; 4.6019; 0.0530)0
θ_0, θ_1	0.766	0.939	1.365	B_{III}(4.7000; 4.0810; 14.1974; 4.0623; 0.0750)
θ_0, θ_2	0.617	0.734	1.009	B_{III}(4.8500; 5.5248; 8.1915; 2.8374; 0.0650)
θ_1, θ_2	0.653	0.784	1.099	B_{III}(7.2191; 4.6227; 16.4456; 3.3293; 0.0515)
θ_0, θ_1, θ_2	0.482	0.567	0.766	Sb(3.9777; 1.6702; 2.4230; 0.0556)

Таблица А.44

Процентные точки и модели распределения статистик непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез с вычислением ОМП параметров обобщенного распределения Вейбулла ($\theta_1 = 3$)

Оцениваемые параметры	Процентные точки			Модель распределения статистики
	0.9	0.95	0.99	
Критерий Колмогорова				
θ_0	1.150	1.279	1.538	B_{III}(5.0155; 5.4869; 3.3992; 2.2476; 0.3000)
θ_1	1.084	1.199	1.427	B_{III}(5.4860; 5.9744; 3.4348; 2.1402;0.3000)
θ_2	0.892	0.968	1.121	B_{III}(4.6527; 7.8624; 1.8636; 1.4770; 0.3110)
θ_0 , θ_1	0.992	1.095	1.301	B_{III}(37.6836; 9.6249; 24.7703; 4.2400; 0.1000)
θ_0 , θ_2	0.823	0.895	1.041	B_{III}(6.6694; 6.5961; 3.0264;1.3700; 0.2650)
θ_1 , θ_2	0.807	0.877	1.020	B_{III}(5.3859; 8.4947; 2.3199; 1.4900; 0.2850)
θ_0 , θ_1 , θ_2	0.751	0.811	0.932	B_{III}(5.7236; 7.0743; 2.3212; 1.1488; 0.2714)
Критерий ω^2 Крамера–Мизеса–Смирнова				
θ_0	0.286	0.383	0.620	*Sb*(3.4745; 1.1215; 2.1611; 0.0065)
θ_1	0.227	0.296	0.466	B_{III}(8.0420; 2.6222; 50.1417; 1.3950; 0.0000)
θ_2	0.135	0.167	0.240	B_{III}(9.8988; 3.6331; 27.2342; 0.6611; 0.0000)
θ_0 , θ_1	0.167	0.215	0.334	Sb(3.6343; 1.2549; 1.1752; 0.0074)
θ_0 , θ_2	0.100	0.121	0.172	B_{III}(4.9109; 4.8805; 11.3991; 0.5400; 0.0058)
θ_1 , θ_2	0.099	0.121	0.174	B_{III}(9.7955; 5.0455; 35.0176; 0.9000; 0.0000)
θ_0 , θ_1 , θ_2	0.078	0.094	0.133	B_{III}(4.2414; 3.7719; 8.6839; 0.2744; 0.0087)
Критерий Ω^2 Андерсона–Дарлинга				
θ_0	1.556	2.040	3.234	B_{III}(4.3943; 2.4670; 38.0035; 10.7000; 0.0900)
θ_1	1.279	1.625	2.478	B_{III}(5.3689; 3.2667; 21.3222; 6.8675; 0.0535)
θ_2	0.900	1.096	1.572	B_{III}(3.5132; 4.3501; 8.8168; 4.2500; 0.1000)
θ_0 , θ_1	0.871	1.088	1.623	B_{III}(5.6254; 3.7452; 20.0868; 4.9237; 0.0588)
θ_0 , θ_2	0.619	0.737	1.015	B_{III}(7.1939; 6.8828; 3.2613; 1.5626; 0.2598)
θ_1 , θ_2	0.640	0.769	1.072	B_{III}(30.1793 ;4.4373; 60.5986; 3.2000; 0.0000)
θ_0 , θ_1 , θ_2	0.483	0.568	0.773	B_{III}(5.2772; 4.4958; 7.9102; 1.5891; 0.0664)

Таблица А.45

Процентные точки и модели распределения статистик непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез с вычислением ОМП параметров обобщенного распределения Вейбулла ($\theta_1 = 4$)

Оцениваемые параметры	Процентные точки			Модели распределения статистики
	0.9	0.95	0.99	
Критерий Колмогорова				
θ_0	1.131	1.256	1.506	B_{III}(5.0752; 5.5757; 3.3089; 2.1797; 0.3000)
θ_1	1.084	1.199	1.427	B_{III}(3.8892; 6.2974; 2.5413; 2.1402; 0.3400)
θ_2	0.890	0.966	1.119	Sb(2.1569; 1.8555; 1.6361; 0.2661)
θ_0 , θ_1	1.024	1.133	1.352	B_{III}(14.6423; 5.3789; 9.0355; 2.1287; 0.2000)
θ_0 , θ_2	0.839	0.914	1.068	B_{III}(5.1515; 6.1071; 2.8573; 1.3900; 0.3000)
θ_1 , θ_2	0.833	0.909	1.065	B_{III}(7.3590; 7.0743; 3.0755; 1.4500; 0.2450)
θ_0 , θ_1 , θ_2	0.769	0.834	0.970	B_{III}(4.0431; 7.9330; 1.6664; 1.2059; 0.3007)
Критерий ω^2 Крамера–Мизеса–Смирнова				
θ_0	0.269	0.359	0.578	Sb(3.4774; 1.1443; 1.9761; 0.0066)
θ_1	0.227	0.296	0.466	B_{III}(7.2936; 2.6369; 40.7763; 1.2800; 0.0000)
θ_2	0.135	0.166	0.240	B_{III}(6.9544; 4.2952; 17.0098; 0.7100; 0.0000)
θ_0 , θ_1	0.186	0.242	0.379	B_{III}(10.0457; 2.7234; 74.1688; 1.4000; 0.0000)
θ_0 , θ_2	0.104	0.127	0.182	B_{III}(10.3993; 4.2771; 25.5455; 0.5600; 0.0000)
θ_1 , θ_2	0.104	0.128	0.186	B_{III}(5.2006; 4.4814; 13.7165; 0.5770; 0.0050)
θ_0 , θ_1 , θ_2	0.082	0.099	0.141	B_{III}(4.3747; 3.2066; 9.2236; 0.2479; 0.0088)
Критерий Ω^2 Андерсона–Дарлинга				
θ_0	1.484	1.934	3.047	B_{III}(12.5725; 2.7914; 75.0000; 9.6500; 0.0000)
θ_1	1.279	1.625	2.478	B_{III}(6.9691; 2.9121; 32.3978; 6.8675; 0.0535)
θ_2	0.895	1.090	1.556	B_{III}(16.0792; 4.1280; 41.0115; 4.9000; 0.0000)
θ_0 , θ_1	0.958	1.213	1.838	B_{III}(5.9821; 3.4306; 23.7037; 5.4000; 0.0500)
θ_0 , θ_2	0.632	0.754	1.043	B_{III}(19.4692; 4.7303; 32.4566; 2.8950; 0.0000)
θ_1 , θ_2	0.645	0.776	1.087	B_{III}(19.2831; 4.8148; 37.5002; 3.4100; 0.0000)
θ_0 , θ_1 , θ_2	0.496	0.587	0.805	B_{III}(5.9771; 4.3144; 9.7987; 1.7085; 0.0619)

