Министерство образования и науки Российской Федерации

НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Б.Ю. ЛЕМЕШКО

КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ ГИПОТЕЗ ОБ ОДНОРОДНОСТИ

Руководство по применению

НОВОСИБИРС
2018

УДК 519.23
Л 44

Рецензенты:
А.А. Попов – д-р техн. наук, профессор
В.А. Селезнев – д-р физ.-мат. наук, профессор

Лемешко Б.Ю.
Л 44 Критерии проверки гипотез об однородности. Руководство по применению (**Препринт расширенного издания)**

Книга рассчитана на специалистов, в той или иной степени сталкивающихся в своей деятельности с вопросами статистического анализа данных, с обработкой результатов экспериментов, применением статистических методов для анализа различных аспектов и тенденций окружающей действительности.

В руководстве рассматриваются вопросы применения статистических критериев, ориентированных на проверку гипотез об однородности законов, которым принадлежат анализируемые выборки, об однородности средних (о равенстве математических ожиданий), об однородности дисперсий (о равенстве дисперсий сравниваемых выборок). Указываются недостатки и преимущества различных критериев, рассматривается применение критериев в условиях нарушения стандартных предположений.

Приводятся таблицы, содержащие процентные точки и модели распределений статистик, необходимые для корректного применения критериев.

Настоящее издание содержит описание более широкого множества критериев. Предлагаются построенные модели предельных распределений статистик для некоторых k-выборочных критериев однородности законов.

Следование рекомендациям обеспечит корректность и повысит обоснованность статистических выводов при анализе данных.

Книга будет полезна инженерам, научным сотрудникам, специалистам различного профиля (медикам, биологам, социологам, экономистам, и др.), сталкивающимся в своей деятельности с необходимостью статистического анализа результатов экспериментов. Руководство будет полезно преподавателям вузов, аспирантам и студентам.

Данный препринт предназначен для использования студентами и магистрантами факультета прикладной математики НГТУ в качестве учебного пособия. Он может использоваться аспирантами и специалистами любого профиля в качестве практического руководства при использовании соответствующих критериев проверки гипотез при обработке результатов экспериментальных исследований.

ISBN ________________

Оглавление

Предисловие **5**
ВВЕДЕНИЕ **8**
1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О ПРОВЕРКЕ СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ **11**
2. КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ ОДНОРОДНОСТИ ЗАКОНОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ **18**
2.1. Критерий Смирнова 20
2.2. Критерий Лемана–Розенблатта 29
2.3. Критерий Андерсона–Дарлинга 35
2.4. Многовыборочный критерий Андерсона–Дарлинга 40
2.5. Критерии однородности Жанга 48
2.6. Двухвыборочные критерии при анализе k выборок 60
2.6.1. k –выборочный критерий Смирнова (max) 61
2.6.2. k –выборочный критерий Лемана–Розенблатта (max) 66
2.6.3. k –выборочный критерий Андерсона–Дарлинга (max) 70
2.7. Критерий однородности χ^2 73
2.7. Примеры применения 76
2.8. Выводы по разделу 80
3. КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ ОДНОРОДНОСТИ СРЕДНИХ **84**
3.1. Параметрические критерии однородности средних 85
3.1.1. Критерий сравнения двух выборочных средних при известных дисперсиях 85
3.1.2. Критерий Стьюдента 86
3.1.3. Критерий сравнения двух выборочных средних при неизвестных и неравных дисперсиях 86
3.1.4. F-критерий однородности средних 89
3.1.5. k-выборочный вариант критерия Стьюдента 90
3.1.6. Об устойчивости параметрических критериев 91
3.2. Непараметрические критерии однородности средних 95
3.2.1. Критерии Уилкоксона и Манна–Уитни. 95
3.2.2. Критерий Краскела–Уаллиса 97
3.2.3. Критерий Ван дер Вардена 98
3.2.4. Критерий Фишера–Йэйтса–Терри–Гёфдинга 100
3.2.5. Многовыборочный критерий Ван дер Вардена 101
3.3. Сравнительный анализ мощности критериев 102
3.4. Выводы по разделу 112

4. КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ ОДНОРОДНОСТИ ДИСПЕРСИЙ..115
4.1. Параметрические критерии однородности дисперсий 118
4.1.1. Критерий Бартлетта 118
4.1.2. Критерий Кокрена... 122
4.1.3. Критерий Хартли.. 124
4.1.4. Критерий Левене 126
4.1.5. Критерий Фишера 132
4.1.6. Критерий Неймана-Пирсона 133
4.1.7. Критерий О`Брайена. 136
4.1.8. Критерий Линка 139
4.1.9. Критерий Ньюмана 140
4.1.10. Критерий Блиса–Кокрена–Тьюки........................ 142
4.1.11. Критерий Кадуэлла–Лесли–Брауна..................... 144
4.1.12. Z–критерий Оверолла–Вудворда......................... 146
4.1.13. Модифицированный Z–критерий 147
4.1.14. Критерий Миллера.. 150
4.1.15. Критерий Лайарда... 152
4.2. Непараметрические критерии однородности дисперсий 153
4.2.1. Критерий Ансари–Бредли 153
4.2.2. Критерий Муда.. 155
4.2.3. Критерий Сижела–Тьюки.................................... 157
4.2.4. Критерий Клотца... 159
4.2.5. Критерий Кейпена... 161
4.2.6. k-выборочный критерий Флайне–Киллина 162
4.3. Сравнительный анализ мощности критериев.............. 166
4.4. Мощность критериев при нарушении предположения о нормальности 177
4.5. Критерий Кокрена при законах, отличных от нормального 183
4.6. Что надо учитывать при выборе критерия однородности дисперсий?.. 184
4.7. О вычислении достигнутого уровня значимости......... 186
4.8. Применение критериев в “нестандартных” условиях . 188
4.9. Выводы по разделу.. 193
5. Заключение..197
Библиографический список 198
Приложение А 207

Предисловие

Необходимость проверки гипотез об однородности законов распределения вероятностей, об однородности средних или однородности дисперсий очень часто возникает в различных приложениях, когда хотят убедиться в неизменности (или наоборот в изменении) статистических свойств некоторого объекта, процесса и т.п. после целенаправленного изменения фактора или факторов (методики, технологии и т.д.), неявным образом влияющих на исследуемый объект. В прикладной математической статистике накопился достаточно обширный арсенал критериев (параметрических и непараметрических), предназначенных для проверки гипотез того или иного вида.

В качестве критериев проверки однородности законов для анализа 2-х выборок привычно используют критерии Смирнова, Лемана–Розенблатта, Андерсона–Дарлинга–Петитта, χ^2. При большем числе сравниваемых выборок могут применяться k-выборочные варианты критериев: k-выборочный критерий Андерсона–Дарлинга, 3 варианта критериев Жанга, критерий однородности χ^2, варианты k-выборочных критериев, предусматривающие многократное использование двухвыборочных критериев.

Для проверки гипотез об однородности средних могут использоваться классические критерии (варианты критерия Стьюдента и F-критерий), в основе которых лежит предположение о принадлежности выборок нормальным законам, или применяться непараметрические критерии, свободные от этого предположения (Уилкоксона, Манна–Уитни, Краскела–Уаллиса и др.).

Арсенал критериев, ориентированных на проверку гипотез об однородности дисперсий наиболее внушительный. Это длинный и возможно неполный ряд параметрических критериев (Бартлетта, Кокрена, Фишера, Хартли, Неймана–Пирсона, О'Брайена, Левене, Лайарда, Миллера, Линка, Ньюмана, Блисса–Кокрена–Тьюки, Кадуэлла–Лесли–Брауна, Z-критерий Оверолла–Вудворда, модифицированный Z-критерий), в обосновании которых решающая роль принадлежит стандартному предположению о принадлежности анализируемых выборок нормальным законам. Это достаточно представительный перечень непараметрических критериев, предназначенных для проверки однородности характеристик рассеяния (Ансари–Бредли, Муда, Сижела–Тьюки, Кейпена, Клотца, Флайне–Киллина).

Применяемое множество критериев создавалось на протяжении практически столетия интенсивного развития математической статистики. Однако до сих пор не сформировалось устойчивого мнения о том, какие из этого множества критериев наиболее предпочтительны при проверке соответствующих гипотез? Какие критерии обладают большей мощностью? Какие достоинства или недостатки связаны с отдельными критериями?

Давно известно, что параметрические критерии проверки однородности средних достаточно устойчивы к нарушению стандартного предположения о нормальности. Выводы могут оставаться корректными при значительных отклонениях наблюдаемого закона от нормального. Однако у устойчивости параметрических критериев есть вторая сторона медали: их преимущество в мощности по сравнению с непараметрическими критериями весьма незначительно.

В свою очередь параметрические критерии проверки однородности дисперсий, за редким исключением, чрезвычайно чувствительны к малейшим отклонениям от нормальности, что негативно отражается на корректности статистических выводов. В то же время в основной массе параметрические критерии имеют заметное преимущество в мощности перед непараметрическими. Причём преимущество в мощности сохраняется за параметрическими критериями и в условиях нарушения предположения о нормальности (если только выборки не принадлежат законам с “тяжёлыми хвостами”). По этой причине очень желательно иметь возможность корректного применения параметрических критериев в условиях нарушения стандартного предположения о нормальности. Для реализации такой возможности необходимо лишь знание распределений статистик критериев в таких нестандартных условиях, что в настоящее время, благодаря использованию компьютерных технологий и имитационного моделирования, отнюдь не является неразрешимой задачей.

Данное руководство подготовлено с учетом наших исследований, проведенных в предшествующих работах и непосредственно при формировании его содержания. Исследования позволили провести сравнительный анализ мощности групп критериев относительно различных альтернатив, позволили указать на нюансы применения или существенные недостатки некоторых критериев, проявляющиеся при проверке гипотез.

Нельзя утверждать, что в каждом из разделов настоящего руководства проанализированы абсолютно все существующие критерии, предназначенные для проверки гипотез определённого вида, по-видимому, наиболее упоминаемые и чаще используемые. И всё-таки хочется надеяться, что настоящая книга, как и предшествующие [86, 87, 88, 112] окажет реальную помощь специалистам, заинтересованным в корректности проводимого статистического анализа.

Я очень признателен своим коллегам и ученикам (Лемешко С.Б., Горбуновой А.А., Сатаевой Т.С., Веретельниковой И.В., Новиковой А.Ю.), внёсшим заметный вклад в уточнение знаний о свойствах критериев, что позволило подготовить и расширить данное руководство.

Значительная часть исследований, способствующих подготовке руководства, проведена при поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках выполнения государственной работы «Обеспечение проведения научных исследований» (№ 1.4574.2017/6.7) и проектной части государственного задания (проект (№ 1.1009.2017/4.6).

Б.Ю. Лемешко
Май 2018

ВВЕДЕНИЕ

Необходимость в проверке гипотез об однородности выборок случайных величин очень часто возникает в различных приложениях при решении задач статистического анализа результатов экспериментальных исследований.

При этом речь может идти или о проверке гипотез об однородности законов распределения вероятностей, соответствующих анализируемым выборкам, или об однородности математических ожиданий, или об однородности дисперсий. Естественно, что наиболее полные выводы могут быть получены на основании решения первой задачи. Однако исследователя в большей степени может интересовать ответ на вопрос об отсутствии (наличии) возможных отклонений в средних значениях анализируемых выборок или в характеристиках рассеяния результатов измерений.

Задача проверки гипотезы об однородности законов, соответствующих k выборкам, формулируется следующим образом. Имеется k выборок

$$x_{11}, x_{12}, ..., x_{1n_1}, \quad x_{21}, x_{22}, ..., x_{2n_2}, \quad \ldots, \quad x_{k1}, x_{k2}, ..., x_{kn_k},$$

где n_i – объём i-й выборки, $i = \overline{1,k}$. Проверяется гипотеза о том, что все выборки извлечены из одной и той же генеральной совокупности, т. е.

$$H_0: \; F_1(x) = F_2(x) = \ldots = F_k(x) = F(x)$$

при любом x. Конкурирующая гипотеза может иметь вид

$$H_1: \; F_i(x) \neq F_j(x)$$

для некоторых $i \neq j, \; i, j \leq k$.

Как правило, критерии проверки гипотезы об однородности законов непараметрические.

При проверке гипотезы об однородности средних (о равенстве математических ожиданий) предполагается, что анализируемые выборки принадлежат какому-то одному закону: неизвестному в случае непараметрических критериев и известному в случае параметрических. Проверяемая гипотеза имеет вид

$$H_0:\ \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_k$$

при конкурирующей гипотезе

$$H_1:\ \mu_{i_1} \neq \mu_{i_2},$$

где неравенство выполняется хотя бы для некоторой пары индексов i_1, i_2.

Для проверки гипотез о равенстве математических ожиданий может использоваться ряд параметрических критериев, применение которых, как правило, опирается на стандартное предположение о принадлежности анализируемых выборок нормальным законам, а также непараметрические критерии, свободные от этого предположения. В то же время следует иметь в виду, что применение непараметрических критериев базируется на предположении, что законы, которым принадлежат сравниваемые выборки, могут отличаться только параметрами сдвига.

В критериях проверки однородности дисперсий проверяемая гипотеза о постоянстве дисперсий k выборок имеет вид

$$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \ldots = \sigma_k^2,$$

а конкурирующая с ней гипотеза

$$H_1: \sigma_{i_1}^2 \neq \sigma_{i_2}^2,$$

где неравенство выполняется, по крайней мере, для одной пары индексов i_1, i_2.

Для проверки такого рода гипотез может использоваться значительный перечень классических параметрических критериев. Обоснованное применение этих критериев требует выполнения стандартного предположения о принадлежности анализируемых выборок нормальному закону.

В случае непараметрических аналогов речи о принадлежности выборок нормальным законам не идёт. Однако предполагается, что анализируемые выборки принадлежат пусть неизвестному, но одному и тому же виду закона с одинаковыми математическими ожиданиями. Именно тогда обеспечивается корректность применения критериев.

У исследователя, стоящего перед проблемой выбора критерия, несмотря на обилие публикаций, возникает множество вопросов, так как остается не ясным, в каких случаях применение какого критерия предпочтительней.

В случае критериев проверки гипотез об однородности законов распределений, перечень которых достаточно узок, специалиста может интересовать, насколько хорошо при ограниченных объёмах выборок распределения статистик хорошо описываются предельными распределениями? Или какой из критериев является более мощным (лучше распознаёт альтернативы)?

Такие же вопросы возникают относительно критериев проверки гипотез о средних, где мы имеем множество критериев (параметрических и непараметрических), но нет четких указаний и сведений о преимуществе тех или иных, например, о степени устойчивости параметрических критериев к отклонениям от стандартного предположения о нормальности, о результатах сравнения мощности параметрических и непараметрических критериев. Отсутствие указаний не позволяет в конкретной ситуации выбрать наиболее мощный критерий. По некоторым параметрическим критериям проверки гипотез о средних имеется информация об относительной устойчивости распределений статистик к отклонениям наблюдаемого закона от нормального [103, 100]. По другим критериям это требует дополнительных исследований.

Параметрические критерии проверки гипотез о дисперсиях, наоборот, весьма чувствительны к любым отклонениям от предположений, в условиях которых они были получены. И также отсутствует или противоречива информация о мощности соответствующих критериев [77, 101, 35].

Множества критериев, построенных для проверки гипотез о равенстве математических ожиданий или о равенстве дисперсий, заметно шире множества критериев проверки однородности законов. Поэтому проблема выбора наиболее предпочтительного критерия стоит более остро. Особенно важна объективная информация относительно свойств критериев проверки гипотез об однородности дисперсий (об однородности характеристик рассеяния).

1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О ПРОВЕРКЕ СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ

С каждым из используемых для проверки гипотезы H_0 критериев связана статистика S, которая представляет собой некоторую меру для измерения вероятности соответствия (несоответствия) анализируемых выборок проверяемой гипотезе H_0. В силу случайности извлекаемых выборок случайными оказываются и значения статистики S, вычисляемые в соответствии с этими выборками. При справедливости проверяемой гипотезы H_0 статистика S подчиняется некоторому распределению $G(S|H_0)$.

Схема проверки гипотезы заключается в следующем. Область определения статистики разбивается на два подмножества, одно из которых представляет собой критическую область, попадание в которую при справедливости H_0 маловероятно. При попадании вычисленного по выборке значения S^* статистики S в критическую область проверяемая гипотеза H_0 отклоняется (отвергается). В противном случае считается, что нет оснований для отклонения гипотезы H_0.

Заметим, что неотклонение гипотезы H_0 в процессе проверки не означает, что она справедлива. Результат проверки свидетельствует лишь о том, что реальное положение вещей, возможно, не очень сильно отличается от предполагаемого состояния, соответствующего H_0.

С другой стороны, справедливая гипотеза H_0 может быть отклонена и эти самым совершена ошибка 1-го рода. При проверке гипотез вероятность ошибки 1-го рода α (уровень значимости), как правило, задают, допуская тем самым возможность отклонения H_0 и возможность такой ошибки.

При построении критериев стремятся к использованию одномерных статистик, что упрощает построение критической области. При этом критерии могут быть правосторонними, левосторонними и двусторонними, что определяет построение критической области.

Все критерии проверки однородности, как правило, являются правосторонними или двусторонними.

В случае правостороннего критерия граница критической области (критическое значение) $S_{1-\alpha}$, определяется уравнением

$$\alpha = \int\limits_{S_{1-\alpha}}^{\infty} g(s|H_0)ds = 1 - G(S_{1-\alpha}|H_0)\,, \tag{1.1}$$

где $g(s|H_0)$ − условная плотность распределения статистики при справедливости H_0.

Для используемых на практике критериев в благоприятных случаях известны асимптотические (предельные) распределения $G(S|H_0)$ соответствующих статистик при условии справедливости гипотезы H_0. В тех ситуациях, когда распределения статистик существенно зависят от объёмов выборок n, информация о законе распределения статистики бывает представлена таблицей процентных точек (квантилей распределения $G(S|H_0)$). Критическое значение $S_{1-\alpha}$ вычисляют в соответствии с $G(S|H_0)$ или берут из соответствующей таблицы процентных точек.

В случае правостороннего критерия в принятой практике статистического анализа обычно полученное значение статистики S^* сравнивают с критическим значением $S_{1-\alpha}$ при заданном уровне значимости α. Проверяемую гипотезу H_0 отклоняют, если $S^* > S_{1-\alpha}$ (см. рис. 1.1).

Больше информации о степени соответствия выборки теоретическому закону можно почерпнуть из достигнутого уровня значимости p_{value} – вероятности возможного превышения полученного значения статистики при справедливости H_0:

$$p_{value} = P\{S > S^*\} = \int\limits_{S^*}^{\infty} g(s|H_0)\,ds = 1 - G(S^*|H_0)\,. \tag{1.2}$$

Именно эта вероятность позволяет судить о том, насколько хорошо анализируемые выборки согласуются с проверяемой гипотезой, так как по существу представляет собой вероятностную меру истинности нулевой гипотезы (см. рис. 1.2). Проверяемую гипотезу H_0 не отвергают, если $P\{S > S^*\} > \alpha$.