Таблица А.46

Процентные точки и модели распределения статистик непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез с вычислением ОМП параметров обобщенного распределения Вейбулла ($\theta_1 = 5$)

Оцениваемые параметры	Процентные точки			Модели распределения статистики
	0.9	0.95	0.99	
Критерий Колмогорова				
θ_0	1.118	1.241	1.486	B_{III}(4.7261; 5.4585; 3.2780; 2.1396; 0.3160)
θ_1	1.084	1.199	1.427	B_{III}(4.0737; 5.8618; 2.8588; 2.1180; 0.3400)
θ_2	0.907	0.989	1.153	Sb(2.2461; 1.8567; 1.7288; 0.2655)
θ_0 , θ_1	1.045	1.157	1.381	B_{III}(5.7499; 6.4880; 3.3727; 2.1574; 0.2750)
θ_0 , θ_2	0.858	0.937	1.098	B_{III}(4.7054; 3.4609; 2.8365; 0.9900; 0.3000)
θ_1 , θ_2	0.859	0.940	1.105	Sb(2.4735; 1.8966; 1.7594; 0.2472)
θ_0 , θ_1 , θ_2	0.794	0.862	1.012	B_{III} (6.8107; 5.1464; 3.5600; 1.1675; 0.2650)
Критерий ω^2 Крамера–Мизеса–Смирнова				
θ_0	0.256	0.342	0.550	B_{III}(3.9503; 2.5327; 30.3512; 1.6890; 0.0066)
θ_1	0.227	0.296	0.466	B_{III}(7.5116; 2.6526;44.4963; 1.3550; 0.0000)
θ_2	0.140	0.173	0.252	Sb(2.2461; 1.8567; 1.7288; 0.2655)
θ_0 , θ_1	0.199	0.260	0.409	B_{III} (6.5731; 2.8621; 38.4570; 1.2800; 0.0000)
θ_0 , θ_2	0.109	0.134	0.194	B_{III} (9.3325; 3.9118; 20.9934; 0.4950; 0.0000)
θ_1 , θ_2	0.110	0.137	0.201	B_{III} (10.0324; 4.0962; 31.9612; 0.7050; 0.0000)
θ_0 , θ_1 , θ_2	0.087	0.106	0.152	B_{III} (4.3111; 4.0100; 12.1625; 0.4264; 0.0084)
Критерий Ω^2 Андерсона–Дарлинга				
θ_0	1.436	1.862	2.924	B_{III}(4.8285; 3.2562; 24.8506; 9.4000; 0.0500)
θ_1	1.279	1.625	2.478	B_{III}(4.7132; 3.5578; 16.7301; 6.8675; 0.0535)
θ_2	0.913	1.113	1.592	B_{III}(14.4674; 4.1995; 38.4078; 5.2500; 0.0000)
θ_0 , θ_1	1.025	1.305	1.995	B_{III}(2.9220; 3.4603; 12.4402; 5.6400; 0.1000)
θ_0 , θ_2	0.650	0.778	1.083	B_{III}(18.0147; 4.7011; 31.4251; 3.0541; 0.0000)
θ_1 , θ_2	0.660	0.796	1.126	B_{III}(4.2178; 5.1030; 9.9078; 3.5340; 0.0800)
θ_0 , θ_1 , θ_2	0.516	0.614	0.852	B_{III}(5.0163; 4.7355; 9.8990; 2.2172; 0.0687)

Таблица А.47

Процентные точки и модели распределения статистик непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез с вычислением ОМП параметров обобщенного распределения Вейбулла ($\theta_1 = 6$)

Оцениваемые параметры	Процентные точки			Модели распределения статистики
	0.9	0.95	0.99	
Критерий Колмогорова				
θ_2	1.110	1.230	1.471	Sb(2.3074; 1.7536; 2.3680; 0.2609)
θ_0	1.084	1.199	1.427	B_{III}(4.2825; 5.6444; 3 .1666; 2.1430; 0.3350)
θ_1	0.931	1.018	1.193	B_{III}(6.9118; 6.0758; 3.3941; 1.6000; 0.2700)
θ_0 , θ_1	1.057	1.170	1.400	Sb (2.3818; 1.7319; 2.2919; 0.2652)
θ_0 , θ_2	0.877	0.959	1.126	B_{III}(4.4099; 7.2683; 2.3131; 1.6000; 0.3100)
θ_0 , θ_1	0.882	0.967	1.140	B_{III}(5.2085; 2.3642; 4.3216; 0.9100; 0.3100)
θ_2 , θ_1 , θ_0	0.818	0.893	1.052	B_{III}(4.8898; 13.5936; 2.0728; 2.2000; 0 .2840)
Критерий ω^2 Крамера–Мизеса–Смирнова				
θ_0	0.251	0.331	0.530	Sb(3.4475; 1.1730; 1.7364; 0.0066)
θ_1	0.227	0.296	0.466	B_{III}(7.1391; 2.5851; 39.6158; 1.2500; 0.0000)
θ_1	0.148	0.184	0.270	B_{III}(5.8171; 4.3928; 16.4865; 0.8900; 0.0000)
θ_0 , θ_2	0.207	0.271	0.430	Sb (3.8191; 1.2084; 1.7811; 0.0073)
θ_1 , θ_2	0.116	0.143	0.208	B_{III}(9.1508; 3.9676; 25.5001; 0.6300; 0.0000)
θ_1 , θ_2	0.117	0.146	0.218	B_{III}(11.2722; 4.0296; 63.6319; 1.2000; 0.0000)
θ_2 , θ_1 ,θ_2	0.093	0.114	0.167	B_{III}(3.8686; 3.8037; 11.8789; 0.4544; 0.0092)
Критерий Ω^2 Андерсона–Дарлинга				
θ_0	1.404	1.812	2.837	B_{III}(4.2257; 2.6227; 14.8469; 5.0000; 0.0800)
θ_1	1.279	1.625	2.478	B_{III}(6.7753; 2.9441; 31.0263; 6.8675; 0.0535)
θ_2	0.940	1.150	1.652	B_{III}(14.9774; 4.0274; 44.0425; 5.5800; 0.0000)
θ_0 , θ_1	1.073	1.371	2.116	B_{III} (5.9148;3.2311;37.2579; 8.2700; 0.0569)
θ_0 , θ_2	0.671	0.806	1.129	B_{III}(3.9744; 4.9635; 8.1400; 3.1000; 0.0800)
θ_1 , θ_2	0.679	0.823	1.173	B_{III}(25.5888; 4.1738; 49.2114; 3.0000; 0.0000)
θ_0 , θ_1 , θ_2	0.539	0.644	0.908	B_{III}(6.6461; 4.0515; 13.9839; 2.1420; 0.0591)