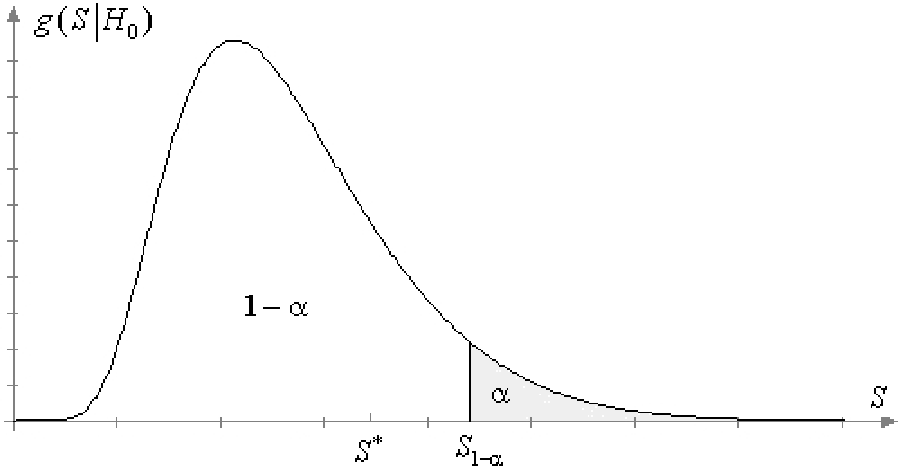

Рис. 1.1. Плотность распределения статистики при справедливости гипотезы H_0 и критическое значение для правостороннего критерия

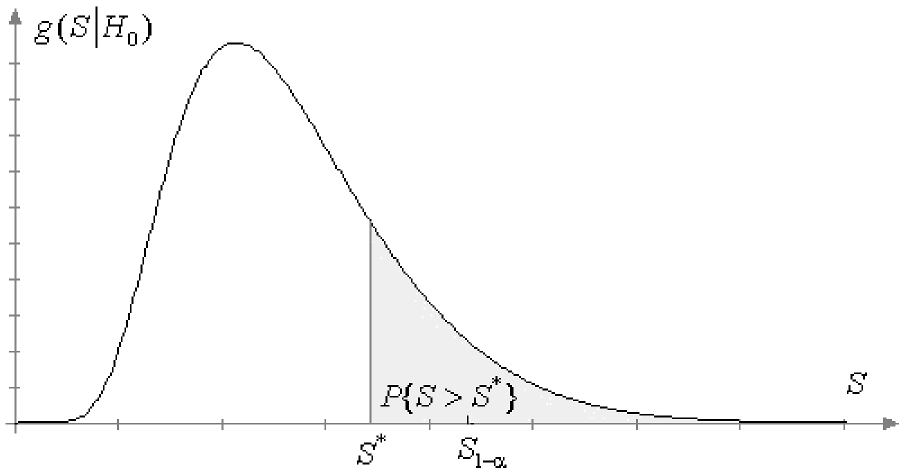

Рис. 1.2. Плотность распределения статистики при справедливости гипотезы H_0 и достигнутый уровень значимости

В случае двустороннего критерия критическая область состоит из двух частей. И проверяемая гипотеза H_0 отклоняется, если $S^* < S_{\alpha/2}$ или $S^* > S_{1-\alpha/2}$ (см. рис. 1.3). А достигнутый уровень значимости в этом случае определяется соотношением

$$p_{value} = 2\min\left\{G(S^*|H_0), 1-G(S^*|H_0)\right\}. \tag{1.3}$$

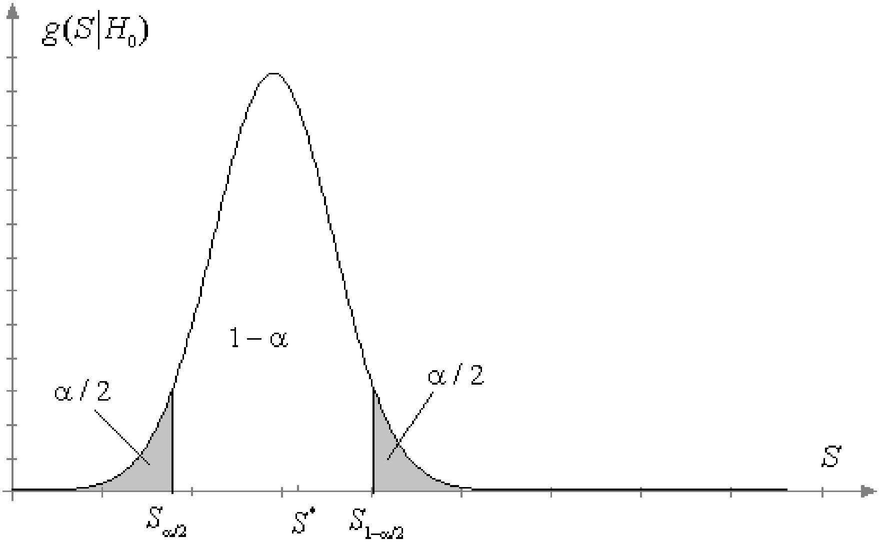

Рис. 1.3. Плотность распределения статистики при справедливости гипотезы H_0 и критические значения для двустороннего критерия

Задачи оценивания параметров и проверки гипотез опираются на выборки независимых случайных величин. Случайность самой выборки предопределяет, что возможны и ошибки в результатах статистических выводов. С результатами проверки гипотез связывают ошибки двух видов: ошибка первого рода состоит в том, что отклоняют гипотезу H_0, когда она верна; ошибка второго рода состоит в том, что принимают (не отклоняют) гипотезу H_0, в то время как справедлива конкурирующая гипотеза H_1. Уровень значимости α задает вероятность ошибки первого рода. Обычно, используя критерии проверки гипотез, не рассматривают конкретную конкурирующую гипотезу.

Если же гипотеза H_1 задана и имеет некоторый конкретный вид, то задание величины α для используемого критерия проверки гипотез определяет и вероятность ошибки второго рода β. Ошибка второго рода заключается в том, что не отклоняется гипотеза H_0, когда на самом деле справедлива гипотеза H_1.

Вероятность ошибки второго рода β для правостороннего критерия определяется выражением

$$\beta = \int_{-\infty}^{S_{1-\alpha}} g(s|H_1)ds , \tag{1.4}$$

а для двустороннего – соотношением

$$\beta = \int_{S_{\alpha/2}}^{S_{1-\alpha/2}} g(s|H_1)ds . \tag{1.5}$$

Для конкретной альтернативы H_0 и H_1 задание вероятности ошибки 1-го рода определяет и вероятность ошибки 2-го рода. Рис. 1.4 поясняет это для правостороннего критерия. На рис. 1.4 $g(s\,|\,H_0)$ отображает плотность распределения статистики S при справедливости гипотезы H_0, а $g(s\,|\,H_1)$ – плотность распределения при справедливости H_1.

Мощность критерия представляет собой величину $1-\beta$. Очевидно, что чем выше мощность используемого критерия при заданном значении α, тем лучше он различает гипотезы H_0 и H_1. Особенно важно, чтобы используемый критерий хорошо различал близкие конкурирующие гипотезы. Графически требование максимальной мощности критерия означает, что на рис. 1.4 плотности распределений статистики $g\left(s\,|\,H_0\right)$ и $g\left(s\,|\,H_1\right)$ должны быть максимально “раздвинуты”.

Аналогичным образом можно проиллюстрировать вероятности ошибок второго рода и мощности для двустороннего критериев (см. рис.1.5).

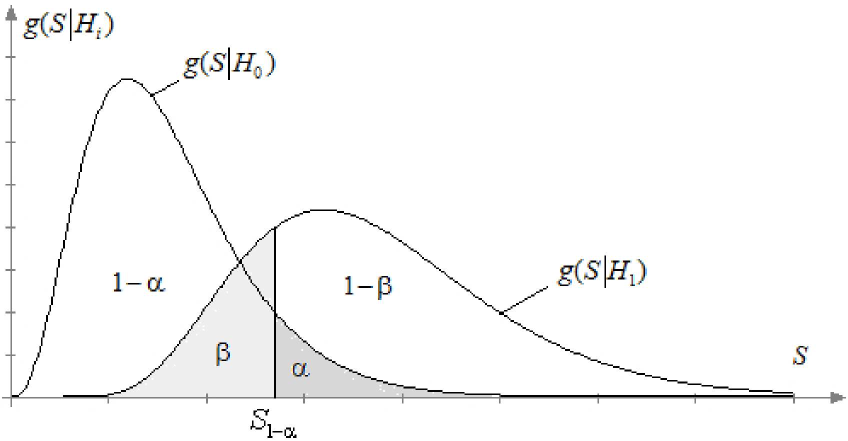

Рис. 1.4. Плотности распределения статистик при справедливости соответственно гипотез H_0 и H_1 в случае правостороннего критерия

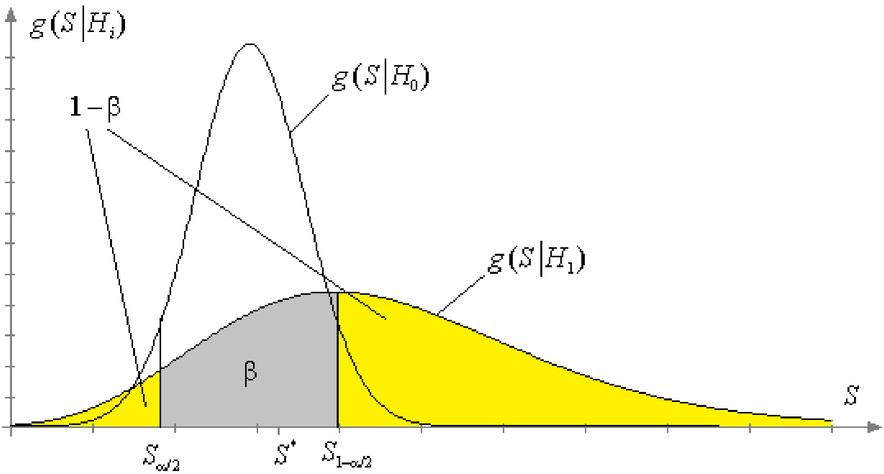

Рис. 1.5. Плотности распределения статистик при справедливости соответственно гипотез H_0 и H_1 в случае двустороннего критерия

Очевидно, что при проверке любой статистической гипотезы желательно использовать наиболее мощный критерий, который для заданной вероятности ошибки первого рода обеспечивает минимальную вероятность ошибки второго рода относительно любой конкурирующей гипотезы H_1. Ещё лучше использовать равномерно наиболее мощный критерий, который для любого заданного α обеспечивает минимальное значение β. Однако существование такого критерия для проверки конкретной гипотезы H_0 является редчайшим исключением. Нет такого и среди критериев, которые могут использоваться для проверки гипотез об однородности законов, о равенстве математических ожиданий или дисперсий.

В последние годы в публикациях, посвященных предлагаемым критериям или модификациям критериев, как правило, пытаются сравнивать критерии по мощности, используя методы статистического моделирования. При этом перечень рассматриваемых критериев и рассматриваемых альтернатив бывает достаточно широк.

2. КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ ОДНОРОДНОСТИ ЗАКОНОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

С необходимостью решения задач проверки гипотез о принадлежности двух (или более) выборок случайных величин одной и той же генеральной совокупности (проверки однородности) постоянно сталкиваются при анализе случайных ошибок средств измерений, при статистическом управлении качеством процессов. Такая задача естественно возникает при проверке средств измерений, когда пытаются убедиться в том, что закон распределения случайных ошибок измерений не претерпел существенных изменений по истечении некоторого интервала времени. При обработке экспериментального материала очень часто эту задачу приходится решать технологам, медикам, биологам.

Задача проверки однородности двух выборок формулируется следующим образом. Пусть имеются две упорядоченные по возрастанию выборки размером m и n:

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_m \quad \text{и} \quad y_1 < y_2 < \ldots < y_n .$$

Для определенности обычно полагают, что $m \le n$, но это совсем необязательно. Проверяется гипотеза о том, что две выборки извлечены из одной и той же генеральной совокупности, т. е. H_0: $F(x) = G(x)$ при любом x.

Как правило, на практике используется либо критерий Смирнова [77], либо критерий Лемана–Розенблатта [77, 33, 59]. Предпочтительность использования данных критериев для проверки однородности обсуждалась в [109]. В русскоязычной литературе практически не упоминается применение двухвыборочного критерия Андерсона–Дарлинга [58] (Андерсона–Дарлинга–Петита) или, тем более, об использовании многовыборочного варианта критерия Андерсона–Дарлинга [63].

Цель предшествующих работ [92, 39] состояла в исследовании распределений статистик и мощности критериев Смирнова и Лемана–Розенблатта при ограниченных объемах выборок, в уточнении объемов, начиная с которых можно реально пользоваться предельными распределениями, в выяснении характера альтернатив, относительно которых тот или иной критерий имеет преимущество в мощности. При проведении исследований использовалась методика компьютерного моделирования и анализа статистических закономерностей, хорошо зарекомендовавшая себя в аналогичных работах (например, [103, 101, 35]), базирующаяся в основном на методе статистического моделирования. Этот же подход использован при исследовании свойств критериев, рассмотренных в данном разделе.

Мощность критериев проверки однородности исследовалась в случае ряда альтернатив. Для определенности проверяемой гипотезе H_0 соответствовала принадлежность выборок одному и тому же стандартному нормальному закону распределения с плотностью

$$f(x)=\frac{1}{\theta_1\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{(x-\theta_0)^2}{2\theta_1^2}\right\}$$

и параметрами сдвига $\theta_0=0$ и масштаба $\theta_1=1$.

При всех альтернативах первая выборка всегда соответствовала стандартному нормальному закону, а вторая – некоторому другому.

В частности, при альтернативе сдвига в случае конкурирующей гипотезы H_1 вторая выборка соответствовала нормальному закону с параметром сдвига $\theta_0=0.1$ и параметром масштаба $\theta_1=1$, в случае конкурирующей гипотезы H_2 – нормальному закону с параметрами $\theta_0=0.5$ и $\theta_1=1$.

При изменении масштаба в случае конкурирующей гипотезы H_3 вторая выборка соответствовала нормальному закону с параметрами $\theta_0=0$ и $\theta_1=1.1$, в случае конкурирующей гипотезы H_4 – нормальному закону с параметрами $\theta_0=0$ и $\theta_1=1.5$.

В случае конкурирующей гипотезы H_5 вторая выборка соответствовала логистическому закону с плотностью

$$f(x)=\frac{1}{\theta_1\sqrt{3}}\exp\left\{-\frac{\pi(x-\theta_0)}{\theta_1\sqrt{3}}\right\}\Bigg/\left[1+\exp\left\{-\frac{\pi(x-\theta_0)}{\theta_1\sqrt{3}}\right\}\right]^2$$

и параметрами $\theta_0=0$ и $\theta_1=1$. Нормальный и логистический законы очень близки и трудноразличимы с помощью критериев согласия.

2.1. Критерий Смирнова

Критерий однородности Смирнова предложен в работе [115]. Предполагается, что функции распределения $F(x)$ и $G(x)$ являются непрерывными. Статистика критерия Смирнова измеряет расстояние между эмпирическими функциями распределения, построенными по выборкам

$$D_{m,n} = \sup_x \left| G_m(x) - F_n(x) \right| .$$

При практическом использовании критерия значение статистики $D_{m,n}$ рекомендуется вычислять в соответствии с соотношениями [77]:

$$D^+_{m,n} = \max_{1 \le r \le m} \left[\frac{r}{m} - F_n(x_r) \right] = \max_{1 \le s \le n} \left[G_m(y_s) - \frac{s-1}{n} \right],$$

$$D^-_{m,n} = \max_{1 \le r \le m} \left[F_n(x_r) - \frac{r-1}{m} \right] = \max_{1 \le s \le n} \left[\frac{s}{n} - G_m(y_s) \right],$$

$$D_{m,n} = \max\left(D^+_{m,n}, D^-_{m,n} \right).$$

Если гипотеза H_0 справедлива, то при неограниченном увеличении объемов выборок [77] $\lim_{m \to \infty} P\left\{ \sqrt{\frac{mn}{m+n}} D_{m,n} < S \right\} = K(S)$, т. е. статистика

$$S_C = \sqrt{\frac{mn}{m+n}} D_{m,n} \tag{2.1}$$

в пределе подчиняется распределению Колмогорова $K(S)$ [77] с функцией распределения

$$K(s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{-2k^2 s^2} . \tag{2.2}$$

Значения $K(S)$ представлены в таблице **А.1** приложения, критические значения – в таблице **А.4**.

Однако при ограниченных значениях m и n случайные величины $D_{m,n}^{+}$ и $D_{m,n}$ являются дискретными, и множество их возможных значений представляет собой решетку с шагом $1/k$, где k – наименьшее общее кратное m и n [77]. Для значений $m, n \le 20$ таблицы процентных точек для статистики $D_{m,n}$ приводятся в [77]. Условное распределение $G\left(S_{\text{C}} \middle| H_0\right)$ статистики S_{C} при справедливости гипотезы H_0 медленно сходится к $K(S)$ и существенно отличается от него при не очень больших m и n. Асимптотические формулы для распределений $D_{m,n}^{+}$ и $D_{m,n}$ рассматривались в [78, 83, 114].

На рис. 2.1 показаны условные распределения статистики (2.1) при справедливости H_0 в зависимости от m и n (при $m = n$).

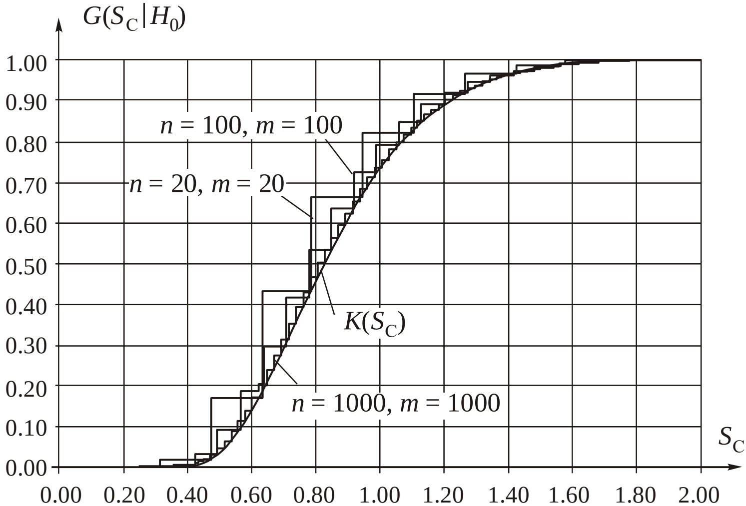

Рис. 2.1. Распределения статистики (2.1) при справедливости H_0 в зависимости от m и n

Как следует из полученной картины, даже при $m = 1000$ и $n = 1000$ ступенчатость $G\left(S_{\text{C}} \middle| H_0\right)$ сохраняется. Другим недостатком применения критерия со статистикой (2.1) является то (рис. 2.1), что распределения $G(S_{\text{C}}|H_0)$ с ростом m и n приближаются к предельному распределению $K(s)$ слева.

Гладкость распределения статистики сильно зависит от величины k. Поэтому предпочтительнее применять критерий, когда объемы выборок m и n не равны и представляют собой взаимно простые числа. В таких случаях наименьшее общее кратное m и n максимально и равно $k = mn$, а распределение статистики больше напоминает непрерывную функцию распределения. И вот тогда при небольших и умеренных значениях m и n проявляется существенное отличие распределения $G(S_{\text{C}}|H_0)$ от предельного $K(S)$, так как $G(S_{\text{C}}|H_0)$ заметно сдвинуто влево от $K(S)$.

В этой связи можно предложить [92, 39] следующую простую модификацию статистики (2.1):

$$S_{\text{CM}} = \sqrt{\frac{mn}{m+n}}\left(D_{m,n} + \frac{m+n}{4.6mn}\right), \tag{2.3}$$

у которой практически отсутствует последний недостаток. Условные распределения статистики (2.3) при справедливости H_0 в зависимости от m и n (при $m = n$) иллюстрирует рис. 2.2.

Как было сказано выше, гладкость распределения статистики зависит от величины k. В качестве иллюстрации этого факта и различий в распределениях статистик (2.1) и (2.3) на рис. 2.3 приведены предельное распределение Колмогорова $K(S)$ и полученные в результате моделирования эмпирические распределения $G(S_{\text{C}}|H_0)$ статистики (2.1) и $G(S_{\text{CM}}|H_0)$ статистики (2.3) при $m = 61$ и $n = 53$.

Как видим, распределение статистики (2.1) существенно отличается от распределения Колмогорова $K(S)$, а распределение статистики (2.3) визуально практически совпадает с ним. Объем выборок смоделированных значений статистик в данном случае, как и в работах [92, 39], составил 10 000 наблюдений.

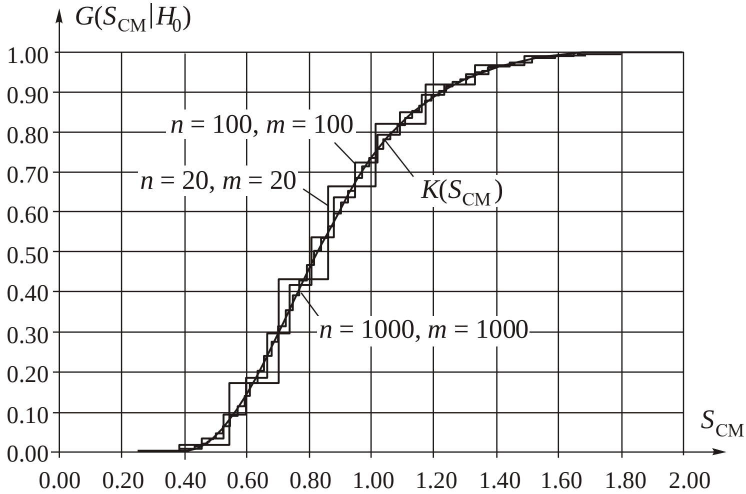

Рис. 2.2. Распределения статистики (2.3) при справедливости H_0 в зависимости от m и n

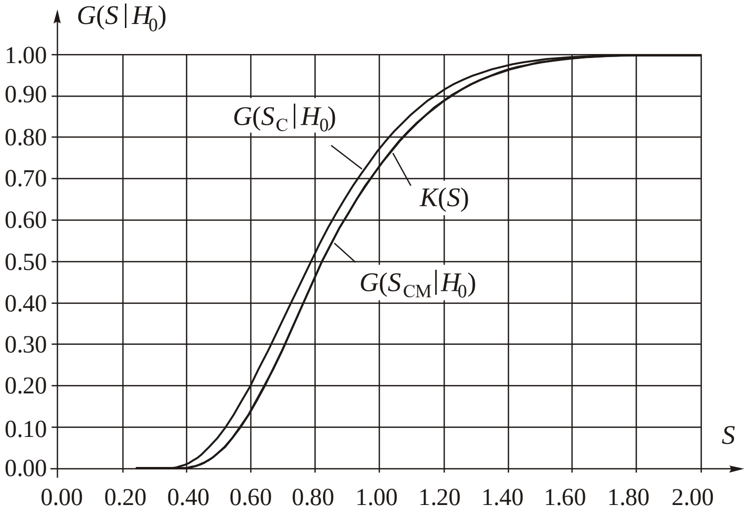

Рис. 2.3. Распределения статистики (2.1) и (2.3) при справедливости H_0, $m = 61$ и $n = 53$

При проверке согласия полученного эмпирического распределения статистики (2.3) с распределением Колмогорова достигнутые уровни значимости по соответствующим критериям составили: 0.72 по критерию χ^2 Пирсона (при 10 равновероятных интервалах); 0.83 по критерию Колмогорова; 0.97 по критерию ω^2 Крамера–Мизеса–Смирнова; 0.94 по критерию Ω^2 Андерсона–Дарлинга.

Использование в критерии Смирнова со статистикой (2.3) взаимно простых m и n делает более обоснованным вычисление достигаемого уровня значимости $P\left\{S_{\text{СМ}} > S_{\text{СМ}}^*\right\} = 1 - G(S_{\text{СМ}}^* | H_0)$, где $S_{\text{СМ}}^*$ – значение статистики (2.3), найденное при проверке гипотезы H_0 по конкретным выборкам, в соответствии с распределением Колмогорова: $P\left\{S_{\text{СМ}} > S_{\text{СМ}}^*\right\} \approx 1 - K\left(S_{\text{СМ}}^*\right)$. Соответственно более правомерно применение в критерии процентных точек (квантилей) распределения Колмогорова. Этого нельзя сказать о критерии Смирнова со статистикой (2.1), так как в этом случае критические значения, определяемые по распределению Колмогорова, оказываются завышенными по сравнению с истинными. Следовательно, проверяемая гипотеза может необоснованно приниматься (не отклоняться).

Коэффициент 4.6 в статистике (2.3) подобран эмпирически. Он удовлетворительно действует от малых до достаточно больших объемов выборок (m = n = 1000). Однако при больших значениях наименьшего общего кратного m и n, когда они представляют собой взаимно простые числа, величина этого коэффициента должна быть несколько уменьшена. Например, при простых $m = 641$ и $n = 643$ коэффициент 4.6 следует заменить на 3.4.

Ниже при исследовании мощности критерия Смирнова рассматривались распределения статистики (2.1). Но все выводы справедливы и для критерия со статистикой (2.3), так как все распределения при одинаковых объемах выборок оказываются сдвинутыми на одну и ту же величину [см. (2.3)].

На рис. 2.4 представлены полученные в результате моделирования условные распределения статистики $G\left(S_{\text{С}} | H_1\right)$ при справедливости H_1, на основании которых можно оценить значения мощности при различных значениях объемов выборок m и n.

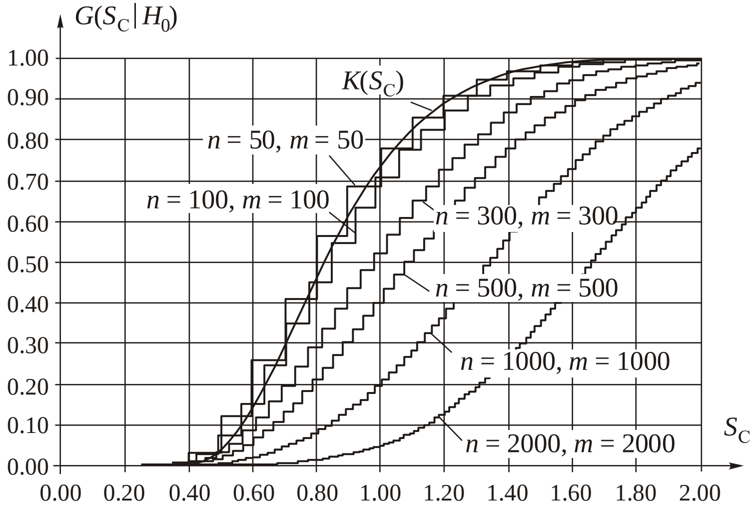

Рис. 2.4. Распределения статистики (2.1) при справедливости H_1

Аналогично на рис. 2.5 приведены условные распределения статистики $G\left(S_C \middle| H_2\right)$, на рис. 2.6 – условные распределения статистики $G\left(S_C \middle| H_3\right)$, на рис. 2.7 – условные распределения статистики $G\left(S_C \middle| H_4\right)$, на рис. 2.8 – условные распределения статистики $G\left(S_C \middle| H_5\right)$.

В табл. 2.1 представлены найденные оценки мощности $1-\beta$ критерия Смирнова, где β – вероятность ошибки второго рода, относительно рассматриваемых конкурирующих гипотез H_1 – H_5 при различных объемах выборок для уровней значимости (вероятностей ошибок первого рода) α = 0.1, 0.05, 0.025. Значения мощностей, приведенные в табл. 2.1, получены относительно ($1-\alpha$)-квантилей предельного распределения Колмогорова $K(S)$.

Вследствие того, что распределения $G\left(S_C \middle| H_0\right)$ статистики существенно отличаются от $K(S)$, действительные уровни значимости отличаются от заданных α = 0.1, 0.05, 0.025.

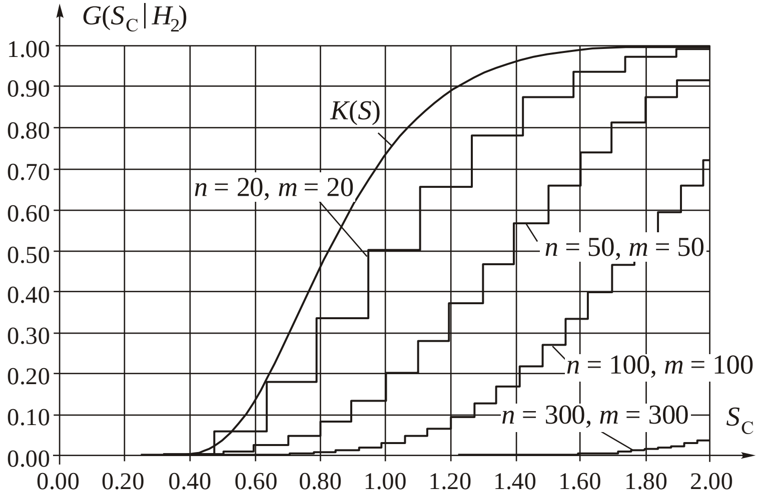

Рис. 2.5. Распределения статистики (2.1) при справедливости H_2

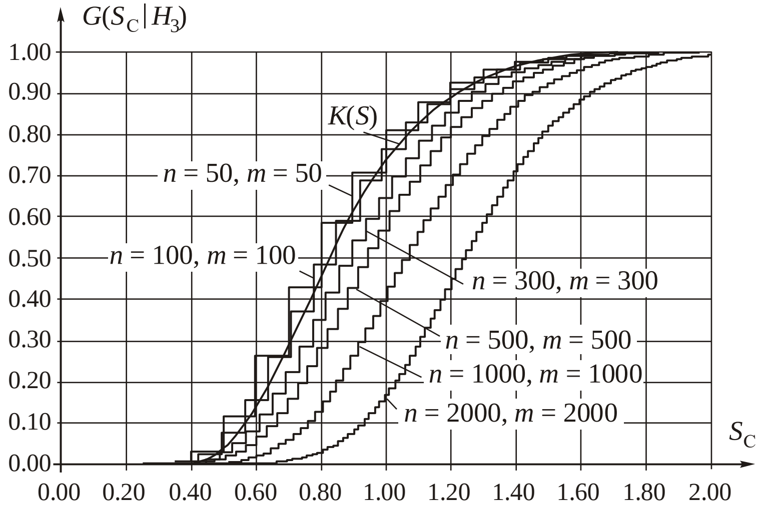

Рис. 2.6. Распределения статистики (2.1) при справедливости H_3

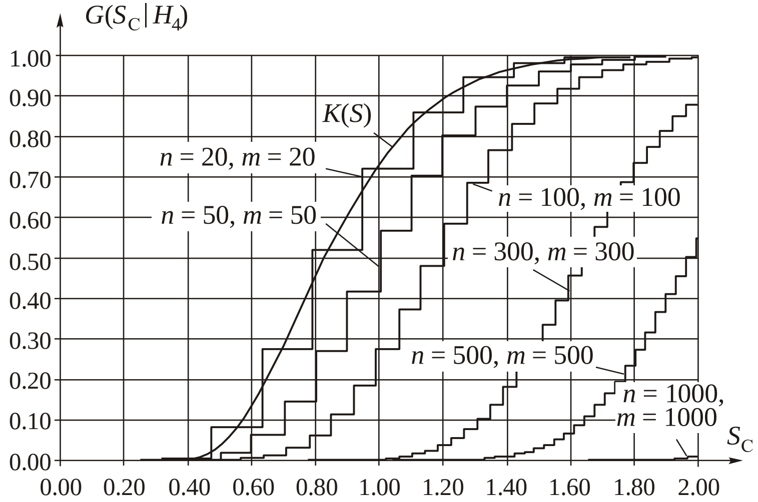

Рис. 2.7. Распределения статистики (2.1) при справедливости H_4

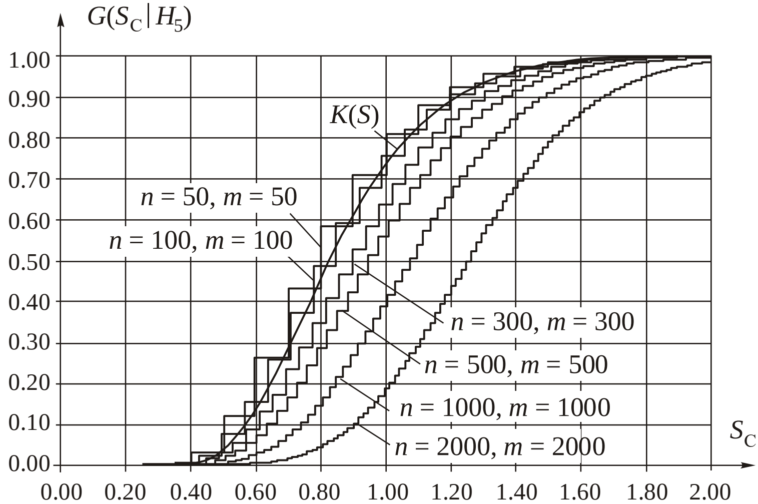

Рис. 2.8. Распределения статистики (2.1) при справедливости H_5

Таблица 2.1

Оценки мощности критерия однородности Смирнова относительно альтернатив $H_1 - H_5$ в зависимости от объемов выборок ($m = n$)

Уровень значимости α	n = 20	n = 50	n = 100	n = 300	n = 500	n = 1000	n = 2000
Относительно альтернативы H_1							
0.1	0.111	0.132	0.164	0.280	0.381	0.617	0.869
0.05	0.061	0.067	0.086	0.171	0.268	0.490	0.776
0.025	0.028	0.037	0.052	0.119	0.183	0.386	0.674
Относительно альтернативы H_2							
0.1	0.365	0.703	0.910	1	1	1	1
0.05	0.231	0.539	0.840	1	1	1	1
0.025	0.129	0.435	0.779	0.999	1	1	1
Относительно альтернативы H_3							
0.1	0.105	0.108	0.120	0.150	0.186	0.297	0.551
0.05	0.054	0.053	0.060	0.080	0.102	0.168	0.352
0.025	0.027	0.027	0.030	0.041	0.052	0.097	0.210
Относительно альтернативы H_4							
0.1	0.152	0.288	0.510	0.964	0.999	1	1
0.05	0.074	0.135	0.258	0.893	0.995	1	1
0.025	0.035	0.076	0.179	0.773	0.979	1	1
Относительно альтернативы H_5							
0.1	0.104	0.110	0.121	0.159	0.198	0.319	0.564
0.05	0.052	0.054	0.061	0.080	0.116	0.188	0.375
0.025	0.026	0.027	0.031	0.044	0.062	0.112	0.239

В табл. 2.2 приведены действительные уровни значимости для критерия Смирнова, соответствующие значениям мощности, представленным в табл. 2.1.

Таблица 2.2

Действительные уровни значимости критерия однородности Смирнова, соответствующие (1 – α)-квантилям распределения Колмогорова, в зависимости от объемов выборок ($m = n$)

Заданный уровень значимости α	Действительные уровни значимости α						
	n = 20	n = 50	n = 100	n = 300	n = 500	n = 1000	n = 2000
0.1	0.0835	0.1120	0.1085	0.0927	0.0970	0.0980	0.1041
0.05	0.0334	0.0410	0.0543	0.0496	0.0514	0.0471	0.0480
0.025	0.0334	0.0240	0.0252	0.0254	0.0238	0.0259	0.0245

Вследствие ступенчатости $G\left(S_{\text{C}} \middle| H_0\right)$ действительные значения α особенно сильно отличаются от задаваемых при малых объемах выборок. Например, для $m = n = 20$ при задаваемом уровне значимости 0.1 мы имеем действительный уровень значимости 0.0835.

2.2. Критерий Лемана–Розенблатта

Критерий однородности Лемана–Розенблатта представляет собой критерий типа ω^2. Критерий предложен в работе [33] и исследован в [57]. Статистика критерия имеет вид [77]

$$T = \frac{mn}{m+n} \int_{-\infty}^{\infty} \left[G_m(x) - F_n(x)\right]^2 dH_{m+n}(x),$$

где $H_{m+n}(x) = \dfrac{m}{m+n} G_m(x) + \dfrac{n}{m+n} F_n(x)$ – эмпирическая функция распределения, построенная по вариационному ряду объединения двух выборок. Статистика T используется в форме [77]

$$T = \frac{1}{mn(m+n)}\left[n\sum_{i=1}^{n}\left(r_i - i\right)^2 + m\sum_{j=1}^{m}\left(s_j - j\right)^2\right] - \frac{4mn-1}{6(m+n)}, \qquad (2.4)$$

где r_i – порядковый номер (ранг) y_i; s_j – порядковый номер (ранг) x_j в объединенном вариационном ряде.

В [59] было показано, что статистика (2.4) в пределе распределена как $a1(t)$:

$$\lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} P\{T<t\} = a1(t)\,.$$

Функция распределения $a1(t)$ имеет вид [77]:

$$a1(t) = \frac{1}{\sqrt{2s}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(j+1/2)\sqrt{4j+1}}{\Gamma(1/2)\Gamma(j+1)} \exp\left\{-\frac{(4j+1)^2}{16t}\right\} \times$$

$$\times \left\{ I_{-\frac{1}{4}}\left[\frac{(4j+1)^2}{16t}\right] - I_{\frac{1}{4}}\left[\frac{(4j+1)^2}{16t}\right] \right\}, \tag{2.5}$$

где $I_{-\frac{1}{4}}(\cdot), I_{\frac{1}{4}}(\cdot)$ – модифицированные функции Бесселя вида

$$I_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2k}}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)}, \; |z|<\infty, \; |\arg z|<\pi\,.$$

В отличие от критерия Смирнова распределение статистики T быстро сходится к предельному $a1(T)$ [77], значения которой и процентные точки представлены в таблицах **A.2** и **A.5** приложения.

На рис. 2.9 условные распределения $G(T|H_0)$ статистики (2.4) приведены при m и n, равных 20, 100 и 1000. Уже при $m=100$ и $n=100$ распределение $G(T|H_0)$ визуально совпадает с $a1(T)$.

На рис. 2.10 представлены полученные в результате моделирования условные распределения статистики $G(T|H_1)$ при справедливости H_1. На основании этих распределений можно оценить значения мощности критерия Лемана–Розенблатта при различных значениях объемов выборок m и n.

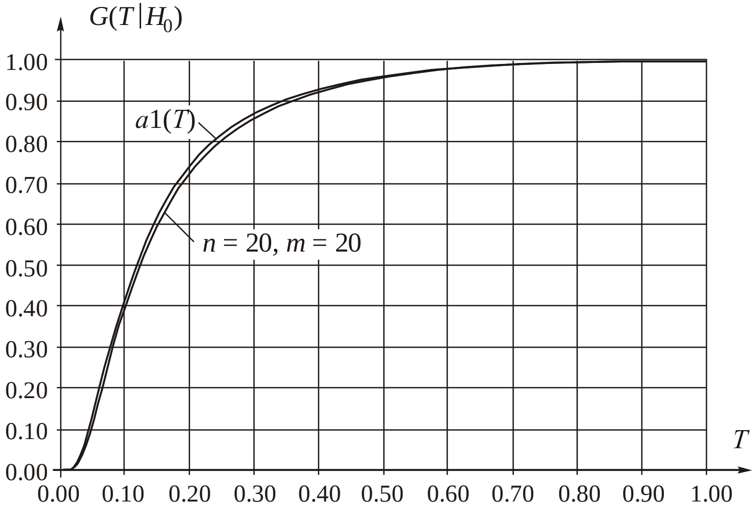

Рис. 2.9. Распределения статистики (2.4) при справедливости H_0 в зависимости от m и n

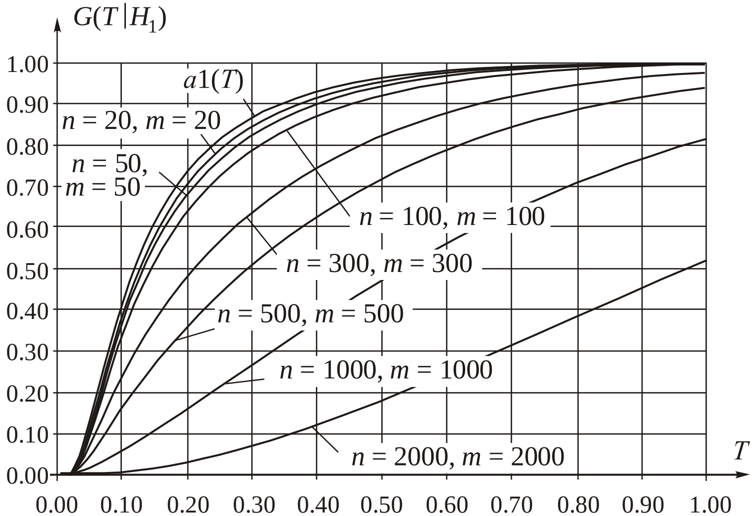

Рис. 2.10. Распределения статистики (2.4) при справедливости H_1

Аналогично на рис. 2.11–2.14 приведены распределения статистики $G(T|H_2)$, $G(T|H_3)$, $G(T|H_4)$, $G(T|H_5)$ при справедливости соответствующих конкурирующих гипотез.

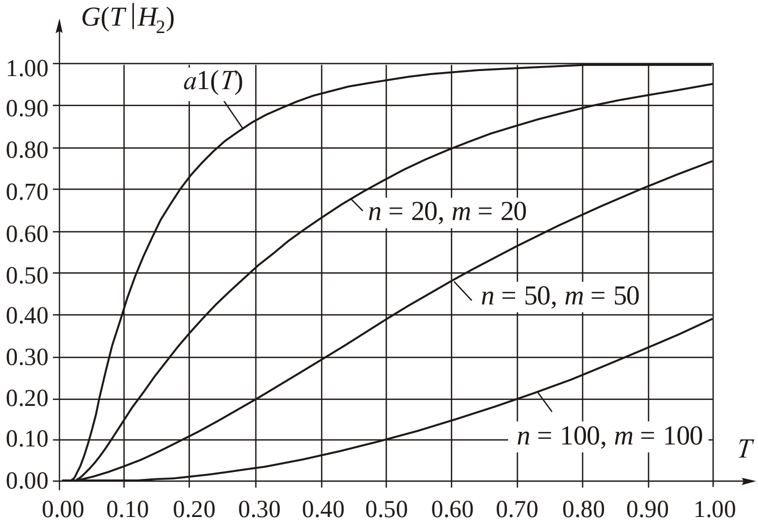

Рис. 2.11. Распределения статистики (2.4) при справедливости H_2

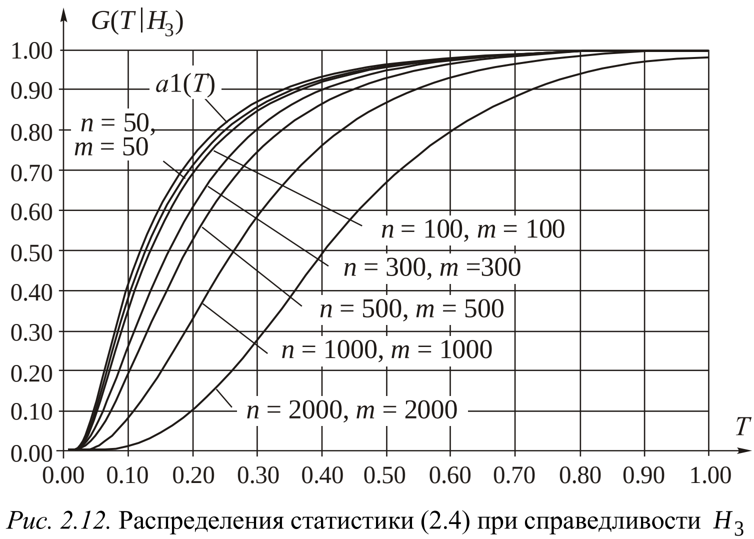

Рис. 2.12. Распределения статистики (2.4) при справедливости H_3

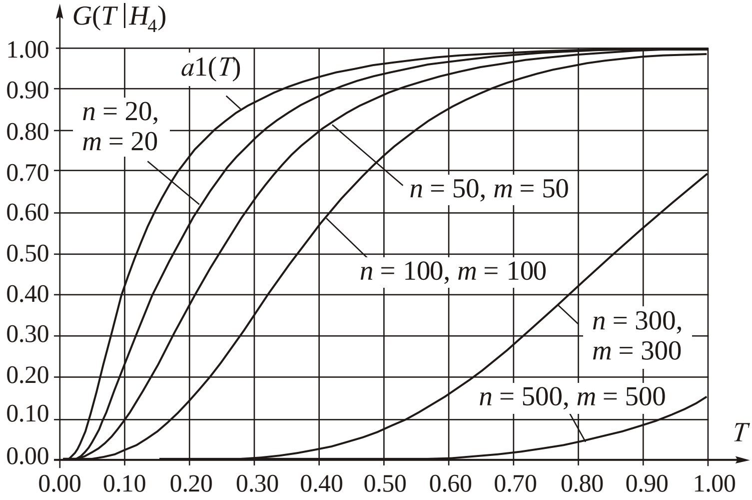

Рис. 2.13. Распределения статистики (2.4) при справедливости H_4

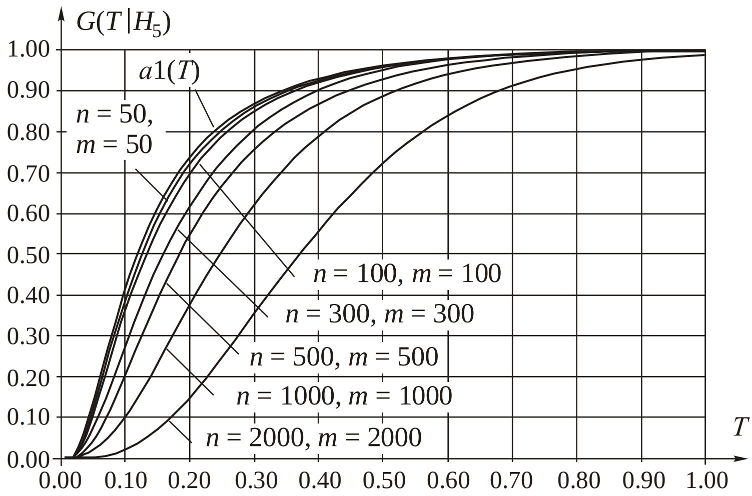

Рис. 2.14. Распределения статистики (2.4) при справедливости H_5

Вычисленные оценки мощности $1-\beta$ критерия Лемана–Розенблатта представлены в табл. 2.3. Как правило, мощность критерия Лемана–Розенблатта оказывается выше мощности критерия однородности Смирнова.