Таблица А.48

Процентные точки и модели распределения статистик непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез с вычислением ОМП параметров обобщенного распределения Вейбулла ($\theta_1 = 7$)

Оцениваемые параметры	Процентные точки			Модели распределения статистики
	0.9	0.95	0.99	
Критерий Колмогорова				
θ_0	1.104	1.223	1.461	B_{III}(5.0453; 5.6018; 3.3300; 2.1145; 0.3100)
θ_1	1.084	1.199	1.427	B_{III}(5.3655; 6.0543; 3.3092; 2.1402; 0.3000)
θ_2	0.955	1.047	1.231	B_{III}(8.8643; 20.9468; 7.9001; 9.1000; 0.2300)
θ_0 , θ_1	1.066	1.180	1.409	Sb(2.4625; 1.7390; 2.3814; 0.2668)
θ_0 , θ_2	0.895	0.980	1.153	B_{III}(4.2520; 7.5684; 2.1829; 1.6786; 0.3100)
θ_1 , θ_2	0.902	0.991	1.169	B_{III}(4.5096; 5.6482; 3.0218; 1.6000; 0.3100)
θ_0 , θ_1 , θ_2	0.839	0.918	1.079	B_{III}(8.5291; 6.5470; 4.4062; 1.6000; 0.2400)
Критерий ω^2 Крамера–Мизеса–Смирнова				
θ_0	0.246	0.323	0.516	B_{III}(7.5042; 2.4317; 48.3146; 1.4000; 0.0000)
θ_1	0.227	0.296	0.466	B_{III}(6.2641; 2.8729; 33.7742; 1.3750; 0.0000)
θ_2	0.156	0.196	0.290	B_{III}(4.1621; 3.9072; 14.0226; 0.8986; 0.0059)
θ_0 , θ_1	0.213	0.278	0.441	Sb(3.4488; 1.2020; 1.4196; 0.0061)
θ_0 , θ_2	0.122	0.151	0.223	B_{III}(7.9405; 3.8743; 23.4697; 0.6700; 0.0000)
θ_1 , θ_2	0.124	0.155	0.234	B_{III}(7.5192; 4.0675; 25.1497; 0.7945; 0.0000)
θ_0 , θ_1 , θ_2	0.010	0.123	0.181	B_{III}(5.5784; 3.2913; 17.0579; 0.4290; 0.0067)
Критерий Ω^2 Андерсона–Дарлинга				
θ_0	1.380	1.778	2.770	Sb(3.7593; 1.3295; 9.6362; 0.0552)
θ_1	1.279	1.625	2.478	B_{III}(4.8031; 3.4732; 17.6302; 6.8675; 0.0535)
θ_2	0.972	1.193	1.724	B_{III}(3.4890; 4.7102; 10.2828; 5.9597; 0.0800)
θ_0 , θ_1	1.111	1.420	2.184	B_{III}(5.4232; 3.1894; 26.3229; 6.7000; 0.0539)
θ_0 , θ_2	0.692	0.835	1.178	B_{III}(11.9769; 4.7144; 19.2233; 3.0000; 0.0000)
θ_1 , θ_2	0.701	0.852	1.225	B_{III}(22.3537; 4.1744; 51.2639; 3.6000; 0.0000)
θ_0 , θ_1 , θ_2	0.563	0.677	0.955	B_{III}(8.0353; 3.9949; 18.1724; 2.4000; 0.0500)

Таблица А.49

Процентные точки и модели распределения статистик непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез с вычислением ОМП параметров обобщенного распределения Вейбулла ($\theta_1 = 8$)

Оцениваемые параметры	Процентные точки			Модели распределения статистики
	0.9	0.95	0.99	
Критерий Колмогорова				
θ_0	1.100	1.218	1.454	B_{III}(8.0781; 4.8128; 5.8094; 2.0960; 0.2735)
θ_1	1.084	1.199	1.428	Sb(2.4326; 1.7778; 2.3797; 0.2673)
θ_2	0.978	1.074	1.266	B_{III}(8.4485; 5.1812; 5.5890; 1.8364; 0.2700)
θ_0, θ_1	1.072	1.186	1.417	B_{III}(5.7833; 6.1641; 3.2903; 2.1269; 0.2699)
θ_0, θ_2	0.911	0.999	1.179	Sb(2.6863; 1.8734; 2.0545; 0.2559)
θ_1, θ_2	0.929	1.012	1.198	Sb(2.6357; 1.8244; 2.0497; 0.2612)
θ_0, θ_1, θ_2	0.863	0.948	1.117	B_{III}(11.1281; 6.1031; 6.0962; 1.7021; 0.2200)
Критерий ω^2 Крамера–Мизеса–Смирнова				
θ_0	0.242	0.319	0.507	B_{III}(4.5895; 2.5584; 15.2153; 0.8500; 0.0000)
θ_1	0.228	0.296	0.467	B_{III}(6.0112; 2.5379; 23.0339; 0.8900; 0.0000)
θ_2	0.166	0.209	0.314	B_{III}(5.8877; 4.0329; 23.3907; 1.2150; 0.0000)
θ_0, θ_1	0.217	0.284	0.450	Sb(3.4552; 1.1997; 1.4606; 0.0061)
θ_0, θ_2	0.128	0.160	0.239	Sb(4.6035; 1.4434; 1.3182; 0.0060)
θ_1, θ_2	0.131	0.165	0.252	Sb(4.4612; 1.4003; 1.3183; 0.0059)
θ_0, θ_1, θ_2	0.107	0.134	0.201	B_{III}(6.9845; 2.7596; 2.6920; 0.4000; 0.0060)
Критерий Ω^2 Андерсона–Дарлинга				
θ_0	1.363	1.752	2.722	B_{III}(5.6824; 4.0065; 18.9636; 8.4000; 0.0000)
θ_1	1.279	1.624	2.477	Sb(3.4000; 1.3163; 7.4752; 0.0535)
θ_2	1.005	1.240	1.799	B_{III}(3.4843; 5.3032; 9.1592; 6.2767; 0.0800)
θ_0, θ_1	1.139	1.457	2.243	B_{III}(6.3736; 2.8599; 35.0312; 6.7458; 0.0538)
θ_0, θ_2	0.713	0.864	1.227	B_{III}(4.6820; 5.7296; 7.8880; 3.4597; 0.0523)
θ_1, θ_2	0.722	0.881	1.275	B_{III}(4.3613; 6.0352; 7.6499; 3.8116; 0.0520)
θ_0, θ_1, θ_2	0.589	0.714	1.009	B_{III}(7.9147; 4.0088; 21.3294; 2.9120; 0.0500)

Таблица А.50

Процентные точки и распределения статистики Колмогорова при проверке сложных гипотез и вычислении ОМП одного или двух параметров формы бета-распределений первого и второго рода