Таблица 2.3

Оценки мощности критерия однородности Лемана–Розенблатта относительно альтернатив $H_1 – H_5$ в зависимости от объемов выборок $(m = n)$

Уровень значимости α	n =20	n =50	n = 100	n = 300	n = 500	n = 1000	n = 2000
Относительно альтернативы H_1							
0.1	0.115	0.136	0.173	0.313	0.438	0.678	0.910
0.05	0.060	0.075	0.101	0.210	0.320	0.561	0.849
0.025	0.031	0.041	0.059	0.138	0.228	0.449	0.776
Относительно альтернативы H_2							
0.1	0.430	0.757	0.954	1	1	1	1
0.05	0.309	0.649	0.915	1	1	1	1
0.025	0.215	0.540	0.863	1	1	1	1
Относительно альтернативы H_3							
0.1	0.103	0.107	0.114	0.149	0.1908	0.324	0.624
0.05	0.051	0.053	0.057	0.072	0.093	0.167	0.399
0.025	0.026	0.026	0.028	0.035	0.041	0.081	0.226
Относительно альтернативы H_4							
0.1	0.154	0.280	0.548	0.989	1	1	1
0.05	0.074	0.140	0.326	0.951	0.999	1	1
0.025	0.037	0.067	0.172	0.860	0.996	1	1
Относительно альтернативы H_5							
0.1	0.103	0.106	0.113	0.142	0.178	0.288	0.547
0.05	0.051	0.053	0.056	0.069	0.087	0.146	0.332
0.025	0.026	0.026	0.028	0.034	0.042	0.070	0.180

2.3. Критерий Андерсона–Дарлинга

Двухвыборочный критерий Андерсона–Дарлинга (критерий однородности) рассмотрен в работе [58]. Статистика критерия определяется выражением

$$A^2 = \frac{mn}{m+n} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[G_m(x) - F_n(x)]^2}{(1 - H_{m+n}(x)) H_{m+n}(x)} dH_{m+n}(x) . \qquad (2.6)$$

Для выборок непрерывных случайных величин выражение для этой статистики принимает простой вид [58]

$$A^2 = \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^{m+n-1} \frac{\left(M_i(m+n) - mi\right)^2}{i(m+n-i)} , \qquad (2.7)$$

где M_i – число элементов первой выборки, меньших или равных i-му элементу вариационного ряда объединенной выборки.

Предельным распределением статистики (2.7) при справедливости проверяемой гипотезы H_0 является то же самое распределение $a2(t)$ [58], которое является предельным для статистики критерия согласия Андерсона–Дарлинга [77]. Функция распределения $a2(t)$, имеет вид [77]

$$a2(t) = \frac{\sqrt{2\pi}}{t} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{\Gamma(j+1/2)(4j+1)}{\Gamma(1/2)\Gamma(j+1)} \exp\left\{ -\frac{(4j+1)^2 \pi^2}{8t} \right\} \times$$

$$\times \int_0^{\infty} \exp\left\{ \frac{t}{8(y^2+1)} - \frac{(4j+1)^2 \pi^2 y^2}{8t} \right\} dy , \quad (2.8)$$

а её значения и процентные точки представлены в таблицах **A.3** и **A.6** приложения.

Сходимость распределения $G\left(A^2 \middle| H_0\right)$ статистики (2.7) к $a2(A^2)$ при ограниченных объёмах выборок была исследована в [110], где было показано, что при $m,n \ge 45$ отклонение функции распределения $G\left(A^2 \middle| H_0\right)$ от $a2(A^2)$ не превышает 0.01.

Рис. 2.15 – 2.19 иллюстрируют условные распределения статистики

$G\left(A^2 \middle| H_i\right)$ при справедливости конкурирующих гипотез H_i, $i=\overline{1,5}$, полученные в результате моделирования.

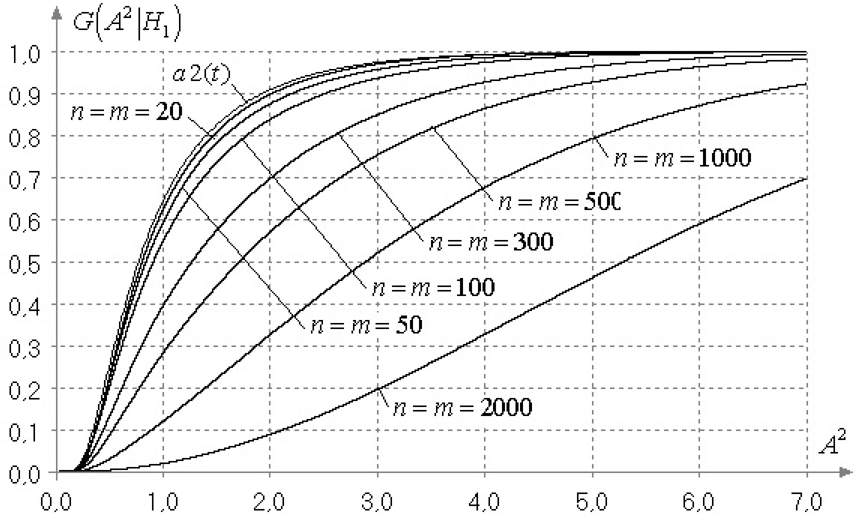

Рис. 2.15. Распределения статистики (2.7) при справедливости H_1

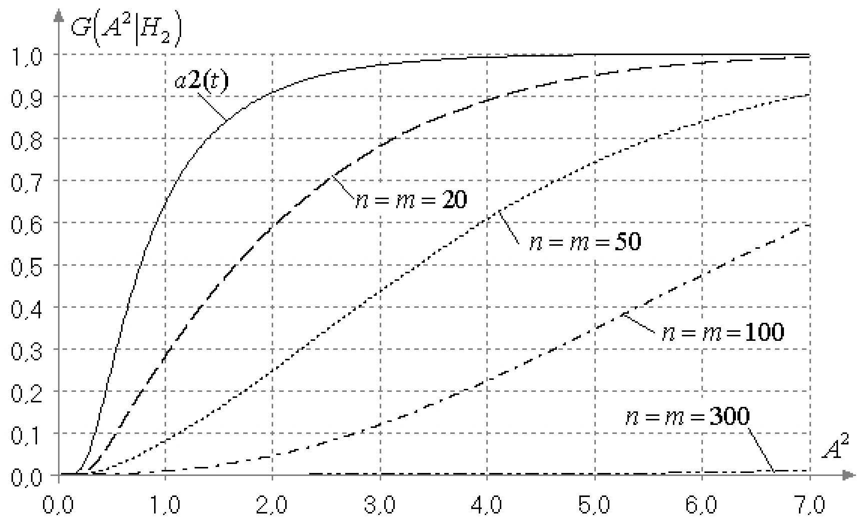

Рис. 2.16. Распределения статистики (2.7) при справедливости H_2

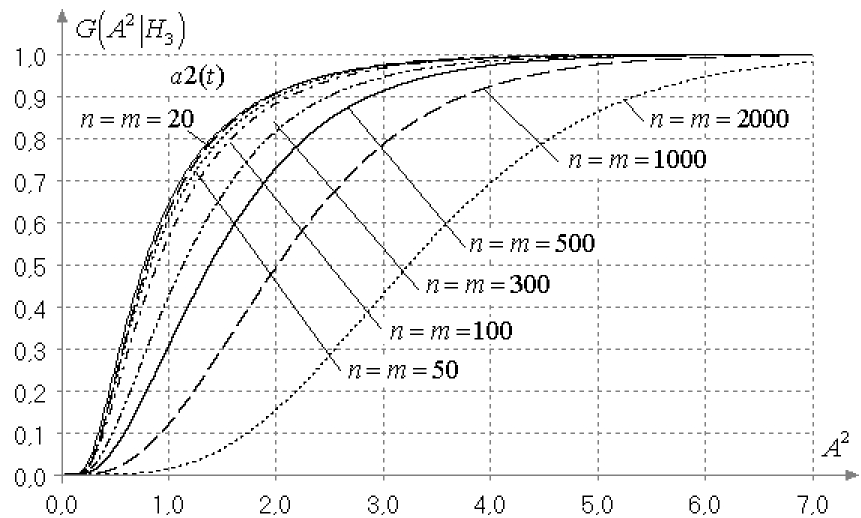

Рис. 2.17. Распределения статистики (2.7) при справедливости H_3

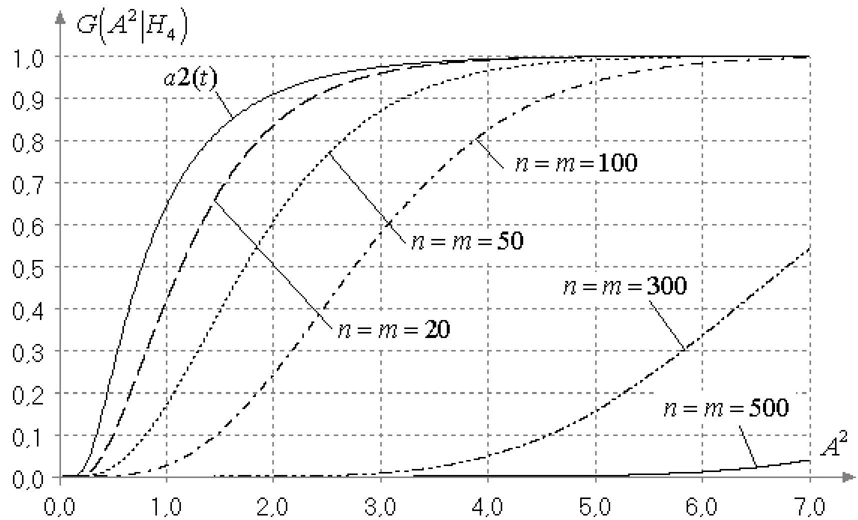

Рис. 2.18. Распределения статистики (2.7) при справедливости H_4

Вопросы мощности критерия рассматривались в [58, 107], мощность критерия исследовалась в [110].

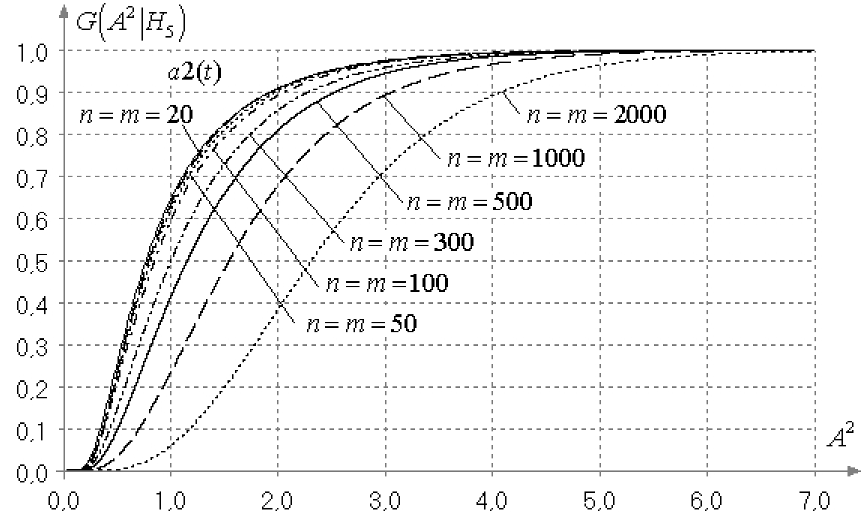

Рис. 2.19. Распределения статистики (2.7) при справедливости H_5

Полученные в данной работе оценки мощности критерия Андерсона–Дарлинга при различных значениях равных объемов выборок $n = m$ представлены в таблице 2.4.

Так как при ограниченных объёмах выборок распределения статистики $G\left(A^2 \middle| H_0\right)$ существенно отличаются от предельного распределения $a2(A^2)$, оценки мощности находились по результатам моделирования распределений статистики (2.7) $G\left(A_n^2 \middle| H_0\right)$ при справедливости проверяемой и $G\left(A_n^2 \middle| H_i\right)$ конкурирующих гипотез H_i, $i = \overline{1,5}$ при конкретных объёмах выборок n.

Сравнивая оценки мощности критерия с соответствующими оценками мощности критерия Лемана–Розенблатта, можно отметить, что критерий Андерсона–Дарлинга, как правило, обладает несколько большей мощностью, особенно, относительно ситуаций отличия анализируемых выборок в характеристиках рассеяния. В то же время относительно (очень) близких конкурирующих гипотез при малых объёмах выборок (см. при $n = 20$ для H_1, H_3 и H_5) преимущество в мощности может быть за критерием Лемана–Розенблатта.

Таблица 2.4

Оценки мощности критерия однородности Андерсона–Дарлинга относительно альтернатив $H_1 - H_5$ в зависимости от объемов выборок ($m = n$)

Уровень значимости α	n =20	n =50	n = 100	n = 300	n = 500	n = 1000	n = 2000
Относительно альтернативы H_1							
0.1	0.114	0.137	0.175	0.319	0.447	0.691	0.919
0.05	0.056	0.076	0.103	0.217	0.330	0.578	0.864
0.025	0.031	0.042	0.060	0.144	0.238	0.469	0.796
Относительно альтернативы H_2							
0.1	0.435	0.768	0.959	1	1	1	1
0.05	0.315	0.665	0.925	1	1	1	1
0.025	0.221	0.558	0.878	1	1	1	1
Относительно альтернативы H_3							
0.1	0.104	0.112	0.128	0.202	0.290	0.528	0.861
0.05	0.052	0.056	0.063	0.102	0.156	0.338	0.718
0.025	0.026	0.028	0.031	0.050	0.080	0.198	0.547
Относительно альтернативы H_4							
0.1	0.185	0.424	0.777	1	1	1	1
0.05	0.088	0.241	0.592	0.998	1	1	1
0.025	0.041	0.123	0.402	0.991	1	1	1
Относительно альтернативы H_5							
0.1	0.103	0.108	0.117	0.156	0.203	0.343	0.640
0.05	0.051	0.054	0.058	0.078	0.103	0.189	0.436
0.025	0.026	0.027	0.029	0.038	0.051	0.097	0.267

2.4. Многовыборочный критерий Андерсона–Дарлинга

Вопросы построения k-выборочных критериев однородности законов, являющихся аналогами критериев согласия Колмогорова–Смирнова и Крамера–Мизеса (k-выборочными аналогами критериев однородности Смирнова и Лемана–Розенблатта), рассматривались в работе [25].

Многовыборочный вариант критерия согласия Андерсона–Дарлинга предложен в [63].

Задача проверки однородности k выборок формулируется следующим образом. Пусть x_{ij} j-е наблюдение i-й выборки $j=\overline{1,n_i}$, $i=\overline{1,k}$. Предположим, что i-й выборке соответствует непрерывная функция распределения $F_i(x)$. Необходимо проверить гипотезу вида $H_0: F_1(x)=F_2(x)=\ldots=F_k(x)$ без указания общего для них закона распределения. Обозначим эмпирическую функцию распределения, соответствующую i-й выборке, как $F_{in_i}(x)$, а эмпирическую функцию распределения, соответствующую объединённой выборке объёмом $n=\sum_{i=1}^{k} n_i$, как $H_n(x)$. Статистика k-выборочного критерия Андерсона–Дарлинга определяется выражением

$$A_{kn}^2=\sum_{i=1}^{k} n_i \int_{B_n} \frac{[F_{in_i}(x)-H_n(x)]^2}{\left(1-H_n(x)\right)H_n(x)} dH_n(x), \qquad (2.9)$$

где $B_n=\{x\in R:\ H_n(x)<1\}$. Для $k=2$ соотношение (2.9) сводится к (2.6). В предположении о непрерывности $F_i(x)$, упорядочив объединённую выборку $Z_1\le Z_2\le\ldots\le Z_n$, непосредственно из (2.9) можно получить простое выражение для вычисления статистики [63]:

$$A_{kn}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\left(nM_{ij}-jn_i\right)^2}{j(n-j)}, \qquad (2.10)$$

где M_{ij} – число элементов в i-й выборке, которые не больше чем Z_j. Проверяемая гипотеза H_0 отклоняется при больших значениях статистики (2.10).

В работе [63] таблица верхних процентных точек представлена не для статистики (2.10), а для статистики вида:

$$T_{kn} = \frac{A_{kn}^2 - (k-1)}{\sqrt{D[A_{kn}^2]}}. \tag{2.11}$$

Дисперсия статистики A_{kn}^2 определяется выражением [63]

$$D\left[A_{kn}^2\right] = \frac{an^3 + bn^2 + cn + d}{(n-1)(n-2)(n-3)} \tag{2.12}$$

при

$$a = (4g-6)(k-1) + (10-6g)H,$$

$$b = (2g-4)k^2 + 8hk + (2g-14h-4)H - 8h + 4g - 6,$$

$$c = (6h+2g-2)k^2 + (4h-4g+6)k + (2h-6)H + 4h,$$

$$d = (2h+6)k^2 - 4hk,$$

где

$$H = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{n_i}, \quad h = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i}, \quad g = \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=i+1}^{n-1} \frac{1}{(n-i)\,j}.$$

Зависимость предельных распределений статистики (2.11) от числа сравниваемых выборок k иллюстрирует рис. 2.20. С ростом числа сравниваемых выборок это распределение медленно сходится к стандартному нормальному закону. Сходимость распределений статистики к предельному с ростом объёмов выборок (при равных n_i) для $k=3$ демонстрирует рис. 2.21.

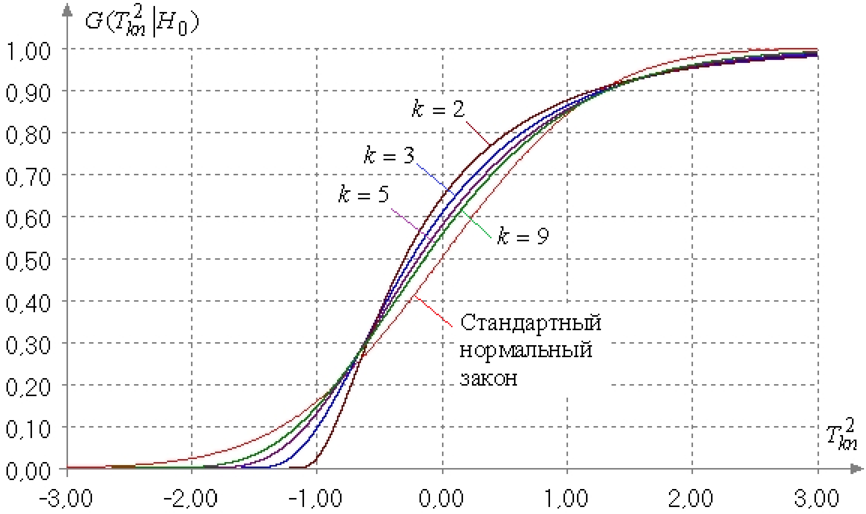

Рис. 2.20. Зависимость предельных распределений статистики (2.11) от числа сравниваемых выборок

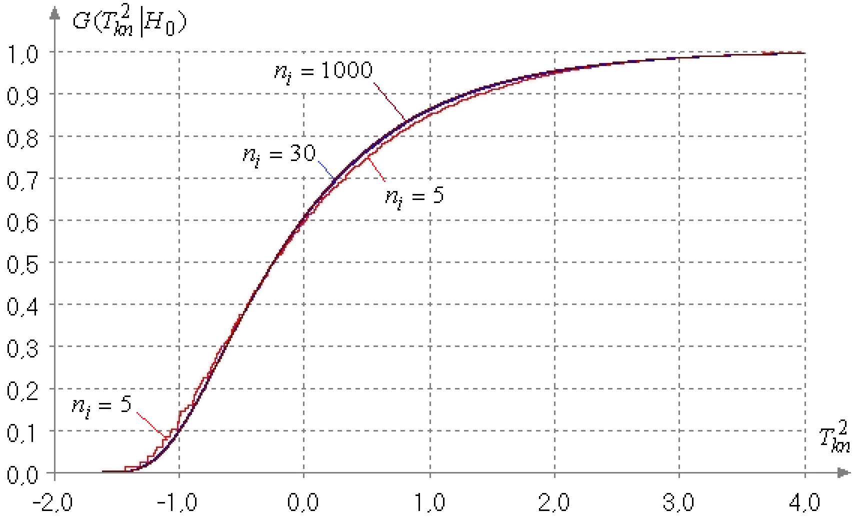

Рис. 2.21. Сходимость распределений статистики (2.11) к предельному при $k = 3$

Исследование распределений статистик методами статистического моделирования показало, что при использовании критериев отличие распределений статистик от соответствующих предельных не имеет практического значения при $n_i \geq 30$.

Верхние процентные точки предельных распределений для статистики (2.11), заимствованные в [63], приведены в таблице 2.5. Последняя строка при $k \to \infty$ соответствует процентным точкам стандартного нормального закона, использование которого возможно только при очень большом числе анализируемых выборок. В [63] построены интерполяционные полиномы вида

$$T_{kn}^2(\alpha) = b_0 + \frac{b_1}{\sqrt{k}} + \frac{b_2}{k},$$

которые позволяют находить критические значения $T_{kn}^2(\alpha)$ для количеств сравниваемых выборок k, отсутствующих в таблице 2.5. Коэффициенты полиномов приведены в таблице 2.6.

В результате исследований распределений статистики (2.11) методами статистического моделирования (при $n_i = 1000$ и числе экспериментов имитационного моделирования $N = 10^6$) таблица критических значений была уточнена и расширена (см. таблицу 2.7).

Таблица 2.5

Верхние критические значения $T_{kn}^2(\alpha)$ статистики (2.11) [63]

k	$1-\alpha$				
	0.75	0.90	0.95	0.975	0.99
2	0.326	1.225	1.960	2.719	3.752
3	0.449	1.309	1.945	2.576	3.414
4	0.498	1.324	1.915	2.493	3.246
5	0.525	1.329	1,894	2.438	3.139
7	0.557	1.332	1.859	2.365	3.005
9	0.576	1.330	1.839	2.318	2.920
11	0.590	1.329	1.823	2.284	2.862
∞	0.674	1.282	1.645	1.960	2.326

Таблица 2.6

Интерполяционные коэффициенты для вычисления $T_{kn}^2(\alpha)$ [63]

$1-\alpha$	b_0	b_1	b_2
0.75	0.675	–0.245	–0.105
0.90	1.281	0.250	–0.305
0.95	1.645	0.678	–0.362
0.975	1.960	1.149	–0.391
0.99	2.326	1.822	–0.396

Таблица 2.7

Уточненные верхние критические значения $T_{kn}^2(\alpha)$ статистики (2.11)

k	$1-\alpha$				
	0.75	0.90	0.95	0.975	0.99
2	0.325	1.228	1.966	2.731	3.784
3	0.439	1.300	1.944	2.592	3.429
4	0.491	1.321	1.925	2.511	3.277
5	0.523	1.331	1.900	2.453	3.153
6	0.543	1.333	1.885	2.410	3.078
7	0.557	1.337	1.870	2.372	3.017
8	0.567	1.335	1.853	2.344	2.970
9	0.577	1.334	1.847	2.323	2.927
10	0.582	1.3345	1.838	2.306	2.899
11	0.589	1.332	1.827	2.290	2.867
∞	0.674	1.282	1.645	1.960	2.326

Одновременно для предельных распределений статистик (для $k = 2 \div 11$) были построены приближенные модели законов для распределений статистики (2.11) [34, 93]. Хорошими моделями оказались законы семейства бета-распределений III рода с плотностью

$$f(x)=\frac{\theta_2^{\theta_0}}{\theta_3 \mathrm{B}(\theta_0,\theta_1)} \frac{\left(\frac{x-\theta_4}{\theta_3}\right)^{\theta_0-1}\left(1-\frac{x-\theta_4}{\theta_3}\right)^{\theta_1-1}}{\left[1+(\theta_2-1)\frac{x-\theta_4}{\theta_3}\right]^{\theta_0+\theta_1}} \qquad (2.13)$$

при конкретных значениях параметров этого закона $\mathrm{B}_{\mathrm{III}}(\theta_0,\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4)$, найденными по выборкам статистик объёмом $N=10^6$, полученным в результате моделирования.

Представленные в таблице 2.8 модели $\mathrm{B}_{\mathrm{III}}(\theta_0,\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4)$, с приведенными значениями параметров, позволяют по значениям статистики, вычисленным в соответствии с соотношением (2.11), находить оценки p_{value} при соответствующем числе k сравниваемых выборок.

Таблица 2.8

Модели предельных распределений статистики (2.11)

k	Модель
2	B_{III} (3.1575, 2.8730, 18.1238, 15.0000, –1.1600)
3	B_{III} (3.5907, 4.5984, 7.8040, 14.1310, –1.5000)
4	B_{III} (4.2657, 5.7035, 5.3533, 12.8243, –1.7500)
5	B_{III} (6.2992, 6.5558, 5.6833, 13.010, –2.0640)
6	B_{III} (6.7446, 7.1047, 5.0450, 12.8562, –2.2000)
7	B_{III} (6.7615, 7.4823, 4.0083, 11.800, –2.3150)
8	B_{III} (5.8057, 7.8755, 2.9244, 10.900, –2.3100)
9	B_{III} (9.0736, 7.4112, 4.1072, 10.800, –2.6310)
10	B_{III} (10.2571, 7.9758, 4.1383, 11.186, –2.7988)
11	B_{III} (10.6848, 7.5950, 4.2041, 10.734, –2.8400)
∞	N(0.0, 1.0)

При $k=2$ критерий со статистикой (2.11) эквивалентен по мощности двухвыборочному критерию Андерсона–Дарлинга со статистикой (2.7).

В таблицах 2.9 и 2.10 приведены оценки мощности k-выборочного критерия Андерсона–Дарлинга при $k=3$ и $k=4$, когда в качестве проверяемой гипотезы H_0 рассматривалась принадлежность всех выборок стандартному нормальному закону, в качестве конкурирующей гипотезы H_1 – принадлежность трёх выборок стандартному нормальному закону, а четвёртой – нормальному закону с параметром сдвига $\theta_0=0.1$ и параметром масштаба $\theta_1=1$, в качестве гипотезы H_3 – принадлежность трёх выборок стандартному нормальному закону, а четвёртой – нормальному закону с параметром сдвига $\theta_0=0$ и параметром масштаба $\theta_1=1.1$, в качестве конкурирующей гипотезы H_5 – принадлежность трёх выборок стандартному нормальному закону, а четвёртой – логистическому закону с плотностью

$$f(x)=\frac{1}{\theta_1\sqrt{3}}\exp\left\{-\frac{\pi(x-\theta_0)}{\theta_1\sqrt{3}}\right\}\Bigg/\left[1+\exp\left\{-\frac{\pi(x-\theta_0)}{\theta_1\sqrt{3}}\right\}\right]^2$$

и параметрами $\theta_0=0$ и $\theta_1=1$. Рассматривалась ситуация с анализом выборок одинакового объёма.

Оценки мощности находились по результатам моделирования распределений статистики (2.11) при справедливости проверяемой $G(T_{kn}|H_0)$ и конкурирующих гипотез $G(T_{kn}|H_1)$, $G(T_{kn}|H_3)$ и $G(T_{kn}|H_5)$ при конкретных объёмах выборок n.

Как можно видеть, с ростом количества сравниваемых выборок тех же объёмов мощность критерия относительно аналогичных конкурирующих гипотез снижается, что абсолютно естественно. Например, сложнее выделить ситуацию и отдать предпочтение конкурирующей гипотезе, когда лишь одна из анализируемых выборок принадлежит некоторому другому закону. В сказанном легко убедиться, сравнивая соответствующие оценки мощности в таблицах 2.4 , 2.9 и 2.10.

Таблица 2.9

Оценки мощности k -выборочного критерия однородности Андерсона–Дарлинга относительно альтернатив H_1 , H_3 и H_5 в зависимости от объемов выборок ($k = 3$, $n_i = n$)

Уровень значимости α	n =20	n =50	n = 100	n = 300	n = 500	n = 1000
Относительно альтернативы H_1						
0.1	0.113	0.134	0.171	0.313	0.449	0.711
0.05	0.059	0.073	0.098	0.209	0.329	0.599
0.025	0.030	0.040	0.057	0.138	0.236	0.490
0.01	0.013	0.017	0.027	0.077	0.147	0.365
Относительно альтернативы H_3						
0.1	0.104	0.111	0.124	0.191	0.273	0.509
0.05	0.052	0.056	0.063	0.100	0.150	0.330
0.025	0.026	0.028	0.031	0.051	0.080	0.201
0.01	0.010	0.011	0.013	0.021	0.034	0.095
Относительно альтернативы H_5						
0.1	0.103	0.107	0.114	0.148	0.189	0.315
0.05	0.051	0.053	0.058	0.075	0.097	0.177
0.025	0.026	0.027	0.029	0.038	0.050	0.094
0.01	0.010	0.011	0.011	0.015	0.020	0.040

Таблица 2.10

Оценки мощности k -выборочного критерия однородности Андерсона–Дарлинга относительно альтернатив H_1, H_3 и H_5 в зависимости от объемов выборок ($k = 4$, $n_i = n$)

Уровень значимости α	n =20	n =50	n = 100	n = 300	n = 500	n = 1000
Относительно альтернативы H_1						
0.1	0.112	0.131	0.164	0.301	0.433	0.701
0.05	0.058	0.070	0.094	0.198	0.314	0.585
0.025	0.030	0.038	0.053	0.128	0.221	0.476
Относительно альтернативы H_3						
0.1	0.104	0.110	0.123	0.180	0.254	0.474
0.05	0.052	0.055	0.062	0.096	0.142	0.307
0.025	0.026	0.028	0.031	0.050	0.077	0.188
Относительно альтернативы H_5						
0.1	0.102	0.106	0.113	0.143	0.179	0.291
0.05	0.051	0.053	0.057	0.073	0.094	0.163
0.025	0.026	0.027	0.029	0.037	0.048	0.088

2.5. Критерии однородности Жанга

Кроме рассмотренных выше, можно указать непараметрические критерии, предложенные в работах Жанга [74, 75, 76], которые дают возможность сравнивать $k \geq 2$ выборок [74]. Предложенные Жангом критерии являются развитием критериев однородности Смирнова, Лемана–Розенблатта и Андерсона–Дарлинга.

Критерии согласия Жанга [74] показывают некоторое преимущество в мощности по сравнению с критериями согласия Крамера–Мизеса–Смирнова и Андерсона–Дарлинга [86], а определённым недостатком, ограничивающим их применение, является зависимость распределений статистик от объёмов выборок.

Аналогичным недостатком (зависимостью от объёмов сравниваемых выборок) обладают и варианты критериев Жанга, предназначенные для проверки однородности законов. В случае применения указанных критериев автор рекомендует для оценивания p_{value} использовать метод Монте–Карло [74].

Задача моделирования распределений статистик критериев однородности Жанга, по сравнению с аналогичной задачей для критериев согласия, оказывается много проще, так как приходится моделировать распределения статистик $G(S|H_0)$ критериев в случае принадлежности анализируемых выборок равномерному закону. Это делает применение критериев очень перспективным (см. п. 4.24).

Пусть $x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in_i}$ упорядоченные выборки непрерывных случайных величин с функциями распределения $F_i(x)$, ($i = \overline{1,k}$) и пусть $X_1 < X_2 < \ldots < X_n$, где $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$, объединённая упорядоченная выборка.

Обозначим R_{ij} ранг j-го упорядоченного наблюдения x_{ij} i-й выборки в объединённой выборке. Пусть $X_0 = -\infty$, $X_{n+1} = +\infty$, а ранги $R_{i,0} = 1$, $R_{i,n_i+1} = n+1$.

В критериях используется модификация эмпирической функции распределения $\hat{F}(t)$, принимающая в точках разрыва X_m, $m = \overline{1,n}$, значения $\hat{F}(X_m) = (m - 0.5)/n$ [74].

Статистика Z_{K} критерия однородности Жанга имеет вид [74]:

$$Z_{\text{K}} = \max_{1 \le m \le n} \left\{ \sum_{i=1}^{k} n_i \left[F_{i,m} \ln \frac{F_{i,m}}{F_m} + \left(1 - F_{i,m}\right) \ln \frac{1 - F_{i,m}}{1 - F_m} \right] \right\}, \qquad (2.14)$$

где $F_m = \hat{F}(X_m)$, так что $F_m = (m - 0.5)/n$, а вычисление $F_{i,m} = \hat{F}_i(X_m)$ осуществляется следующим образом. В начальный момент значения $j_i = 0$, $i = \overline{1,k}$. Если $R_{i,j_i+1} = m$, то $j_i := j_i + 1$ и

$F_{i,m} = (j_i - 0.5)/n_i$, в противном случае если $R_{i,j_i} < m < R_{i,j_i+1}$, то $F_{i,m} = j_i/n_i$.

Критерий *правосторонний*: проверяемая гипотеза H_0 отклоняется при *больших* значениях статистики (2.14).

Зависимость распределений $G(Z_К | H_0)$ статистики от объёмов выборок (при равных n_i и $k = 2$) иллюстрирует рис. 2.22, а зависимость от числа сравниваемых выборок k при $n_i = 20,\ i = \overline{2,k}$ – рис. 2.23.

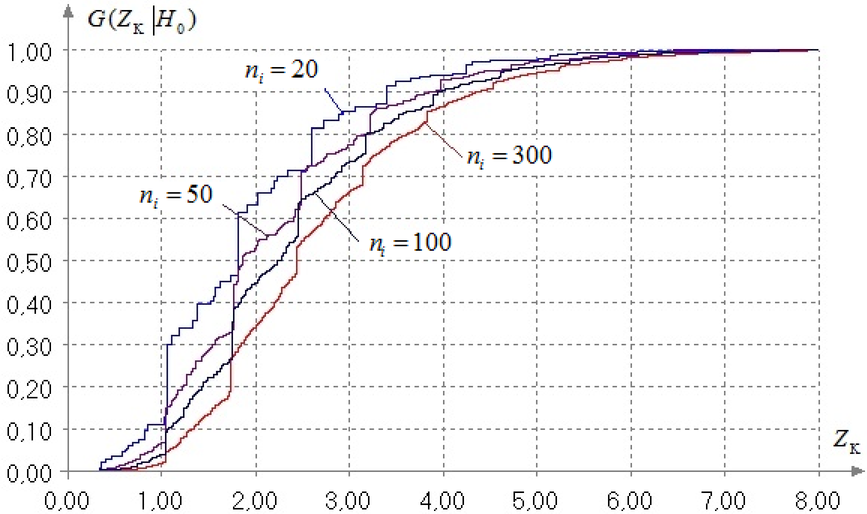

Рис. 2.22. Зависимость распределений статистики (2.14) от объёмов выборок

Статистика Z_A **критерия однородности** k выборок определяется выражением [74]:

$$Z_A = -\sum_{m=1}^{n}\sum_{i=1}^{k} n_i \frac{F_{i,m}\ln F_{i,m} + \left(1 - F_{i,m}\right)\ln\left(1 - F_{i,m}\right)}{(m - 0.5)(n - m + 0.5)}, \qquad (2.15)$$

где F_m и $F_{i,m}$ вычисляются, как определено выше.

Критерий *левосторонний*: проверяемая гипотеза H_0 отклоняется при *малых* значениях статистики (2.15).

Зависимость распределений $G(Z_A | H_0)$ статистики от объёмов выборок при равных n_i и $k=2$ показана на рис. 2.24, а зависимость от числа сравниваемых выборок k при $n_i=20$, $i=\overline{2,k}$ – на рис. 2.25.

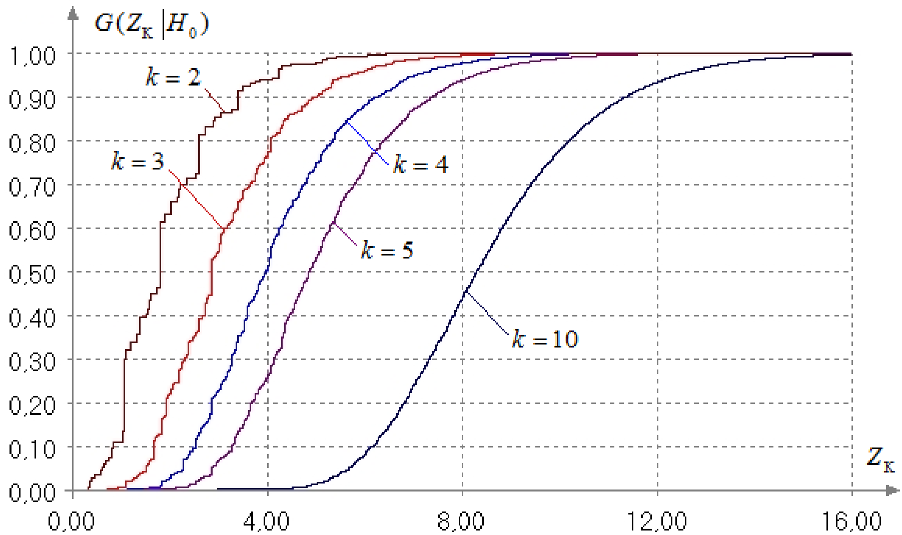

Рис. 2.23. Зависимость распределений статистики (2.14) от k при $n_i=20$

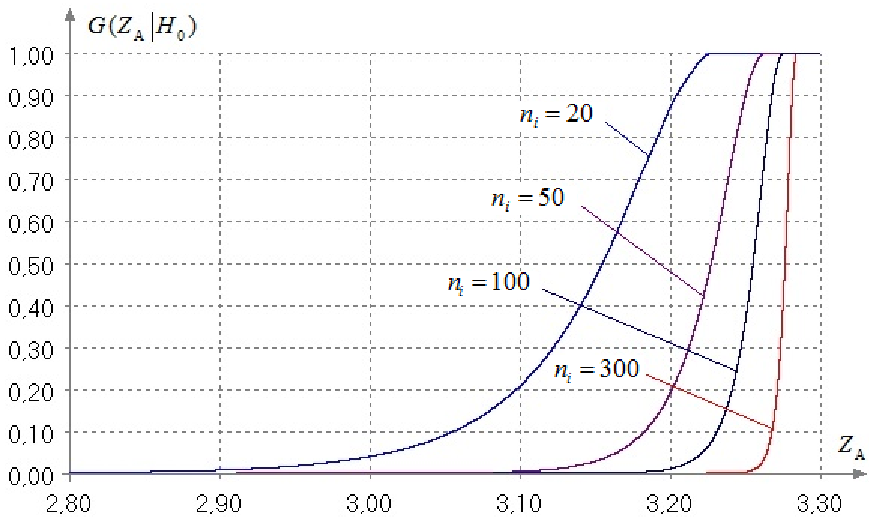

Рис. 2.24. Зависимость распределений статистики (2.15) от объёмов выборок

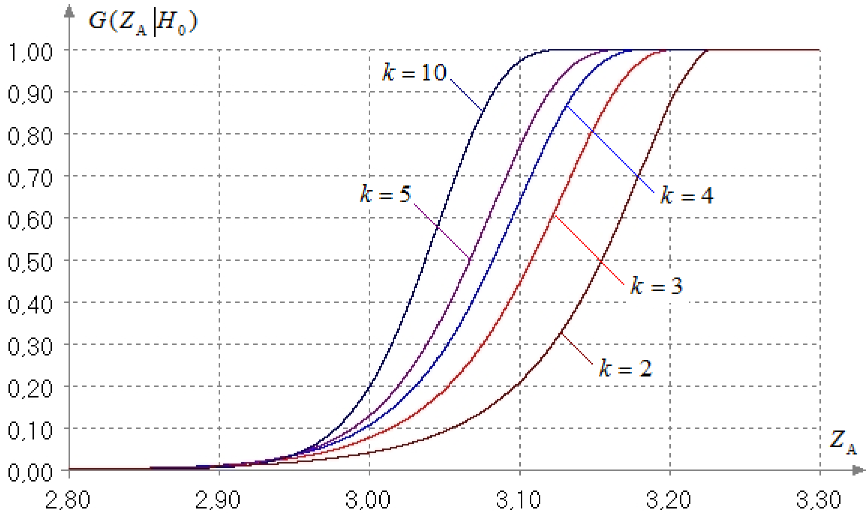

Рис. 2.25. Зависимость распределений статистики (2.15) от k при $n_i = 20$

Статистика Z_C **критерия однородности** k выборок определяется выражением [74]:

$$Z_C = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\ln\left(\frac{n_i}{j-0.5}-1\right)\ln\left(\frac{n}{R_{i,j}-0.5}-1\right). \tag{2.16}$$

Этот критерий также *левосторонний*: проверяемая гипотеза H_0 отклоняется при *малых* значениях статистики (2.16).

Изменение распределений $G(Z_C|H_0)$ статистики от объёмов выборок при равных n_i и $k=2$ демонстрируется на рис. 2.26, а зависимость от числа сравниваемых выборок k при $n_i = 20,\ i=\overline{2,k}$ – на рис. 2.27.

Полученные оценки мощности критериев Жанга при равных n_i в случае $k=2$ относительно рассматриваемых конкурирующих гипотез представлены в таблицах 2.11 – 2.13, оценки мощности при равных n_i в случае $k=3$ и $k=4$ относительно более близких конкурирующих гипотез H_1, H_3, H_5 приведены в таблицах 2.14 – 2.19.

Сравнивая мощности критериев Жанга с мощностью критериев Андерсона–Дарлинга, Лемана–Розенблатта и Смирнова, можно обратить внимание на то, что критерии Жанга имеют преимущество в мощности относительно альтернатив, связанных с изменением характеристик масштаба, и уступают в мощности при альтернативах сдвига.