При оценивании одного из параметров θ_0 или θ_1					
θ_0	θ_1	Процентные точки			Модель распределения статистики
		0.9	0.95	0.99	
0.25	0.25	1.058	1.170	1.398	B_{III}(6.8597; 5.1140; 4.5522; 1.9581; 0.2803)
0.5	0.5	1.030	1.135	1.348	B_{III}(6.6547; 5.0791; 4.0459; 1.7722; 0.2827)
0.75	0.75	1.010	1.113	1.314	B_{III}(6.3949; 5.6417; 3.5771; 1.7799; 0.2833)
1	1	0.994	1.091	1.289	B_{III}(7.3246; 5.4328; 4.0112; 1.7102; 0.2702)
2	2	0.957	1.046	1.233	B_{III}(5.9642; 5.6154; 2.9990; 1.5292; 0.2885)
3	3	0.939	1.025	1.202	B_{III}(8.3807; 5.1719; 4.1359; 1.4690; 0.2601)
4	4	0.928	1.012	1.181	B_{III}(7.2512; 4.8654; 3.6112; 1.3522; 0.2748)
5	5	0.921	1.004	1.171	B_{III}(6.5326; 5.3666; 3.1539; 1.3856; 0.2838)
6	6	0.915	0.997	1.161	B_{III}(7.6098; 5.6551; 3.4763; 1.4386; 0.2652)
7	7	0.912	0.993	1.155	B_{III}(5.1333; 5.9954; 2.3336; 1.3716; 0.3032)
8	8	0.909	0.988	1.150	B_{III}(6.4544; 5.9324; 2.8642; 1.4047; 0.2798)
9	9	0.907	0.986	1.142	B_{III}(6.2320; 5.8571; 2.7868; 1.3812; 0.2839)
10	10	0.905	0.984	1.142	B_{III}(8.0358; 5.2786; 3.6801; 1.3578; 0.2615)
При оценивании двух параметров θ_0 и θ_1					
θ_0	θ_1	Процентные точки			Модель распределения статистики
		0.9	0.95	0.99	
0.25	0.25	0.911	1.004	1.208	B_{III}(6.2931; 6.1562; 3.7837; 1.7288; 0.2826)
0.5	0.5	0.887	0.970	1.141	γ(5.7078; 0.0687; 0.2744;)
0.75	0.75	0.877	0.957	1.122	B_{III}(8.7698; 5.4387; 4.4166; 1.4233; 0.2515)
1	1	0.869	0.948	1.110	γ(6.0588; 0.0641; 0.2695;)
2	2	0.854	0.929	1.083	B_{III}(6.9450; 5.6772; 3.3264; 1.3184; 0.2709)
3	3	0.849	0.924	1.076	B_{III}(8.0883; 5.3028; 3.9525; 1.2880; 0.2608)
4	4	0.846	0.921	1.071	B_{III}(7.1541; 5.9954; 3.3447; 1.3508; 0.2664)
5	5	0.844	0.918	1.069	B_{III}(6.4824; 5.5411; 3.0032; 1.2364; 0.2748)
6	6	0.843	0.916	1.067	B_{III}(6.0438; 6.1303; 2.7738; 1.3066; 0.2798)
7	7	0.840	0.916	1.066	B_{III}(6.4246;5.7070; 2.9437; 1.2503; 0.2744)
8	8	0.841	0.914	1.066	B_{III}(7.3916; 5.4188; 3.5829; 1.2627; 0.2683)
9	9	0.840	0.913	1.064	B_{III}(7.5935; 6.2434; 3.4384; 1.3711; 0.2602)
10	10	0.840	0.913	1.062	B_{III}(7.3966; 5.7184; 3.5120; 1.3084; 0.2651)

Таблица А.51

Процентные точки и распределения статистики Крамера–Мизеса–Смирнова при проверке сложных гипотез и вычислении ОМП одного или двух параметров формы бета-распределений первого и второго рода

При оценивании одного из параметров θ_0 или θ_1					
θ_0	θ_1	Процентные точки			Модель распределения статистики
		0.9	0.95	0.99	
0.25	0.25	0.210	0.273	0.433	B_{III}(4.143; 2.689; 42.948; 1.988; 0.009)
0.5	0.5	0.192	0.247	0.384	B_{III}(4.352; 2.723; 29.754; 1.286; 0.009)
0.75	0.75	0.182	0.232	0.357	B_{III}(4.440; 2.556; 20.019; 0.790; 0.009)
1	1	0.174	0.221	0.334	B_{III}(4.223; 3.025; 19.991; 0.974; 0.009)
2	2	0.158	0.197	0.294	B_{III}(5.319; 2.744; 22.232; 0.714; 0.009)
3	3	0.150	0.187	0.276	B_{III}(4.244; 3.346; 15.550; 0.768; 0.009)
4	4	0.147	0.182	0.265	B_{III}(4.657; 3.144; 14.774; 0.623; 0.008)
5	5	0.144	0.179	0.260	B_{III}(3.950; 3.532; 13.323; 0.725; 0.010)
6	6	0.142	0.177	0.255	B_{III}(4.087; 3.376; 12.456; 0.627; 0.009)
7	7	0.142	0.175	0.251	B_{III}(3.710; 3.568; 11.878; 0.681; 0.010)
8	8	0.140	0.173	0.250	B_{III}(3.884; 3.392; 11.710; 0.611; 0.010)
9	9	0.140	0.173	0.250	B_{III}(4.419; 3.353; 14.121; 0.641; 0.009)
10	10	0.139	0.172	0.249	B_{III}(4.277; 3.450; 13.006; 0.631; 0.009)
При оценивании двух параметров θ_0 и θ_1					
θ_0	θ_1	Процентные точки			Модель распределения статистики
		0.9	0.95	0.99	
0.25	0.25	0.129	0.165	0.267	B_{III}(4.017; 3.864; 28.496; 1.380; 0.009)
0.5	0.5	0.119	0.148	0.217	B_{III}(5.619; 3.214; 19.551; 0.561; 0.007)
0.75	0.75	0.116	0.143	0.209	B_{III}(4.392; 3.703; 15.289; 0.632; 0.009)
1	1	0.113	0.139	0.201	B_{III}(4.878; 3.391; 12.997; 0.453; 0.008)
2	2	0.109	0.132	0.190	B_{III}(4.274; 3.912; 11.443; 0.505; 0.009)
3	3	0.107	0.131	0.187	B_{III}(4.432; 3.890; 12.071; 0.503; 0.009)
4	4	0.107	0.130	0.186	B_{III}(4.626; 3.442; 10.879; 0.388; 0.008)
5	5	0.106	0.129	0.182	B_{III}(5.187; 3.435; 12.058; 0.388; 0.007)
6	6	0.106	0.129	0.182	B_{III}(4.550; 3.598; 11.115; 0.417; 0.008)
7	7	0.105	0.128	0.182	B_{III}(4.784; 3.556; 11.311; 0.402; 0.008)
8	8	0.105	0.128	0.182	B_{III}(4.317; 3.406; 10.160; 0.374; 0.009)
9	9	0.105	0.128	0.181	B_{III}(4.426; 3.789; 11.165; 0.449; 0.008)
10	10	0.105	0.127	0.180	B_{III}(5.929; 3.738; 15.611; 0.478; 0.006)