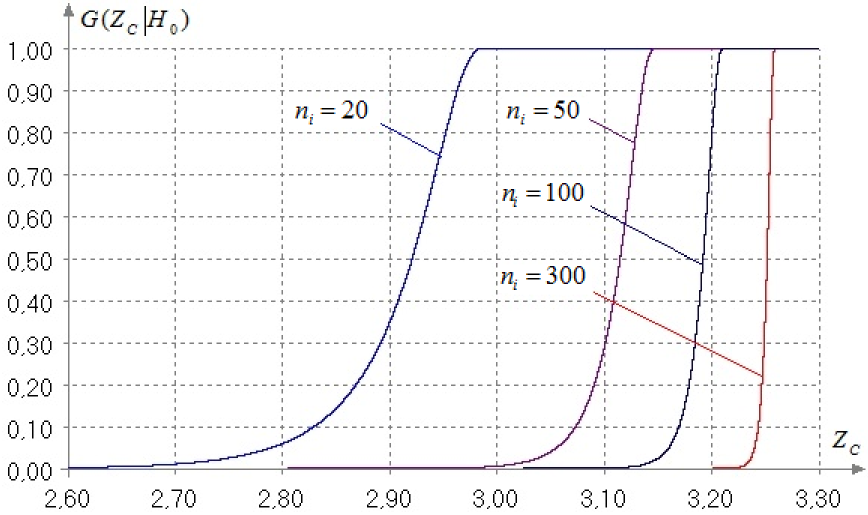

Рис. 2.26. Зависимость распределений статистики (2.16) от объёмов выборок

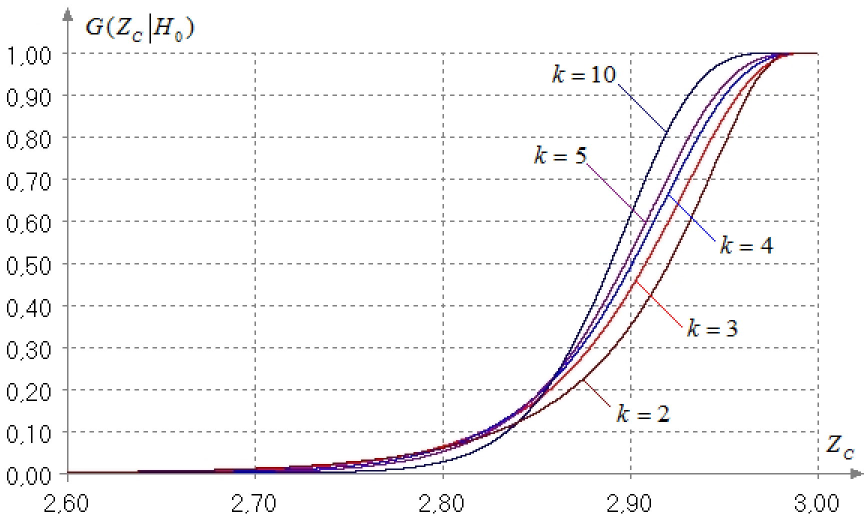

Рис. 2.27. Зависимость распределений статистики (2.16) от k при $n_i = 20$

Отсутствие информации о законах распределения статистик и таблиц критических значений в современных условиях не является серьёзным недостатком критериев Жанга, так как в программном обеспечении, осуществляющем поддержку применения критериев, несложно организовать вычисление достигнутых уровней значимостей p_{value}, используя методы статистического моделирования. Поэтому интерес к данным критериям, к сравнению их свойств с традиционными в последнее время возрастает [7].

Таблица 2.11

Оценки мощности критерия однородности Жанга со статистикой Z_K относительно альтернатив $H_1 - H_5$ в зависимости от $n_i = n$

α	n = 20	n = 50	n = 100	n = 300	n = 500	n = 1000	n = 2000
Относительно альтернативы H_1							
0.1	0.111	0.126	0.152	0.238	0.333	0.526	0.798
0.05	0.057	0.068	0.085	0.147	0.223	0.396	0.691
0.025	0.028	0.036	0.048	0.090	0.148	0.292	0.583
Относительно альтернативы H_2							
0.1	0.344	0.650	0.906	1	1	1	1
0.05	0.220	0.524	0.835	0.999	1	1	1
0.025	0.135	0.410	0.754	0.998	1	1	1
Относительно альтернативы H_3							
0.1	0.107	0.127	0.154	0.268	0.390	0.624	0.892
0.05	0.053	0.067	0.084	0.168	0.256	0.475	0.798
0.025	0.026	0.034	0.047	0.099	0.165	0.352	0.687
Относительно альтернативы H_4							
0.1	0.248	0.552	0.849	1	1	1	1
0.05	0.123	0.394	0.730	0.999	1	1	1
0.025	0.055	0.262	0.604	0.996	1	1	1
Относительно альтернативы H_5							
0.1	0.105	0.110	0.122	0.179	0.266	0.429	0.759
0.05	0.052	0.056	0.063	0.098	0.140	0.279	0.602
0.025	0.027	0.029	0.033	0.053	0.079	0.179	0.450

Таблица 2.12

Оценки мощности критерия однородности Жанга со статистикой Z_A относительно альтернатив $H_1 - H_5$ в зависимости от $n_i = n$

α	n = 20	n = 50	n = 100	n = 300	n = 500	n = 1000	n = 2000
Относительно альтернативы H_1							
0.1	0.113	0.133	0.162	0.272	0.374	0.583	0.851
0.05	0.059	0.073	0.095	0.181	0.268	0.466	0.775
0.025	0.031	0.040	0.056	0.119	0.189	0.361	0.691
Относительно альтернативы H_2							
0.1	0.419	0.733	0.941	1	1	1	1
0.05	0.306	0.631	0.901	1	1	1	1
0.025	0.216	0.530	0.850	1	1	1	1
Относительно альтернативы H_3							
0.1	0.108	0.128	0.164	0.318	0.464	0.745	0.958
0.05	0.054	0.065	0.089	0.205	0.333	0.626	0.921
0.025	0.026	0.033	0.047	0.128	0.231	0.506	0.869
Относительно альтернативы H_4							
0.1	0.267	0.651	0.937	1	1	1	1
0.05	0.142	0.492	0.878	1	1	1	1
0.025	0.067	0.344	0.795	1	1	1	1
Относительно альтернативы H_5							
0.1	0.104	0.108	0.115	0.177	0.275	0.563	0.916
0.05	0.052	0.054	0.058	0.089	0.150	0.387	0.831
0.025	0.026	0.027	0.029	0.044	0.077	0.237	0.717

Таблица 2.13

Оценки мощности критерия однородности Жанга со статистикой Z_C относительно альтернатив $H_1 - H_5$ в зависимости от $n_i = n$

α	n = 20	n = 50	n = 100	n = 300	n = 500	n = 1000	n = 2000
Относительно альтернативы H_1							
0.1	0.114	0.134	0.164	0.278	0.382	0.600	0.859
0.05	0.059	0.073	0.097	0.185	0.275	0.485	0.784
0.025	0.031	0.041	0.057	0.122	0.194	0.384	0.702
Относительно альтернативы H_2							
0.1	0.425	0.743	0.946	1	1	1	1
0.05	0.310	0.641	0.907	1	1	1	1
0.025	0.219	0.540	0.858	1	1	1	1
Относительно альтернативы H_3							
0.1	0.107	0.127	0.163	0.320	0.468	0.748	0.961
0.05	0.053	0.064	0.088	0.205	0.336	0.632	0.925
0.025	0.026	0.032	0.046	0.127	0.136	0.516	0.874
Относительно альтернативы H_4							
0.1	0.256	0.640	0.936	1	1	1	1
0.05	0.133	0.476	0.874	1	1	1	1
0.025	0.062	0.327	0.787	1	1	1	1
Относительно альтернативы H_5							
0.1	0.104	0.108	0.116	0.1721	0.265	0.556	0.913
0.05	0.052	0.054	0.058	0.087	0.143	0.379	0.825
0.025	0.025	0.027	0.029	0.043	0.073	0.238	0.706

Таблица 2.14

Оценки мощности критерия однородности Жанга со статистикой Z_K относительно альтернатив H_1, H_3, H_5 в зависимости от $n_i = n$ при $k = 3$

α	n = 20	n = 50	n = 100	n = 300	n = 500	n = 1000	n = 2000
Относительно альтернативы H_1							
0.1	0.110	0.125	0.144	0.231	0.321	0.525	0.822
0.05	0.056	0.066	0.080	0.144	0.210	0.397	0.728
0.025	0.028	0.035	0.043	0.087	0.135	0.292	0.624
Относительно альтернативы H_3							
0.1	0.107	0.123	0.147	0.263	0.376	0.621	0.914
0.05	0.054	0.064	0.080	0.162	0.250	0.480	0.840
0.025	0.027	0.033	0.044	0.097	0.160	0.354	0.738
Относительно альтернативы H_5							
0.1	0.104	0.110	0.117	0.170	0.233	0.423	0.779
0.05	0.053	0.055	0.060	0.092	0.137	0.300	0.641
0.025	0.026	0.029	0.031	0.049	0.075	0.191	0.496

Таблица 2.15

Оценки мощности критерия однородности Жанга со статистикой Z_K относительно альтернатив H_1, H_3, H_5 в зависимости от $n_i = n$ при $k = 4$

α	n = 20	n = 50	n = 100	n = 300	n = 500	n = 1000	n = 2000
Относительно альтернативы H_1							
0.1	0.109	0.121	0.141	0.219	0.300	0.502	0.814
0.05	0.056	0.063	0.077	0.132	0.190	0.376	0.720
0.025	0.029	0.033	0.041	0.078	0.118	0.259	0.619
Относительно альтернативы H_3							
0.1	0.106	0.120	0.145	0.249	0.367	0.606	0.913
0.05	0.054	0.062	0.079	0.152	0.237	0.461	0.748
0.025	0.027	0.032	0.042	0.091	0.145	0.336	0.619
Относительно альтернативы H_5							
0.1	0.103	0.107	0.114	0.161	0.222	0.410	0.771
0.05	0.052	0.055	0.059	0.086	0.122	0.272	0.643
0.025	0.026	0.028	0.030	0.047	0.063	0.166	0.354

Таблица 2.16

Оценки мощности критерия однородности Жанга со статистикой Z_A относительно альтернатив H_1, H_3, H_5 в зависимости от $n_i = n$ при $k = 3$

α	n = 20	n = 50	n = 100	n = 300	n = 500	n = 1000	n = 2000
Относительно альтернативы H_1							
0.1	0.112	0.130	0.158	0.268	0.371	0.599	0.871
0.05	0.058	0.070	0.091	0.174	0.261	0.480	0.799
0.025	0.030	0.038	0.052	0.113	0.183	0.379	0.718
Относительно альтернативы H_3							
0.1	0.107	0.126	0.162	0.319	0.470	0.767	0.972
0.05	0.053	0.065	0.088	0.207	0.340	0.655	0.945
0.025	0.027	0.033	0.047	0.131	0.243	0.550	0.906
Относительно альтернативы H_5							
0.1	0.103	0.108	0.116	0.181	0.279	0.580	0.972
0.05	0.052	0.054	0.059	0.096	0.161	0.420	0.945
0.025	0.026	0.027	0.030	0.049	0.090	0.288	0.906

Таблица 2.17

Оценки мощности критерия однородности Жанга со статистикой Z_A относительно альтернатив H_1, H_3, H_5 в зависимости от $n_i = n$ при $k = 4$

α	n = 20	n = 50	n = 100	n = 300	n = 500	n = 1000	n = 2000
Относительно альтернативы H_1							
0.1	0.111	0.127	0.153	0.255	0.360	0.579	0.868
0.05	0.057	0.068	0.086	0.162	0.244	0.458	0.797
0.025	0.029	0.036	0.048	0.103	0.158	0.349	0.723
Относительно альтернативы H_3							
0.1	0.107	0.124	0.158	0.305	0.463	0.745	0.972
0.05	0.054	0.064	0.086	0.197	0.332	0.637	0.946
0.025	0.027	0.033	0.046	0.124	0.220	0.516	0.912
Относительно альтернативы H_5							
0.1	0.103	0.107	0.116	0.179	0.274	0.566	0.926
0.05	0.052	0.054	0.059	0.096	0.160	0.412	0.863
0.025	0.026	0.027	0.030	0.050	0.091	0.275	0.782

Т а б л и ц а 2.18

Оценки мощности критерия однородности Жанга со статистикой Z_C относительно альтернатив H_1, H_3, H_5 в зависимости от $n_i = n$ при $k = 3$

α	n = 20	n = 50	n = 100	n = 300	n = 500	n = 1000	n = 2000
Относительно альтернативы H_1							
0.1	0.113	0.131	0.160	0.273	0.380	0.612	0.880
0.05	0.058	0.071	0.092	0.178	0.269	0.493	0.808
0.025	0.030	0.038	0.053	0.115	0.188	0.389	0.729
Относительно альтернативы H_3							
0.1	0.107	0.125	0.160	0.319	0.475	0.771	0.975
0.05	0.053	0.063	0.087	0.206	0.345	0.662	0.949
0.025	0.026	0.032	0.046	0.130	0.243	0.551	0.912
Относительно альтернативы H_5							
0.1	0.103	0.108	0.116	0.176	0.270	0.568	0.928
0.05	0.052	0.054	0.059	0.092	0.153	0.405	0.856
0.025	0.026	0.027	0.030	0.047	0.084	0.271	0.761

Т а б л и ц а 2.19

Оценки мощности критерия однородности Жанга со статистикой Z_C относительно альтернатив H_1, H_3, H_5 в зависимости от $n_i = n$ при $k = 4$

α	n = 20	n = 50	n = 100	n = 300	n = 500	n = 1000	n = 2000
Относительно альтернативы H_1							
0.1	0.111	0.126	0.155	0.260	0.368	0.595	0.872
0.05	0.057	0.068	0.087	0.167	0.249	0.474	0.800
0.025	0.030	0.037	0.049	0.106	0.162	0.370	0.721
Относительно альтернативы H_3							
0.1	0.106	0.122	0.158	0.306	0.468	0.761	0.973
0.05	0.053	0.063	0.086	0.196	0.332	0.649	0.950
0.025	0.027	0.032	0.046	0.123	0.221	0.540	0.913
Относительно альтернативы H_5							
0.1	0.103	0.107	0.115	0.173	0.257	0.555	0.923
0.05	0.052	0.054	0.058	0.092	0.149	0.398	0.851
0.025	0.026	0.027	0.030	0.048	0.078	0.270	0.758

2.6. Двухвыборочные критерии при анализе k выборок

Различные подходы к построению k-выборочных аналогов критериев Смирнова, Лемана–Розенблатта и Андерсона–Дарлинга рассматривались в работе [25]. k-выборочный вариант критерия Колмогорова–Смирнова, основанный на таком подходе, был построен в [9] и рассматривается в последовательных изданиях книги [10]. На использовании такого же подхода построен k-выборочный критерий Андерсона–Дарлинга [63], рассмотренный выше (см. п. 2.4), для которого нами были построены модели предельных распределений, представленные, в том числе, в [93, 34]. В этих критериях, так же как и в критериях однородности Жанга, строится объединённая выборка, а статистики измеряют отклонение эмпирических распределений отдельных выборок от эмпирического распределения, построенного по совокупности анализируемых выборок.

Возможен другой путь. Для анализа k выборок можно к каждой паре выборок применить двухвыборочный критерий со статистикой S (всего $(k-1)k/2$ вариантов), а решение принимать по совокупности результатов. В качестве статистики такого k-выборочного критерия (в случае использования правостороннего двухвыборочного критерия) можно рассмотреть, например, статистику вида

$$S_{\max} = \max_{\substack{1 \le i \le k \\ i < j \le k}} \{S_{i,j}\}, \tag{2.17}$$

где $S_{i,j}$ – значения статистик используемого двухвыборочного критерия, полученные при анализе i-й и j-й выборок.

Проверяемая гипотеза H_0 будет отклоняться при **больших** значениях статистики $S_{\max}$.

Преимуществом такого рода критерия является и то, что в результате будет определена пара выборок, различие между которыми оказывается наиболее значимым с позиций используемого двухвыборочного критерия.

В качестве $S_{i,j}$ можно использовать статистики двухвыборочных критериев Смирнова (лучше в модифицированном виде), Лемана–

Розенблата, Андерсона–Дарлинга. В этом случае распределения соответствующих статистик $S_{\max}$ сходятся к некоторым предельным, модели которых могут быть найдены по результатам статистического моделирования.

Конечно, в критериях такого рода можно использовать и двухвыборочный вариант статистики Z_{K} критерия Жанга, однако тогда распределение статистики $S_{\max}$ будет зависеть от объёмов сравниваемых выборок. Следовательно, применение критерия будет возможно лишь при использовании компьютерных технологий, обеспечивающих исследование распределения статистики критерия в интерактивном режиме.

При использовании левосторонних двухвыборочных критериев Жанга со статистиками Z_{A} и Z_C статистика k-выборочного критерия примет вид:

$$S_{\min} = \min_{\substack{1 \le i \le k \\ i < j \le k}} \{S_{i,j}\} . \qquad (2.18)$$

В этом случае проверяемая гипотеза H_0 будет отклоняться при **малых** значениях статистики $S_{\min}$. Однако строить варианты критериев, предусматривающие использование двухвыборочных критериев Жанга, большого смысла нет из-за зависимости в таком случае распределений статистик (2.17) и (2.18) от объемов выборок.

2.6.1. k –выборочный критерий Смирнова (max)

В качестве $S_{i,j}$ в (2.17) в этом случае будет рассматриваться модификация статистики Смирнова (2.3), распределение которой всегда ближе к предельному распределению Колмогорова $K(S)$. Статистику $S_{\max}$ в этом случае будем обозначать как $S_{\max}^{Sm}$.

При равных объёмах сравниваемых выборок распределения статистики $S_{\max}^{Sm}$ (как и в двухвыборочном варианте) обладают существенной дискретностью (см. рис. 2.28) и отличаются от асимптотических (предельных) распределений (см. рис. 2.29). Если есть такая возможность, то предпочтительней в качестве n_i выбирать взаимно простые числа, тогда распределения $G(S|H_0)$ статистики $S_{\max}^{Sm}$ практически не будут отличаться от асимптотических.

Верхние критические значения для статистики $S_{\max}^{Sm}$, построенные по эмпирическим распределениям статистик, полученным методом Монте–Карло при количестве имитационных экспериментов $N=10^6$, представлены в таблице 2.20, а в таблице 2.21 приведены построенные модели асимптотических (предельных) распределений статистики $S_{\max}^{Sm}$ при числе сравниваемых выборок $k=3\div11$.

Представленные в таблице 2.21 модели $\mathrm{B_{III}}(\theta_0,\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4)$ бета-распределения 3-го рода (2.13) с приведенными значениями параметров, позволяют по значениям статистики, вычисленным в соответствии с соотношением (2.17) с использованием в качестве $S_{i,j}$ статистики Смирнова (2.1) или её модификации (2.3), находить оценки p_{value} при соответствующем числе k сравниваемых выборок.

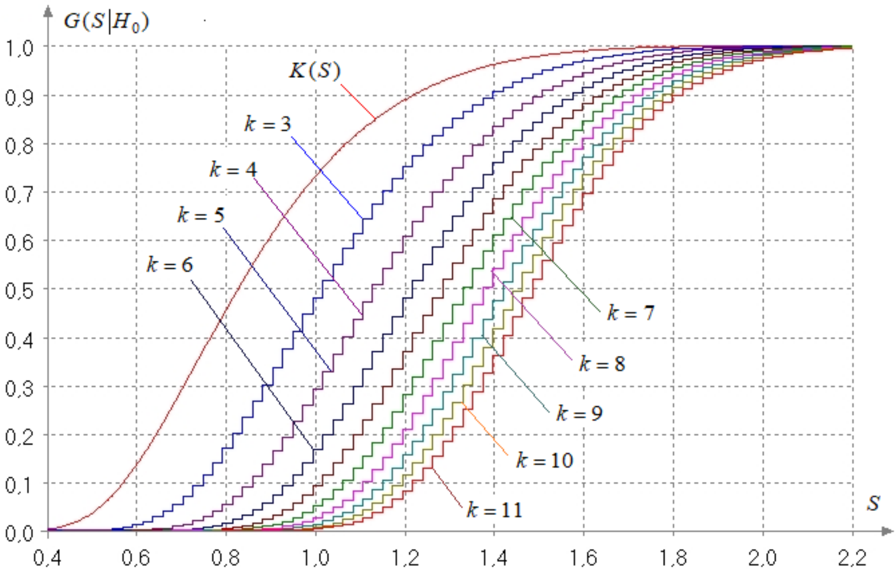

Рис. 2.28. Распределения статистики $S_{\max}^{Sm}$ k-выборочного критерия Смирнова при $n_i=1000$, $i=\overline{1,k}$

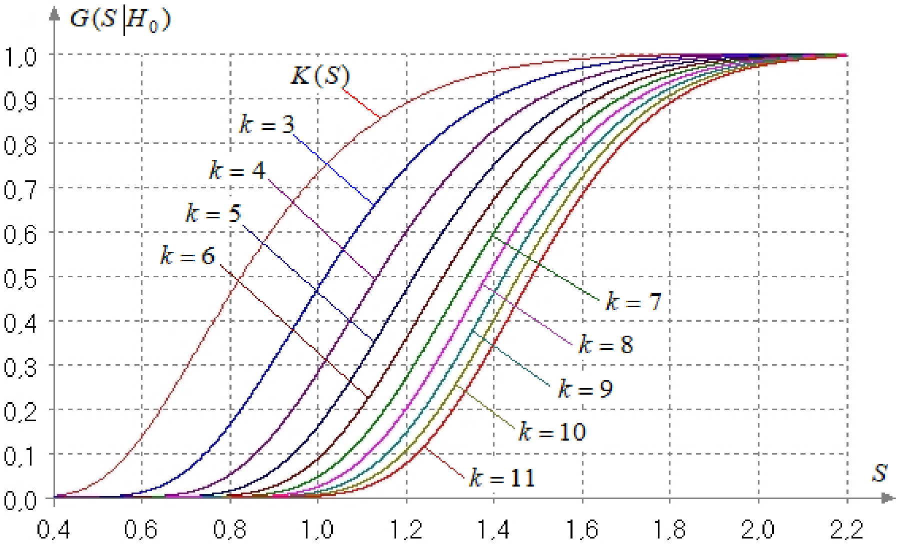

Рис. 2.29. Асимптотические распределения статистики $S_{\max}^{Sm}$ k -выборочного критерия Смирнова

Таблица 2.20

Верхние критические значения статистики $S_{\max}^{Sm}$ Смирнова

k	$1-\alpha$				
	0.75	0.90	0.95	0.975	0.99
2	1.0192	1.2238	1.3581	1.4802	1.6276
3	1.2059	1.4006	1.5266	1.6396	1.7782
4	1.3194	1.5070	1.6278	1.7372	1.8701
5	1.4002	1.5822	1.6997	1.8057	1.9329
6	1.4620	1.6396	1.7545	1.8573	1.9833
7	1.5127	1.6867	1.7989	1.9009	2.0245
8	1.5546	1.7264	1.8362	1.9362	2.0596
9	1.5911	1.7598	1.8682	1.9672	2.0879
10	1.6224	1.7893	1.8969	1.9940	2.1148
11	1.6506	1.8156	1.9217	2.0182	2.1371

Таблица 2.21

Модели предельных распределений статистики $S_{\max}^{Sm}$

k	Модель
2	$K(S)$
3	B_{III} (6.3274, 6.6162, 2.8238, 2.4073, 0.4100)
4	B_{III} (7.2729, 7.2061, 2.6170, 2.3775, 0.4740)
5	B_{III} (7.1318, 7.3365, 2.4813, 2.3353, 0.5630)
6	B_{III} (7.0755, 8.0449, 2.3163, 2.3818, 0.6320)
7	B_{III} (7.7347, 8.6845, 2.3492, 2.4479, 0.6675)
8	B_{III} (7.8162, 8.9073, 2.2688, 2.4161, 0.7120)
9	B_{III} (7.8436, 8.8805, 2.1696, 2.3309, 0.7500)
10	B_{III} (7.8756, 8.9051, 2.1977, 2.3280, 0.7900)
11	B_{III} (7.9122, 9.0411, 2.1173, 2.2860, 0.8200)

Оценки мощности k-выборочного критерия со статистикой $S_{\max}^{Sm}$ при $k=3$ и $k=4$ при проверке гипотезы H_0 относительно конкурирующих гипотез H_1, H_3, H_5 приведены в таблицах 2.22 и 2.23 соответственно. Эти оценки можно сравнить с оценками мощности k-выборочных критериев Андерсона–Дарлинга и Жанга (см. пп. 2.4 и 2.5). В таблицах оценки мощности отсчитывались от асимптотических распределений $G(S|H_0)$.

Подчеркнём, что все приводимые результаты справедливы при использования в статистике $S_{\max}^{Sm}$ в качестве статистик $S_{i,j}$ как статистики (2.3), так и статистики (2.1).

Таблица 2.22

Оценки мощности k -выборочного критерия со статистикой $S_{\max}^{Sm}$ относительно H_1, H_3 и H_5 в зависимости от $n_i = n$ при $k = 3$

Уровень значимости α	n =20	n =50	n = 100	n = 300	n = 500	n = 1000
Относительно альтернативы H_1						
0.1	0.110	0.128	0.155	0.272	0.383	0.622
0.05	0.058	0.070	0.088	0.173	0.267	0.489
0.025	0.029	0.037	0.049	0.107	0.177	0.370
Относительно альтернативы H_3						
0.1	0.103	0.104	0.114	0.136	0.164	0.253
0.05	0.052	0.053	0.056	0.069	0.088	0.143
0.025	0.025	0.026	0.027	0.036	0.045	0.074
Относительно альтернативы H_5						
0.1	0.102	0.105	0.111	0.148	0.183	0.288
0.05	0.052	0.051	0.058	0.078	0.100	0.168
0.025	0.026	0.026	0.030	0.039	0.052	0.091

Таблица 2.23

Оценки мощности k -выборочного критерия со статистикой $S_{\max}^{Sm}$ относительно H_1, H_3 и H_5 в зависимости от $n_i = n$ при $k = 4$

Уровень значимости α	n =20	n =50	n = 100	n = 300	n = 500	n = 1000
Относительно альтернативы H_1						
0.1	0.111	0.125	0.151	0.261	0.366	0.605
0.05	0.057	0.066	0.083	0.163	0.251	0.473
0.025	0.028	0.035	0.046	0.102	0.168	0.363
Относительно альтернативы H_3						
0.1	0.102	0.105	0.108	0.128	0.153	0.221
0.05	0.051	0.052	0.055	0.065	0.078	0.120
0.025	0.025	0.027	0.028	0.033	0.041	0.065
Относительно альтернативы H_5						
0.1	0.103	0.104	0.112	0.138	0.166	0.257
0.05	0.052	0.053	0.055	0.071	0. 090	0.143
0.025	0.026	0.027	0.029	0.037	0.046	0.081

2.6.2. k –выборочный критерий Лемана–Розенблатта (max)

В качестве $S_{i,j}$ в статистике $S_{\max}^{LR}$ вида (2.17) в этом случае используется статистика (2.4) Лемана–Розенблатта. Зависимость распределений статистики при справедливости H_0 от числа выборок иллюстрирует рис. 2.30.

Верхние критические значения для статистики $S_{\max}^{LR}$, построенные по результатам статистического моделирования при количестве имитационных экспериментов $N = 10^6$, представлены в таблице 2.24.

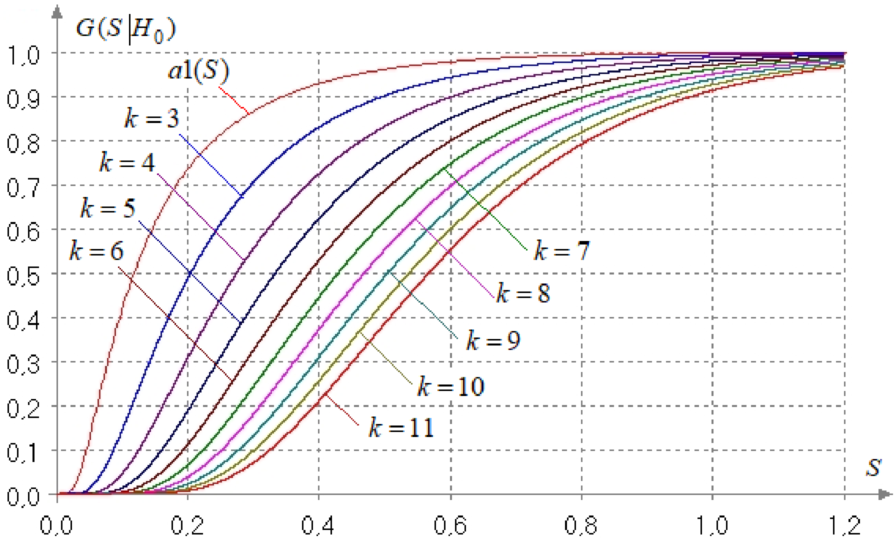

Рис. 2.30. Распределения статистики $S_{\max}^{LR}$ k-выборочного критерия Лемана–Розенблатта

Построенные модели асимптотических (предельных) распределений статистики $S_{\max}^{LR}$ при числе сравниваемых выборок $k = 3 \div 11$ представлены в таблице 2.25.

В данном случае наилучшими моделями оказались распределения Sb–Джонсона с плотностью

$$f(x) = \frac{\theta_1 \theta_2}{\sqrt{2\pi}(x-\theta_3)(\theta_2+\theta_3-x)} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\theta_0 - \theta_1 \ln \frac{x-\theta_3}{\theta_2+\theta_3-x}\right]^2\right\}$$

при конкретных значениях параметров этого закона, обозначенного в таблице 2.25 как $Sb(\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)$. Представленные модели позволяют по значениям статистики $S_{\max}^{LR}$ при соответствующем числе k сравниваемых выборок находить оценки p_{value}.

Оценки мощности k-выборочного критерия со статистикой $S_{\max}^{LR}$ для $k=3$ и $k=4$ при проверке гипотезы H_0 относительно конкурирующих гипотез H_1, H_3, H_5 приведены в таблицах 2.26, 2.27 соответственно.

Таблица 2.24

Верхние критические значения статистики $S_{\max}^{LR}$ Лемана–Розенблатта

k	$1-\alpha$				
	0.75	0.90	0.95	0.975	0.99
2	0.2094	0.3473	0.4614	0.5806	0.7435
3	0.3306	0.4995	0.6283	0.7581	0.9308
4	0.4206	0.6050	0.7413	0.8770	1.0550
5	0.4924	0.6856	0.8267	0.9653	1.1429
6	0.5521	0.7512	0.8959	1.0365	1.2175
7	0.6037	0.8072	0.9524	1.0947	1.2774
8	0.6481	0.8550	1.0015	1.1444	1.3298
9	0.6876	0.8976	1.0457	1.1902	1.3781
10	0.7237	0.9355	1.0858	1.2303	1.4171
11	0.7563	0.9703	1.1214	1.2655	1.4535

Таблица 2.25

Модели предельных распределений статистики $S_{\max}^{LR}$

k	Модель
2	$a1(t)$
3	Sb(3.2854, 1.2036, 3.0000, 0.0215)
4	Sb(2.5801, 1.2167, 2.2367, 0.0356)
5	Sb(3.1719, 1.4134, 3.1500, 0.0320)
6	Sb(2.9979, 1.4768, 2.9850, 0.0380)
7	Sb(3.2030, 1.5526, 3.4050, 0.0450)
8	Sb(3.2671, 1.6302, 3.5522, 0.0470)
9	Sb(3.4548, 1.7127, 3.8800, 0.0490)
10	Sb(3.4887, 1.7729, 3.9680, 0.0510)
11	Sb(3.4627, 1.8168, 3.9680, 0.0544)

Таблица 2.26

Оценки мощности k -выборочного критерия со статистикой $S_{\max}^{LR}$ относительно H_1, H_3 и H_5 в зависимости от $n_i = n$ при $k = 3$

Уровень значимости α	n =20	n =50	n = 100	n = 300	n = 500	n = 1000
Относительно альтернативы H_1						
0.1	0.114	0.134	0.168	0.306	0.437	0.694
0.05	0.059	0.072	0.097	0.201	0.316	0.574
0.025	0.030	0.039	0.055	0.131	0.222	0.461
Относительно альтернативы H_3						
0.1	0.103	0.104	0.108	0.127	0.152	0.241
0.05	0.051	0.052	0.053	0.063	0.074	0.119
0.025	0.025	0.026	0.026	0.031	0.036	0.058

Окончание таблицы 2.26

Уровень значимости α	n =20	n =50	n = 100	n = 300	n = 500	n = 1000
Относительно альтернативы H_5						
0.1	0.103	0.104	0.107	0.124	0.145	0.218
0.05	0.051	0.052	0.053	0.061	0.071	0.107
0.025	0.025	0.026	0.027	0.030	0.035	0.052

Таблица 2.27

Оценки мощности k -выборочного критерия статистикой $S_{\max}^{LR}$ относительно H_1, H_3 и H_5 в зависимости от $n_i = n$ при $k = 4$

Уровень значимости α	n =20	n =50	n = 100	n = 300	n = 500	n = 1000
Относительно альтернативы H_1						
0.1	0.113	0.130	0.162	0.293	0.425	0.686
0.05	0.058	0.069	0.092	0.191	0.302	0.566
0.025	0.030	0.037	0.051	0.122	0.211	0.453
Относительно альтернативы H_3						
0.1	0.102	0.103	0.105	0.118	0.135	0.197
0.05	0.051	0.051	0.052	0.059	0.067	0.097
0.025	0.025	0.026	0.026	0.029	0.033	0.047
Относительно альтернативы H_5						
0.1	0.102	0.102	0.105	0.116	0.130	0.183
0.05	0.051	0.051	0.053	0.058	0.065	0.090
0.025	0.025	0.026	0.026	0.029	0.032	0.044

2.6.3. k –выборочный критерий Андерсона–Дарлинга (max)

В статистике $S_{\max}^{AD}$ вида (2.17) качестве $S_{i,j}$ используется статистика (2.7) Андерсона–Дарлинга. Зависимость распределений статистики $S_{\max}^{AD}$ при справедливости H_0 от числа выборок иллюстрирует рис. 2.31.

Верхние критические значения для статистики $S_{\max}^{AD}$, построенные по результатам статистического моделирования при количестве имитационных экспериментов $N = 10^6$, представлены в таблице 2.28.

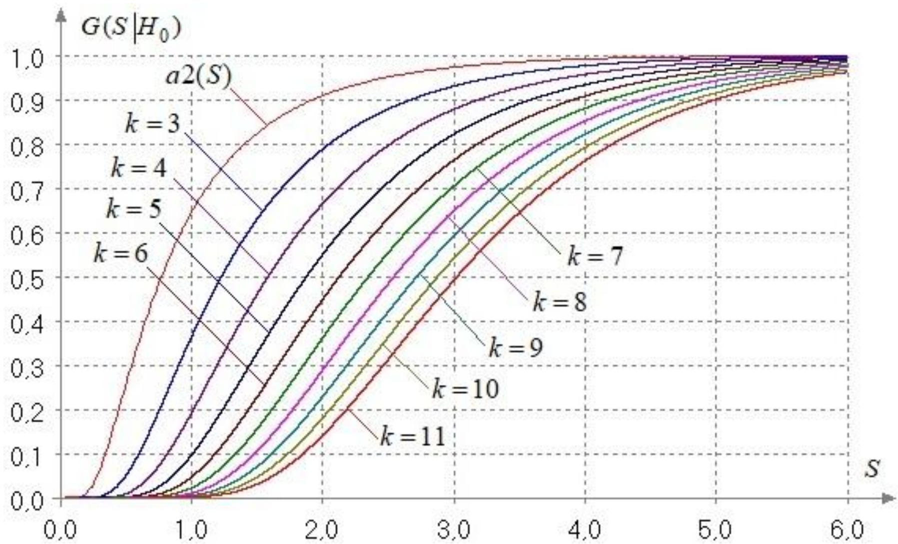

Рис. 2.31. Распределения статистики $S_{\max}^{AD}$ k-выборочного критерия Андерсона–Дарлинга

Для распределений $G(S_{\max}^{AD}|H_0)$ также построены модели асимптотических (предельных) распределений статистики $S_{\max}^{AD}$ для числа сравниваемых выборок $k = 3 \div 11$, которые представлены в таблице 2.29. В этом случае лучшими моделями оказались бета-распределения 3-го рода (2.13), которые в виде $B_{III}(\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)$ с конкретными значениями параметров приведены в таблице 2.29 и могут использоваться для оценки p_{value} при k сравниваемых выборках.

Таблица 2.28

Верхние критические значения статистики $S_{\max}^{AD}$ Андерсона–Дарлинга

k	$1-\alpha$				
	0.75	0.90	0.95	0.975	0.99
2	1.2479	1.9330	2.4924	3.0775	3.8781
3	1.8535	2.6796	3.31215	3.95176	4.7924
4	2.2990	3.1966	3.8682	4.5368	5.4076
5	2.6514	3.5948	4.2877	4.9686	5.8472
6	2.9431	3.9187	4.6292	5.3175	6.2089
7	3.1943	4.1950	4.9097	5.6063	6.5118
8	3.4135	4.4292	5.1501	5.8531	6.7710
9	3.6094	4.6395	5.3660	6.0733	7.0076
10	3.7867	4.8270	5.5616	6.2720	7.2042
11	3.9466	4.9974	5.7384	6.4512	7.3837

Таблица 2.29

Модели предельных распределений статистики $S_{\max}^{AD}$

k	Модель
2	$a2(t)$
3	B_{III} (4.4325, 2.7425, 12.1134, 8.500, 0.1850)
4	B_{III} (5.2036, 3.2160, 10.7792, 10.000, 0.2320)
5	B_{III} (5.7527, 3.3017, 9.7365, 10.000, 0.3000)
6	B_{III} (5.5739, 3.4939, 7.7710, 10.000, 0.3750)
7	B_{III} (6.4892, 3.6656, 8.0529, 10.500, 0.3920)
8	B_{III} (6.3877, 3.8143, 7.3602, 10.800, 0.4800)
9	B_{III} (6.7910, 3.9858, 7.1280, 11.100, 0.5150)
10	B_{III} (6.7533, 4.2779, 6.6457, 11.700, 0.5800)
11	B_{III} (7.1745, 4.3469, 6.6161, 11.800, 0.6100)

Оценки мощности k-выборочного критерия со статистикой $S_{\max}^{AD}$ для $k=3$ и $k=4$ относительно конкурирующих гипотез H_1, H_3, H_5 приведены в таблицах 2.30, 2.31 соответственно.

Критерий со статистикой $S_{\max}^{AD}$ демонстрирует более высокую мощность относительно рассматриваемых конкурирующих гипотез по сравнению с критериями со статистиками $S_{\max}^{LR}$ и $S_{\max}^{Sm}$.

Таблица 2.30

Оценки мощности k-выборочного критерия со статистикой $S_{\max}^{AD}$ относительно H_1, H_3 и H_5 в зависимости от $n_i = n$ при $k = 3$

Уровень значимости α	n =20	n =50	n = 100	n = 300	n = 500	n = 1000
Относительно альтернативы H_1						
0.1	0.113	0.134	0.171	0.314	0.450	0.712
0.05	0.058	0.073	0.098	0.209	0.329	0.595
0.025	0.030	0.040	0.057	0.137	0.234	0.484
Относительно альтернативы H_3						
0.1	0.102	0.107	0.114	0.165	0.231	0.446
0.05	0.051	0.053	0.056	0.081	0.117	0.263
0.025	0.025	0.026	0.027	0.040	0.058	0.143
Относительно альтернативы H_5						
0.1	0.102	0.104	0.110	0.134	0.166	0.272
0.05	0.051	0.052	0.055	0.066	0.086	0.142
0.025	0.025	0.026	0.027	0.033	0.040	0.070

Таблица 2.31

Оценки мощности k -выборочного критерия со статистикой $S_{\max}^{AD}$ относительно H_1, H_3 и H_5 в зависимости от $n_i = n$ при $k = 4$

Уровень значимости α	n =20	n =50	n = 100	n = 300	n = 500	n = 1000
Относительно альтернативы H_1						
0.1	0.112	0.131	0.165	0.302	0.438	0.706
0.05	0.058	0.070	0.094	0.198	0.317	0.589
0.025	0.030	0.037	0.053	0.129	0.223	0.477
Относительно альтернативы H_3						
0.1	0.101	0.104	0.111	0.145	0.195	0.381
0.05	0.051	0.052	0.055	0.071	0.097	0.214
0.025	0.025	0.026	0.027	0.035	0.048	0.112
Относительно альтернативы H_5						
0.1	0.101	0.103	0.107	0.124	0.147	0.229
0.05	0.051	0.052	0.053	0.061	0.073	0.116
0.025	0.025	0.026	0.027	0.031	0.036	0.057

2.7. Критерий однородности χ^2

Пусть имеется k выборок $x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in_i}$, $i = \overline{1,k}$, непрерывных случайных величин и $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$. Общая область, которой принадлежат выборки, разбивается на r интервалов (групп). Пусть η_{ij} – количество элементов i -й выборки, попавших в j -й интервал, тогда $n_i = \sum_{j=1}^{r} \eta_{ij}$.

Статистика критерия однородности χ^2 имеет вид

$$\chi^2 = n\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{r}\frac{(\eta_{ij}-\nu_j n_i / n)^2}{\nu_j n_i} = n\left(\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{r}\frac{\eta_{ij}^{\;2}}{\nu_j n_i}-1\right), \qquad (2.19)$$

где $\nu_j = \sum_{l=1}^{k}\eta_{lj}$ – общее число элементов всех выборок, попавших j-й интервал.

Асимптотическим распределением статистики (2.19) является χ^2-распределение с числом степеней свободы $(k-1)(r-1)$ [84].

Оценки мощности критерия со статистикой (2.19) для $k=2$, $k=3$ и $k=4$ при разбиении объединённой выборки на $r=10$ равночастотных интервалов относительно конкурирующих гипотез H_1, H_3, H_5 представлены в таблицах 2.32, 2.33 и 2.34.

Сравнивая оценки мощности критерия однородности χ^2 с мощностью других крнтериев, можно отметить, что он уступает большинству критериев относительно альтернативы сдвига, но вполне может конкурировать в других ситуациях.

Очевидно, что выбор числа интервалов и способ разбиения на интервалы влияют на мощность критерия.

При наличии предположений о виде наиболее предпочтительной параметрической модели закона для анализируемых данных можно повысить мощность критерия, например, за счёт использования асимптотически оптимального группирования [99]. В частности, критерий согласия χ^2 в случае использования асимптотически оптимального группирования при проверке простых гипотез зачастую имеет преимущество в мощности относительно близких конкурирующих гипотез (по сравнению с непараметрическими критериями согласия) [99].

Таблица 2.32

Оценки мощности k -выборочного критерия χ^2 относительно H_1, H_3 и H_5 в зависимости от объемов выборок ($k=2$, $n_i=n$, $r=10$)

Уровень значимости α	n =20	n =50	n = 100	n = 300	n = 500	n = 1000
Относительно альтернативы H_1						
0.1	0.103	0.111	0.120	0.174	0.231	0.384
0.05	0.051	0.056	0.061	0.103	0.138	0.277
0.025	0.026	0.029	0.030	0.056	0.082	0.183
Относительно альтернативы H_3						
0.1	0.105	0.115	0.132	0.201	0.284	0.479
0.05	0.053	0.060	0.072	0.123	0.178	0.359
0.025	0.026	0.031	0.040	0.069	0.110	0.257
Относительно альтернативы H_5						
0.1	0.102	0.110	0.119	0.175	0.230	0.381
0.05	0.051	0.058	0.064	0.103	0.139	0.267
0.025	0.026	0.030	0.035	0.058	0.080	0.178

Таблица 2.33

Оценки мощности k -выборочного критерия χ^2 относительно H_1, H_3 и H_5 в зависимости от объемов выборок ($k=3$, $n_i=n$, $r=10$)

Уровень значимости α	n =20	n =50	n = 100	n = 300	n = 500	n = 1000
Относительно альтернативы H_1						
0.1	0.100	0.108	0.120	0.173	0.226	0.385
0.05	0.050	0.058	0.064	0.098	0.135	0.256
0.025	0.025	0.029	0.032	0.055	0.080	0.182
Относительно альтернативы H_3						
0.1	0.105	0.114	0.129	0.202	0.277	0.495
0.05	0.053	0.060	0.069	0.118	0.184	0.350
0.025	0.026	0.030	0.035	0.070	0.113	0.261
Относительно альтернативы H_5						
0.1	0.100	0.113	0.121	0.173	0.226	0.382
0.05	0.051	0.059	0.064	0.097	0.140	0.250
0.025	0.025	0.029	0.032	0.054	0.081	0.176

Таблица 2.34

Оценки мощности k -выборочного критерия χ^2 относительно H_1, H_3 и H_5 в зависимости от объемов выборок ($k = 4$, $n_i = n$, $r = 10$)

Уровень значимости α	n =20	n =50	n = 100	n = 300	n = 500	n = 1000
Относительно альтернативы H_1						
0.1	0.102	0.109	0.118	0.167	0.221	0.358
0.05	0.052	0.055	0.060	0.092	0.138	0.244
0.025	0.026	0.030	0.031	0.049	0.081	0.172
Относительно альтернативы H_3						
0.1	0.107	0.113	0.127	0.189	0.271	0.458
0.05	0.052	0.056	0.068	0.111	0.172	0.335
0.025	0.025	0.029	0.034	0.063	0.107	0.249
Относительно альтернативы H_5						
0.1	0.102	0.110	0.116	0.164	0.218	0.357
0.05	0.049	0.054	0.062	0.093	0.135	0.245
0.025	0.026	0.028	0.032	0.050	0.080	0.166

2.7. Примеры применения

Рассмотрим применение рассмотренных в разделе критериев проверки однородности законов на примере анализа 3-х нижеприведенных выборок, каждой объёмом в 40 наблюдений.