Таблица А.52

Процентные точки и распределения статистики Андерсона–Дарлинга при проверке сложных гипотез и вычислении ОМП одного или двух параметров формы бета-распределений первого и второго рода

При оценивании одного из параметров θ_0 или θ_1					
θ_0	θ_1	Процентные точки			Модель распределения статистики
		0.9	0.95	0.99	
0.25	0.25	1.185	1.501	2.271	B_{III}(4.7998; 3.0039; 23.1645; 6.6020; 0.0822)
0.5	0.5	1.131	1.425	2.137	B_{III}(4.9816; 3.3050; 22.1179; 6.6710; 0.0762)
0.75	0.75	1.093	1.362	2.025	B_{III}(5.5470; 2.9940; 19.1035; 4.6460; 0.0741)
1	1	1.060	1.311	1.934	B_{III}(4.5154; 3.5339; 15.5727; 5.3919; 0.0818)
2	2	0.991	1.219	1.776	B_{III}(4.9038; 3.2305; 13.9134; 3.8897; 0.0827)
3	3	0.958	1.179	1.707	B_{III}(4.6551; 3.7018; 13.4390; 4.4449; 0.0820)
4	4	0.945	1.155	1.652	B_{III}(5.4124; 3.6231; 14.5538; 4.1091; 0.0719)
5	5	0.935	1.142	1.638	B_{III}(4.9905; 3.7778; 13.6025; 4.2775; 0.0759)
6	6	0.927	1.132	1.619	B_{III}(4.9358; 3.7760; 13.3678; 4.2059; 0.0776)
7	7	0.923	1.126	1.600	B_{III}(4.3926; 3.8138; 11.7944; 4.1217; 0.0870)
8	8	0.918	1.120	1.589	B_{III}(5.0646; 3.7081; 12.8357; 3.8722; 0.0760)
9	9	0.916	1.115	1.588	B_{III}(4.5928; 3.6144; 11.2996; 3.6085; 0.0834)
10	10	0.912	1.113	1.587	B_{III}(4.9414; 3.8613; 12.9902; 4.1448; 0.0759)
При оценивании двух параметров θ_0 и θ_1					
θ_0	θ_1	Процентные точки			Модель распределения статистики
		0.9	0.95	0.99	
0.25	0.25	0.696	0.844	1.201	B_{III}(5.6142; 3.8769; 13.8704; 2.9981; 0.0687)
0.5	0.5	0.680	0.823	1.163	B_{III}(6.7982; 3.7476; 15.9038; 2.7538; 0.0634)
0.75	0.75	0.671	0.809	1.144	B_{III}(5.6255; 4.4234; 12.9940; 3.1863; 0.0661)
1	1	0.662	0.797	1.107	B_{III}(6.0913; 3.8879; 11.6826; 2.3628; 0.0653)
2	2	0.647	0.772	1.072	B_{III}(5.1445; 4.4750; 9.8938; 2.6415; 0.0704)
3	3	0.644	0.766	1.063	B_{III}(5.2646; 4.4997; 10.4705; 2.7149; 0.0701)
4	4	0.641	0.765	1.058	B_{III}(5.6445; 3.8763; 9.6984; 2.0719; 0.0678)
5	5	0.637	0.762	1.052	B_{III}(7.1551; 3.8144; 12.1629; 2.0749; 0.0567)
6	6	0.639	0.761	1.050	B_{III}(5.7710; 4.1758; 10.8466; 2.4035; 0.0660)
7	7	0.636	0.760	1.049	B_{III}(4.6915; 4.0848; 8.0924; 2.1196; 0.0777)
8	8	0.636	0.760	1.048	B_{III}(5.6450; 3.8687; 10.1194; 2.1099; 0.0700)
9	9	0.636	0.759	1.047	B_{III}(5.5236; 4.1458; 9.8416; 2.2648; 0.0678)
10	10	0.635	0.759	1.046	B_{III}(6.7183; 4.3985; 12.6458; 2.6038; 0.0556)

Таблица А.53

Функция распределения статистики Купера при проверке простой гипотезы

V	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,6	0,000129	0,000190	0,000276	0,000394	0,000553	0,000762	0,001035	0,001383	0,001824	0,002373
0,7	0,003050	0,003874	0,004866	0,006052	0,007448	0,009082	0,010978	0,013159	0,015650	0,018472
0,8	0,021649	0,025201	0,029149	0,033510	0,038300	0,043534	0,049223	0,055378	0,062006	0,069112
0,9	0,076699	0,084766	0,093313	0,102333	0,111821	0,121767	0,132160	0,142991	0,154238	0,165889
1,0	0,177924	0,190327	0,203075	0,216147	0,229521	0,243174	0,257083	0,271223	0,285570	0,300099
1,1	0,314786	0,329607	0,344538	0,359554	0,374632	0,389749	0,404883	0,420012	0,435114	0,450170
1,2	0,465159	0,480064	0,494865	0,509546	0,524090	0,538483	0,552710	0,566758	0,580613	0,594266
1,3	0,607703	0,620917	0,633898	0,646638	0,659129	0,671366	0,683343	0,695055	0,706498	0,717669
1,4	0,728564	0,739183	0,749524	0,759585	0,769367	0,778874	0,788099	0,797048	0,805722	0,814124
1,5	0,822256	0,830122	0,837724	0,845067	0,852155	0,858991	0,865580	0,871927	0,878036	0,883913
1,6	0,889563	0,894991	0,900203	0,906663	0,909998	0,914593	0,918994	0,923206	0,927235	0,931087
1,7	0,934766	0,938280	0,941633	0,944830	0,947878	0,950781	0,953545	0,956175	0,958676	0,961053
1,8	0,963311	0,965455	0,967488	0,969417	0,971245	0,972976	0,974615	0,976166	0,977633	0,979019
1,9	0,980329	0,981566	0,982733	0,983833	0,984871	0,985848	0,986769	0,987635	0,988450	0,989216
2,0	0,989936	0,990612	0,991247	0,991843	0,992402	0,992925	0,993416	0,993875	0,994305	0,994707
2,1	0,995083	0,995434	0,995762	0,996069	0,996355	0,996621	0,996870	0,997101	0,997317	0,997517
2,2	0,997704	0,997878	0,998039	0,998189	0,998328	0,998457	0,998577	0,998688	0,998791	0,998887
2,3	0,998975	0,999057	0,999132	0,999202	0,999267	0,999327	0,999382	0,999432	0,999479	0,999522
2,4	0,999562	0,999599	0,999633	0,999664	0,999692	0,999719	0,999743	0,999765	0,999785	0,999804
2,5	0,999821	0,999837	0,999851	0,999864	0,999876	0,999888	0,999898	0,999907	0,999915	0,999923
2,6	0,999930	0,999936	0,999942	0,999948	0,999952	0,999957	0,999961	0,999965	0,999968	0,999971

Таблица А.54

Верхние процентные точки распределения статистики критерия Купера при проверке простых гипотез

Функция распределения	Верхние процентные точки				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
$Kuiper(S)$	1.53692	1.61960	1.74726	1.86243	2.00092

Таблица А.55

Функция распределения статистики Ватсона при проверке простой гипотезы

U^2	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,00	0	0,000030	0,010891	0,071420	0,175283	0,292900	0,405587	0,505668	0,591305	0,663191
0,10	0,722922	0,772283	0,812950	0,846400	0,873889	0,896468	0,915008	0,930231	0,942727	0,952986
0,20	0,961408	0,968321	0,973995	0,978654	0,982477	0,985616	0,988193	0,990308	0,992044	0,993469
0,30	0,994639	0,995599	0,996388	0,997035	0,997566	0,998002	0,998360	0,998654	0,998895	0,999093
0,40	0,999255	0,999389	0,999498	0,999588	0,999662	0,999722	0,999772	0,999813	0,999255	0,999874
0,50	0,999897	0,999915	0,999930	0,999943	0,999953	0,999961	0,999968	0,999974	0,999979	0,999982
0,60	0,999986	0,999988	0,999990	0,999992	0,999993	0,999995	0,999996	0,999996	0,999997	0,999998
0,70	0,999998	0,999998	0,999999	0,999999	0,999999	0,999999	0,999999	0,999999	1	1

Таблица А.56

Верхние процентные точки распределения статистики критерия Ватсона при проверке простых гипотез

Функция распределения	Верхние процентные точки				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
$Watson(S)$	0.131203	0.151759	0.186880	0.221996	0.268426

Таблица А.57

Верхние процентные точки и модели предельных распределений статистики критерия Купера при использовании ОМП

Наименование закона	Оцениваемые параметры	Процентные точки			Модель
		0.1	0.05	0.01	
Экспоненциальное, Рэлея, Максвелла	Масштаба	1.540	1.661	1.905	$B_{\text{Ш}}$(5.5932,7.6149,2.1484,2.3961,0.5630)
Полунормальное	Масштаба	1.543	1.664	1.907	$B_{\text{Ш}}$(11.4707,40.7237,7.020,20.3675,0.3989)
Лапласа	Масштаба	1.469	1.587	1.825	$B_{\text{Ш}}$(7.8324,8.3778,2.6906,2.4820,0.4830)
	Сдвига	1.473	1.597	1.850	$B_{\text{Ш}}$(9.1630,6.6097,4.0210,2.4081,0.4900)
	Оба параметра	1.278	1.365	1.541	$B_{\text{Ш}}$(10.0376,7.8452,3.4694,1.9586,0.4756)
Нормальное, логарифмически нормальное	Масштаба	1.494	1.611	1.847	$B_{\text{Ш}}$(6.3057,8.1797,2.3279,2.4413,0.5370)
	Сдвига	1.540	1.662	1.908	$B_{\text{Ш}}$(5.5932,7.6149,2.1484,2.3961,0.5630)
	Оба параметра	1.402	1.505	1.709	$B_{\text{Ш}}$(7.4917,8.0016,2.4595,2.1431,0.4937)
Коши	Масштаба или сдвига	1.435	1.560	1.815	$B_{\text{Ш}}$(3.8425,5.9345,2.4284,2.1927,0.6150)
	Оба параметра	1.126	1.197	1.337	$B_{\text{Ш}}$(9.4267,7.5349,3.2515,1.5491,0.4700)
Логистическое	Масштаба	1.470	1.588	1.826	$B_{\text{Ш}}$(9.7224,7.8186,3.2399,2.4541,0.4370)
	Сдвига	1.511	1.633	1.880	$B_{\text{Ш}}$(9.1363,6.9693,3.4630,2.3985,0.4790)
	Оба параметра	1.337	1.432	1.622	$B_{\text{Ш}}$(14.3460,18.6137,3.6366,3.9560,0.3525)
Экстремальных значений & Вейбулла	Масштаба[1)]	1.504	1.622	1.861	Sl(1.2459,4.0123,1.3063,0.1873)
	Сдвига[2)]	1.540	1.662	1.908	$B_{\text{Ш}}$(5.5932,7.6149,2.1484,2.3961,0.5630)
	Оба параметра	1.411	1.516	1.726	Sl(1.4012,5.0846,1.4465,-0.0070)
[1)] – при оценивании параметра формы распределения Вейбулла; [2)] – при оценивании параметра масштаба					

Таблица А.58

Верхние процентные точки и модели предельных распределений статистики критерия Ватсона при использовании ОМП

Наименование закона	Оцениваемые параметры	Процентные точки			Модель
		0.1	0.05	0.01	
Экспоненциальное, Рэлея, Максвелла	Масштаба	0.129	0.159	0.230	$B_{III}(3.9420,3.2997,10.8335,0.5000,0.0096)$
Полунормальное	Масштаба	0.131	0.161	0.232	$B_{III}(4.9988,3.8721,15.1781,0.6900,0.0059)$
Лапласа	Масштаба	0.115	0.144	0.214	$B_{III}(9.2136,3.8610,30.5491,0.7010,0.0015)$
	Сдвига	0.111	0.139	0.209	$B_{III}(7.4479,3.2650,30.7784,0.6227,0.0063)$
	Оба параметра	0.071	0.084	0.114	$B_{III}(9.0116,5.3554,17.3201,0.3908,0.0038)$
Нормальное, логарифмически нормальное	Масштаба	0.122	0.151	0.221	$B_{III}(8.8122,3.7536,29.8074,0.7171,0.0019)$
	Сдвига	0.127	0.157	0.228	$B_{III}(3.6769,4.4438,9.8994,0.6805,0.0082)$
	Оба параметра	0.096	0.116	0.164	$B_{III}(3.5230,4.4077,9.2281,0.4785,0.0104)$
Коши	Масштаба или сдвига	0.105	0.133	0.203	$Sl(2.7778,1.5065,0.2690,0.0049)$
	Оба параметра	0.052	0.061	0.081	$B_{III}(8.3558,4.8650,12.0768,0.1930,0.0049)$
Логистическое	Масштаба	0.115	0.144	0.214	$B_{III}(9.2136,3.8610,30.5491,0.7010,0.0015)$
	Сдвига	0.119	0.148	0.218	$B_{III}(3.9730,3.9414,13.2655,0.6637,0.0090)$
	Оба параметра	0.081	0.098	0.135	$B_{III}(4.2608,4.6784,9.3054,0.3810,0.0084)$
Экстремальных значений & Вейбулла	Масштаба[1)]	0.122	0.151	0.221	$B_{III}(8.8122,3.7536,29.8074,0.7171,0.0019)$
	Сдвига[2)]	0.129	0.159	0.230	$B_{III}(4.9988,3.8721,15.1781,0.6792,0.0061)$
	Оба параметра	0.097	0.118	0.165	$Sl(1.2863,1.6736,0.0927,0.0052)$

[1)] – при оценивании параметра формы распределения Вейбулла; [2)] – при оценивании параметра масштаба

Т а б л и ц а А.59

Процентные точки и распределения статистик Купера и Ватсона при проверке сложных гипотез относительно распределения *Sb*-Джонсона с вычислением ОМП одного или двух параметров закона

Оцениваемые параметры	Процентные точки			Модель
	0.1	0.05	0.01	
для критерия Купера				
θ_0	1.540	1.662	1.908	$B_{III}(5.5932,7.6149,2.1484,2.3961,0.5630)$
θ_1	1.494	1.611	1.847	$B_{III}(6.3057,8.1797,2.3279,2.4413,0.5370)$
θ_0,θ_1	1.402	1.505	1.709	$B_{III}(7.4917,8.0016,2.4595,2.1431,0.4937)$
для критерия Ватсона				
θ_0	0.127	0.157	0.228	$B_{III}(3.6769,4.4438,9.8994,0.6805,0.0082)$
θ_1	0.122	0.151	0.221	$B_{III}(8.8122,3.7536,29.8074,0.7171,0.0019)$
θ_0,θ_1	0.096	0.116	0.164	$B_{III}(3.5230,4.4077,9.2281,0.4785,0.0104)$

Т а б л и ц а А.60

Процентные точки и распределения статистик Купера и Ватсона при проверке сложных гипотез относительно распределения Sl-Джонсона с вычислением ОМП различных параметров закона

Оцениваемые параметры	Процентные точки			Модель
	0.1	0.05	0.01	
для критерия Купера				
θ_0	1.540	1.662	1.908	$B_{III}(5.5932,7.6149,2.1484,2.3961,0.5630)$
θ_1	1.512	1.631	1.872	$B_{III}(6.7423,8.0549,2.4935,2.4976,0.5250)$
θ_2	1.540	1.662	1.908	$B_{III}(5.5932,7.6149,2.1484,2.3961,0.5630)$
θ_0,θ_1	1.402	1.505	1.709	$B_{III}(7.4917,8.0016,2.4595,2.1431,0.4937)$
θ_0,θ_2	1.540	1.662	1.908	$B_{III}(5.5932,7.6149,2.1484,2.3961,0.5630)$
θ_1,θ_2	1.402	1.505	1.709	$B_{III}(7.4917,8.0016,2.4595,2.1431,0.4937)$
$\theta_0,\theta_1,\theta_2$	1.402	1.505	1.709	$B_{III}(7.4917,8.0016,2.4595,2.1431,0.4937)$

Окончание табл. А.60

для критерия Ватсона				
θ_0	0.127	0.157	0.228	B_{III}(3.6769,4.4438,9.8994,0.6805,0.0082)
θ_1	0.124	0.153	0.223	B_{III}(3.4122,4.9262,9.6902,0.7643,0.0087)
θ_2	0.127	0.157	0.228	B_{III}(3.6769,4.4438,9.8994,0.6805,0.0082)
θ_0,θ_1	0.096	0.116	0.164	B_{III}(3.5230,4.4077,9.2281,0.4785,0.0104)
θ_0,θ_2	0.127	0.157	0.228	B_{III}(3.6769,4.4438,9.8994,0.6805,0.0082)
θ_1,θ_2	0.096	0.116	0.164	B_{III}(3.5230,4.4077,9.2281,0.4785,0.0104)
$\theta_0,\theta_1,\theta_2$	0.096	0.116	0.164	B_{III}(3.5230,4.4077,9.2281,0.4785,0.0104)

Таблица А.61

Процентные точки и распределения статистик Купера и Ватсона при проверке сложных гипотез относительно распределения *Su*-Джонсона с вычислением ОМП различных параметров закона

Оцениваемые параметры	Процентные точки			Модель
	0.1	0.05	0.01	
для критерия Купера				
θ_0	1.540	1.662	1.908	B_{III}(5.5932,7.6149,2.1484,2.3961,0.5630)
θ_1	1.512	1.631	1.872	B_{III}(6.7676,8.3605,2.3501,2.4976,0.5142)
θ_2	1.491	1.612	1.857	B_{III}(7.5884,8.1397,2.6781,2.4982,0.4882)
θ_3	1.517	1.638	1.885	B_{III}(8.1449,7.2651,3.0338,2.4418,0.4880)
θ_0,θ_1	1.402	1.505	1.709	B_{III}(8.1449,7.2650,3.0338,2.1431,0.5015)
θ_0,θ_2	1.393	1.496	1.703	B_{III}(7.5234,7.3134,2.7694,2.1076,0.5035)
θ_0,θ_3	1.390	1.496	1.713	B_{III}(8.0187,7.7542,2.7862,2.1751,0.4800)
θ_1,θ_2	1.414	1.525	1.749	B_{III}(8.6702,7.5387,2.9284,2.2036,0.4600)
θ_1,θ_3	1.375	1.475	1.675	B_{III}(8.6702,7.5387,2.9284,2.0887,0.4740)
θ_2,θ_3	1.350	1.447	1.640	B_{III}(9.0132,7.9999,2.8585,2.0644,0.4635)
$\theta_0,\theta_1,\theta_2$	1.324	1.422	1.621	B_{III}(10.7806,8.4043,3.2432,2.1461,0.4150)
$\theta_0,\theta_1,\theta_3$	1.333	1.431	1.629	B_{III}(10.3455,8.0495,3.5687,2.1993,0.4463)
$\theta_0,\theta_2,\theta_3$	1.296	1.388	1.575	B_{III}(10.3223,7.7893,3.3393,2.0021,0.4358)
$\theta_1,\theta_2,\theta_3$	1.299	1.394	1.584	B_{III}(10.5957,8.2600,3.2334,2.0676,0.4194)
$\theta_0,\theta_1,\theta_2,\theta_3$	1.235	1.321	1.494	B_{III} (9.9689,7.3418,3.4037,1.8225,0.4438)

Окончание табл. А.61

для критерия Ватсона				
θ_0	0.127	0.157	0.228	B_{III}(3.6769,4.4438,9.8994,0.6805,0.0082)
θ_1	0.124	0.153	0.223	B_{III}(3.4122,4.9262,9.6902,0.7643,0.0087)
θ_2	0.117	0.146	0.215	B_{III}(6.0296,3.7175,22.6978,0.7115,0.0057)
θ_3	0.121	0.150	0.220	B_{III}(7.4154,3.9208,22.4649,0.6800,0.0022)
θ_0,θ_1	0.096	0.116	0.164	B_{III}(3.5230,4.4077,9.2281,0.4785,0.0104)
θ_0,θ_2	0.093	0.114	0.161	B_{III}(4.0651,4.8643,9.5614,0.4903,0.0078)
θ_0,θ_3	0.092	0.113	0.162	B_{III}(4.4170,4.9456,10.4292,0.5005,0.0067)
θ_1,θ_2	0.099	0.123	0.181	B_{III}(5.5181,4.1815,16.0852,0.5478,0.0055)
θ_1,θ_3	0.089	0.108	0.151	B_{III}(5.7461,4.4051,13.9768,0.4528,0.0060)
θ_2,θ_3	0.084	0.101	0.141	B_{III}(5.9952,4.3409,13.8757,0.4020,0.0060)
$\theta_0,\theta_1,\theta_2$	0.077	0.093	0.131	B_{III}(5.5809,4.9570,14.1052,0.4540,0.0060)
$\theta_0,\theta_1,\theta_3$	0.080	0.097	0.137	B_{III}(5.8959,4.4478,14.5923,0.4132,0.0060)
$\theta_0,\theta_2,\theta_3$	0.072	0.087	0.121	B_{III}(6.1780,4.6712,14.5568,0.3791,0.0060)
$\theta_1,\theta_2,\theta_3$	0.072	0.087	0.121	B_{III}(6.1780,4.6712,14.5568,0.3791,0.0060)
$\theta_0,\theta_1,\theta_2,\theta_3$	0.062	0.074	0.101	B_{III}(7.3816,4.4215,14.1896,0.2616,0.0053)

Таблица А.62

Верхние процентные точки распределения статистики Жанга Z_K при проверке простой гипотезы в зависимости от *n*

n	α							
	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	0.95	0.99	0.999
5	0.829	1.02	1.25	1.59	2.16	2.74	4.10	6.01
6	0.916	1.11	1.36	1.71	2.30	2.90	4.30	6.29
7	0.985	1.19	1.45	1.81	2.42	3.03	4.46	6.45
8	1.048	1.26	1.52	1.89	2.51	3.13	4.57	6.59
9	1.100	1.32	1.59	1.96	2.59	3.22	4.69	6.70
10	1.148	1.37	1.64	2.02	2.66	3.30	4.77	6.83
12	1.228	1.46	1.74	2.13	2.78	3.43	4.94	7.08
14	1.295	1.53	1.82	2.22	2.88	3.54	5.06	7.20
16	1.350	1.59	1.88	2.29	2.96	3.63	5.16	7.31
18	1.400	1.64	1.94	2.35	3.04	3.71	5.25	7.41
20	1.441	1.69	.19	2.41	3.10	3.78	5.32	7.48
25	1.527	1.78	2.09	2.51	3.21	3.90	5.47	7.67
30	1.597	1.85	2.17	2.60	3.31	4.01	5.58	7.78
40	1.703	1.97	2.29	2.73	3.46	4.17	5.78	7.97
50	1.781	2.05	2.38	2.82	3.55	4.27	5.89	8.13
70	1.887	2.16	2.50	2.96	3.70	4.42	6.05	8.31
100	1.998	2.28	2.62	3.09	3.84	4.57	6.23	8.52
150	2.117	2.41	2.76	3.22	3.99	4.73	6.40	8.67
200	2.191	2.48	2.84	3.31	4.08	4.83	6.51	8.84
300	2.296	2.59	2.95	3.43	4.21	4.96	6.65	8.97
500	2.415	2.72	3.08	3.56	4.35	5.10	6.80	9.16
1000	2.557	2.87	3.23	3.72	4.52	5.28	6.99	9.35

Таблица А.63

Верхние процентные точки распределения статистики Жанга в виде $10Z_A$–32 при проверке простой гипотезы в зависимости от *n*

n	α							
	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	0.95	0.99	0.999
5	4.235	5.317	6.71	8.70	12.24	15.98	25.43	39.77
6	3.989	4.929	6.14	7.86	10.88	14.04	22.10	34.55
7	3.763	4.599	5.67	7.18	9.83	12.62	19.68	30.39
8	3.574	4.322	5.28	6.63	9.01	11.49	17.69	27.46
9	3.405	4.084	4.95	6.18	8.32	10.54	16.17	24.74
10	3.261	3.887	4.69	5.80	7.75	9.79	14.89	22.74
12	3.017	3.554	4.23	5.19	6.86	8.60	12.89	19.64
14	2.824	3.294	3.89	4.73	6.19	7.70	11.46	17.32
16	2.665	3.087	3.62	4.37	5.67	7.01	10.35	15.47
18	2.536	2.917	3.40	4.07	5.24	6.46	9.47	14.11
20	2.421	2.769	3.21	3.82	4.89	5.99	8.69	12.84
25	2.204	2.490	2.85	3.35	4.23	5.13	7.32	10.71
30	2.047	2.291	2.60	3.03	3.76	4.53	6.39	9.22
40	1.831	2.022	2.26	2.59	3.16	3.75	5.17	7.37
50	1.689	1.845	2.04	2.31	2.77	3.25	4.41	6.16
70	1.510	1.626	1.77	1.97	2.31	2.65	3.49	4.75
100	1.361	1.445	1.55	1.69	1.93	2.18	2.78	3.70
150	1.234	1.292	1.36	1.46	1.63	1.80	2.20	2.81
200	1.164	1.209	1.26	1.34	1.47	1.59	1.90	2.35
300	1.089	1.120	1.16	1.21	1.30	1.38	1.59	1.90
500	1.023	1.042	1.07	1.10	1.15	1.20	1.33	1.52
1000	0.968	0.978	0.99	1.01	1.03	1.06	1.13	1.22

Таблица А.64

Верхние процентные точки распределения статистики Жанга Z_C при проверке простой гипотезы в зависимости от n

n	α							
	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	0.95	0.99	0.999
5	6.03	7.18	8.61	10.6	14.2	18.3	30.6	54.6
6	6.44	7.63	9.11	11.2	14.8	18.9	31.1	54.9
7	6.76	7.98	9.50	11.6	15.3	19.4	31.5	54.4
8	7.05	8.29	9.84	12.0	15.7	19.9	31.8	54.8
9	7.29	8.56	10.14	12.3	16.1	20.2	32.1	55.6
10	7.52	8.81	10.42	12.6	16.5	20.6	32.4	55.1
12	7.90	9.22	10.85	13.1	17.0	21.2	32.9	56.2
14	8.21	9.56	11.24	13.5	17.5	21.7	33.4	56.2
16	8.48	9..86	11.57	13.9	17.9	22.2	33.8	56.3
18	8.73	10.13	11.85	14.2	18.3	22.6	34.3	56.8
20	8.93	10.35	12.10	14.5	18.6	22.9	34.5	57.1
25	9.38	10.82	12.62	15.1	19.3	23.6	35.4	57.6
30	9.74	11.22	13.05	15.5	19.8	24.2	35.8	57.4
40	10.32	11.86	13.75	16.3	20.7	25.2	36.9	59.1
50	10.76	12.34	14.26	16.9	21.3	25.9	37.5	59.4
70	11.42	13.05	15.03	17.7	22.3	26.9	38.6	60.2
100	12.12	13.79	15.84	18.6	23.3	28.0	39.8	61.4
150	12.93	14.67	16.79	19.6	24.4	29.2	41.1	62.2
200	13.48	15.26	17.43	20.3	25.2	30.1	42.2	63.5
300	14.29	16.13	18.36	21.4	26.3	31.3	43.5	64.7
500	15.30	17.21	19.52	22.6	27.7	32.8	45.1	66.1
1000	16.65	18.66	21.06	24.3	29.6	34.8	47.3	68.5