0.321	0.359	-0.341	1.016	0.207	1.115	1.163	0.900	-0.629	-0.524
-0.528	-0.177	1.213	-0.158	-2.002	0.632	-1.211	0.834	-0.591	-1.975
-2.680	-1.042	-0.872	0.118	-1.282	0.766	0.582	0.323	0.291	1.387
-0.481	-1.366	0.351	0.292	0.550	0.207	0.389	1.259	-0.461	-0.283

0.890	-0.700	0.825	1.212	1.046	0.260	0.473	0.481	0.417	1.825
1.841	2.154	-0.101	1.093	-1.099	0.334	1.089	0.876	2.304	1.126
-1.134	2.405	0.755	-1.014	2.459	1.135	0.626	1.283	0.645	1.100
2.212	0.135	0.173	-0.243	-1.203	-0.017	0.259	0.702	1.531	0.289

0.390	0.346	1.108	0.352	0.837	1.748	-1.264	-0.952	0.455	-0.072
-0.054	-0.157	0.517	1.928	-1.158	-1.063	-0.540	-0.076	0.310	-0.237
-1.109	0.732	2.395	0.310	0.936	0.407	-0.327	1.264	-0.025	-0.007
0.164	0.396	-1.130	1.197	-0.221	-1.586	-0.933	-0.676	-0.443	-0.101

Эмпирические распределения, соответствующие данным выборкам, представлены на рис. 2.32

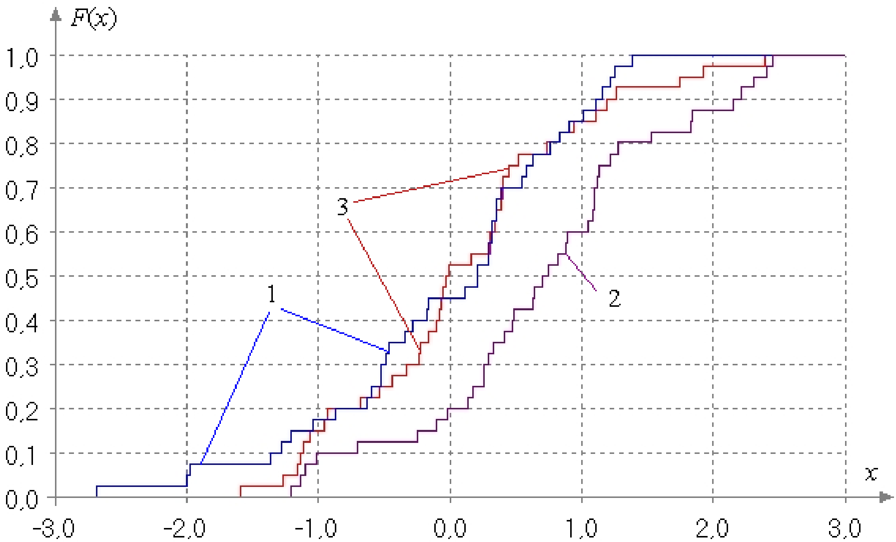

Рис. 2.32. Эмпирические распределения, соответствующие выборкам

Проверим гипотезу об однородности 1-й и 2-й выборок. В таблице 2.35 приведены результаты проверки: значения статистик критериев и достигнутые уровни значимости p_{value}. Оценки p_{value} вычислялись по значению статистики в соответствии с распределением (2.8) для критерия Андерсона–Дарлинга, в соответствии с распределением (2.5) для критерия Лемана–Розенблатта, в соответствии с распределением (2.2) для критерия Смирнова, в соответствии с бета-распределением 3-го рода из таблицы 2.8 при $k=2$ для k-выборочного критерия Андерсона–Дарлинга. Распределения статистик (2.12), (2.13) и (2.14) критериев Жанга и оценки p_{value} находились в результате моделирования. По приведенным оценкам p_{value} очевидно, что гипотеза об однородности по всем критериям должна быть отклонена.

В таблице 2.36 приведены результаты проверки гипотезы об однородности 1-й и 3-й выборок. Здесь оценки p_{value} по всем критериям очень высокие, поэтому проверяемая гипотеза об однородности не должна отклоняться.

Таблица 2.35

Результаты проверки однородности 1-й и 2-й выборок

Критерий	Статистика	p_{value}
Андерсона–Дарлинга	5.19801	0.002314
k-выборочный Андерсона–Дарлинга	5.66112	0.003260
Лемана–Розенблатта	0.9650	0.002973
Смирнова	1.56525	0.014893
Смирнова модифицированный	1.61386	0.010933
Жанга Z_A	2.99412	0.0007
Жанга Z_C	2.87333	0.0008
Жанга Z_K	5.58723	0.0150
χ^2, $r = 10$	16.3254	0.06039
χ^2, $r = 8$	13.3293	0.06448

Таблица 2.36

Результаты проверки однородности 1-й и 3-й выборок

Критерий	Статистика	p_{value}
Андерсона–Дарлинга	0.49354	0.753415
k-выборочный Андерсона–Дарлинга	-0.68252	0.767770
Лемана–Розенблатта	0.0500	0.876281
Смирнова	0.447214	0.989261
Смирнова модифицированный	0.495824	0.966553
Жанга Z_A	3.1998	0.332
Жанга Z_C	3.07077	0.384
Жанга Z_K	1.7732	0.531
χ^2, $r = 10$	11.6508	0.23372
χ^2, $r = 8$	4.0000	0.7798

В таблице 2.37 показаны результаты проверки гипотезы об однородности трёх рассматриваемых выборок по k-выборочному критерию Андерсона–Дарлинга, по критериям Жанга и по критериям со статистиками $S_{\max}^{Sm}$, $S_{\max}^{LR}$, $S_{\max}^{AD}$.

В этом случае оценка p_{value} для критерия Андерсона–Дарлинга вычислялась в соответствии с бета-распределением 3-го рода из таблицы 2.8 при $k=3$, а для критериев Жанга на основании статистического моделирования, проведенного в интерактивном режиме, при числе имитационных экспериментов $N=10^6$. Для критерия со статистикой $S_{\max}^{Sm}$ оценка p_{value} при $k=3$вычислялась в соответствии с бета-распределением 3-го рода из таблицы 2.21, для критерия со статистикой $S_{\max}^{LR}$ – в соответствии с распределением Sb-Джонсона из таблицы 2.25, для критерия со статистикой $S_{\max}^{AD}$ – в соответствии с бета-распределением 3-го рода из таблицы 2.29.

Заметим, что критерии Андерсона–Дарлинга $S_{\max}^{AD}$ и Лемана–Розенблатта $S_{\max}^{LR}$ зафиксировали максимальное отклонении между 1-й и 2-й выборками, а критерий Смирнова $S_{\max}^{Sm}$ – между 2-й и 3-й. Общий результат показывает, что проверяемая гипотеза об однородности 3-х выборок должна быть отклонена.

Таблица 2.37

Результаты проверки однородности 3-х выборок

Критерий	Статистика	p_{value}
k-выборочный Андерсона–Дарлинга	4.73219	0.0028
Жанга Z_A	3.02845	0.0016
Жанга Z_C	2.92222	0.0017
Жанга Z_K	7.00231	0.0218
max Андерсона–Дарлинга	5.19801	0.0064
max Лемана–Розенблатта	0.9650	0.0094
max Смирнова модифицированный	1.72566	0.0144
χ^2, $r=10$	25.556	0.1104
χ^2, $r=8$	19.200	0.1574

Можно обратить внимание на существенную зависимость результатов проверки по критерию однородности χ^2 от выбираемого числа интервалов r .

В данном случае результаты проверки были достаточно предсказуемы, так как 1-я и 3-я выборки были смоделированы в соответствии со стандартным нормальным законом, а полученные значения псевдослучайных величин округлены до 3-х значащих цифр после десятичной точки. В то время как 2-я выборка получена в соответствии с нормальным законом с параметром сдвига 0.5 и стандартным отклонением 1.1.

2.8. Выводы по разделу

Мощность рассматриваемых критериев однородности исследовалась методами статистического моделирования относительно трёх видов альтернатив: изменения параметра сдвига, изменения масштаба и относительно ситуации, когда пара выборок принадлежала близким, но различным законам (нормальному и логистическому). Анализ полученных оценок мощности позволяют сделать следующие выводы.

Относительно конкурирующих гипотез, соответствующих изменению параметра сдвига, двухвыборочные критерии Смирнова Лемана–Розенблатта, Андерсона–Дарлинга–Петита, критерии Жанга со статистиками Z_{K} , Z_{A} , Z_C и критерий χ^2 по убыванию мощности располагаются в следующем порядке:

$$\text{Андерсона–Дарлинга} \succ \text{Лемана–Розенблатта} \succ \text{Жанга } Z_C \succ$$
$$\text{Жанга } Z_{\mathrm{A}} \succ \text{Смирнова} \succ \text{Жанга } Z_{\mathrm{K}} \succ \chi^2 .$$

Относительно конкурирующих гипотез, соответствующих изменению параметра масштаба, критерии располагаются уже в другом порядке:

$$\text{Жанга } Z_{\mathrm{A}} \succ \text{Жанга } Z_C \succ \text{Жанга } Z_{\mathrm{K}} \succ \text{Андерсона–Дарлинга} \succ \chi^2$$
$$\succ \text{Лемана–Розенблатта} \succ \text{Смирнова.}$$

При этом разница в мощности критериев Жанга со статистиками Z_{A} и Z_C невелика. Относительно более близких конкурирующих гипотез с меньшим сдвигом критерий Смирнова может оказаться впереди критерия Лемана–Розенблатта.

В ситуации, когда при конкурирующей гипотезе одна выборка принадлежит нормальному закону, а вторая – логистическому, критерии упорядочиваются по мощности следующим образом:

$$\text{Жанга } Z_{\text{K}} \succ \text{Жанга } Z_{\text{A}} \succ \text{Жанга } Z_C \succ \chi^2 \succ \text{Андерсона–Дарлинга} \succ \text{Смирнова} \succ \text{Лемана–Розенблатта}.$$

В данном случае нельзя не учитывать негативный момент, связанный с дискретностью распределения статистики Смирнова. Это замечание в некоторой степени касается и критерия Жанга со статистикой Z_{K}.

В случае k выборок в аналогичных ситуациях тот же порядок предпочтения сохраняется для k-выборочных вариантов критериев Андерсона–Дарлинга и Жанга. Однако в этот порядок вмешиваются критерии, использующие статистики $S_{\max}^{Sm}$, $S_{\max}^{LR}$, $S_{\max}^{AD}$. В частности, относительно изменения параметра сдвига порядок предпочтения имеет вид:

$$S_{\max}^{AD} \succ \text{Андерсона–Дарлинга} \succ S_{\max}^{LR} \succ S_{\max}^{Sm} \succ \text{Жанга } Z_C \succ \text{Жанга } Z_{\text{A}} \succ \text{Жанга } Z_{\text{K}} \succ \chi^2.$$

Относительно изменения параметра масштаба –

$$\text{Жанга } Z_C \succ \text{Жанга } Z_{\text{A}} \succ \text{Жанга } Z_{\text{K}} \succ \text{Андерсона–Дарлинга} \succ \chi^2 \succ S_{\max}^{AD} \succ S_{\max}^{Sm} \succ S_{\max}^{LR}.$$

При этом критерии Жанга со статистиками Z_{A} и Z_C практически эквивалентны по мощности, а критерий Андерсона–Дарлинга заметно уступает критериям Жанга.

Относительно ситуации, когда три выборки принадлежат нормальному закону, а четвёртая – логистическому, критерии располагаются по мощности в следующем порядке:

$$\text{Жанга } Z_{\text{A}} \succ \text{Жанга } Z_C \succ \text{Жанга } Z_{\text{K}} \succ \chi^2 \succ \text{Андерсона–Дарлинга} \succ S_{\max}^{Sm} \succ S_{\max}^{AD} \succ S_{\max}^{LR}.$$

Так как распределение статистики (2.4) очень быстро сходится к распределению $a1(t)$, то использование его в качестве распределения статистики критерия Лемана–Розенблатта корректно и при малых объёмах сравниваемых выборок. Это же можно сказать относительно сходимости распределения статистики (2.7) критерия однородности Андерсона–Дарлинга к распределению $a2(t)$.

Построенные в данной работе модели предельных распределений статистики (2.11) при использовании k-выборочного критерия однородности Андерсона–Дарлинга для анализа $k = 2 \div 11$ сравниваемых выборок (Табл. 2.8) даёт возможность находить оценки p_{value}, что, несомненно, сделает результаты статистических выводов более информативными и более обоснованными. Такая же возможность реализована для критериев со статистиками $S_{\max}^{Sm}$ (Табл. 2.18), $S_{\max}^{LR}$ (Табл. 2.22), $S_{\max}^{AD}$ (Табл. 2.26).

В случае критерия Смирнова из-за ступенчатого характера распределения статистики (2.1) (особенно, при равных объёмах выборок) использование предельного распределения Колмогорова $K(S)$ для экспериментатора будет связано с очень приблизительным знанием действительного уровня значимости (вероятности ошибки первого рода) и соответствующего критического значения. Поэтому при построении процедур проверки однородности по критерию Смирнова рекомендуется: 1) выбирать $n_1 \neq n_2$ так, чтобы они представляли собой взаимно простые числа, а их наименьшее общее кратное k было максимальным и равным $n_1 n_2$; 2) использовать в критерии Смирнова статистику вида (2.3). Тогда применение распределения Колмогорова в качестве распределения статистики (2.3) критерия Смирнова будет корректным при относительно малых n_1 и n_2.

Критерии Жанга со статистиками Z_{K}, Z_{A}, Z_C относительно некоторых альтернатив обладают заметным преимуществом в мощности. Недостатком, ограничивающим их применение, является зависимость распределений статистик от объёмов выборок. Этот недостаток легко преодолевается использованием метода Монте–Карло для построения эмпирических распределений $G_N(Z | H_0)$ для статистик Z_{K}, Z_{A}, Z_C при конкретных объемах выборок с последующей оценкой по ним значений p_{value}. Такая процедура легко реализуется, так как при построении $G_N(Z|H_0)$ сравниваемые выборки моделируются по равномерному закону на интервале [0,1].

При обработке результатов измерений в задачах статистического управления качеством обычно имеют дело с выборками достаточно ограниченного или совсем малого объема. Следует отчетливо понимать, что критерии однородности вследствие низкой мощности при малых объемах выборок не способны различать близкие конкурирующие законы. Поэтому проверяемая гипотеза об однородности выборок, даже в случае ее несправедливости, чаще не будет отклоняться. Сдвиг на 0.1σ или увеличение масштабного параметра (рассеяния) на 10 % при малых объемах выборок критерии однородности, вернее всего, «не заметят», но большие отклонения в законах, соответствующих выборкам, будут отмечаться. Например, для того чтобы в случае применения критерия Лемана–Розенблатта вероятности ошибок первого α и второго рода β не превышали 0.1 при наличии сдвига 0.1σ (альтернатива H_1) объемы выборок должны быть порядка 2000, а при сдвиге 0.5σ (альтернатива H_2) вероятности ошибок не превысят величин 0.1 при объемах выборок не более 100.

3. КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ ОДНОРОДНОСТИ СРЕДНИХ

К критериям проверки гипотез об однородности математических ожиданий (об однородности средних) прибегают при контроле средств измерений, при статистическом анализе результатов экспериментов, при статистическом управлении качеством для проверки наличия возмущения в ходе процесса.

В общем случае проверяемая гипотеза о равенстве математических ожиданий, соответствующих k выборкам, имеет вид

$$H_0\colon\ \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_k$$

при конкурирующей гипотезе

$$H_1\colon\ \mu_{i_1} \neq \mu_{i_2}\ ,$$

где неравенство выполняется хотя бы для одной пары индексов i_1, i_2.

Для проверки гипотезы H_0 может использоваться ряд параметрических критериев: сравнения двух выборочных средних при известных дисперсиях; сравнения двух выборочных средних при неизвестных, но равных дисперсиях (критерий Стьюдента); сравнения двух выборочных средних при неизвестных и неравных дисперсиях; F-критерий. В этих же целях применяется целая совокупность непараметрических критериев: критерий Уилкоксона, критерий Манна–Уитни, критерий Краскела–Уаллиса, критерий Ван дер Вардена, k - выборочный критерий Ван дер Вардена.

Основным предположением, обусловливающим возможность применения параметрических критериев, является принадлежность анализируемых выборок нормальному закону. Непараметрические критерии свободны от этого требования.

Несмотря, казалось бы, на полную ясность для многих авторов всех нюансов, связанных с применением данных критериев, можно выделить, по крайней мере, два момента, недостаточно четко рассмотренных в литературе и послуживших поводом для проведения исследований [94, 38], которым посвящен данный раздел.

Во-первых: насколько важно убедиться в принадлежности анализируемых выборок нормальному закону при использовании параметрических критериев проверки однородности средних? В настоящее время исследователи в силу различных объективных и субъективных причин зачастую пренебрегают проверкой нормальности наблюдений, а потому и подвергаются справедливой критике за возможную некорректность выводов. Особенно типична такая ситуация при анализе биомедицинских измерений, где встретить выборки, хорошо согласующиеся с нормальным законом, весьма проблематично. С другой стороны, можно сослаться на авторитетные суждения о предпочтительности применения непараметрических критериев или об отсутствии необходимости в проверке нормальности, например, при использовании критерия Стьюдента в случае больших объемов выборок.

Вторая причина обусловлена достаточно туманными сведениями о мощности упомянутых критериев.

В материалах настоящего раздела исследуется влияние нарушений предположения о нормальности на распределения статистик параметрических критериев и приводится сравнительный анализ мощности наиболее популярных критериев проверки однородности средних.

3.1. Параметрические критерии однородности средних

3.1.1. Критерий сравнения двух выборочных средних при известных дисперсиях

Применение критерия сравнения двух выборочных средних (по двум выборкам) при известных и равных дисперсиях предусматривает вычисление статистики

$$z = \left(\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - \mu_1 + \mu_2\right) \Big/ \sqrt{\sigma_1^2 / n_1 + \sigma_2^2 / n_2}\,, \qquad (3.1)$$

где $\bar{x}_i = \dfrac{1}{n_i} \sum\limits_{j=1}^{n_i} x_{ij}$, n_i – объем i-й выборки, $i = 1, 2$. В случае принадлежности наблюдений (ошибок измерений) нормальным законам статистика z подчиняется стандартному нормальному закону. Если в статистике (3.1) опустить μ_1 и μ_2, то будет проверяться гипотеза о равенстве математических ожиданий.

Критерий двусторонний. Проверяемая гипотеза отклоняется при больших по модулю значениях статистики (3.1).

3.1.2. Критерий Стьюдента

Это критерий проверки гипотезы о равенстве математических ожиданий при неизвестных, но равных дисперсиях. Критерий предусматривает вычисление статистики t [81]:

$$t = \left(\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - \mu_1 + \mu_2\right) \Big/ \sqrt{\left[\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2}\right]\left[\frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}\right]}, \qquad (3.2)$$

где

$$s_i^2 = \frac{1}{n_i - 1}\sum_{j=1}^{n_i}\left(x_{ij} - \bar{x}_i\right)^2 .$$

Аналогично, если в статистике (3.2) опустить μ_1 и μ_2, то проверяется гипотеза о равенстве математических ожиданий.

В случае принадлежности выборок нормальному закону при справедливости гипотезы H_0 эта статистика подчиняется t_ν-распределению Стьюдента с числом степеней свободы $\nu = n_1 + n_2 - 2$. Критерий двусторонний.

3.1.3. Критерий сравнения двух выборочных средних при неизвестных и неравных дисперсиях

При неравных объемах выборок $n_1 \neq n_2$ статистика критерия, предложенная в [71], имеет вид [81]

$$t = \left(\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - \mu_1 + \mu_2\right) \Big/ \sqrt{s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2} . \qquad (3.3)$$

Критерий также двусторонний. В случае нормального закона и справедливости гипотезы H_0 статистика (3.3) подчиняется распределению t_ν-Стьюдента с числом степеней свободы

$$\nu = \left(s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2\right)^2 \Bigg/ \left[\frac{\left(s_1^2/n_1\right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left(s_2^2/n_2\right)^2}{n_2 - 1}\right]. \qquad (3.4)$$

Задача, связанная с поиском распределения статистики (3.3), долгое время носила название проблемы Беренса–Фишера [3, 14, 15]. Её настоящее решение получено в работах [72, 61, 62]. Иногда критерий называют критерием Крамера–Уэлча.

В случае равенства неизвестных дисперсий статистика (3.3) эквивалентна статистике (3.2). При неравенстве дисперсий всегда число степеней свободы $\nu < n_1 + n_2 - 2$. Чем больше разница в дисперсиях, соответствующих анализируемым выборкам, тем сильнее распределение статистики (3.3) отличается от распределения статистики (3.2).

Распределения статистик (3.1) и (3.2) при справедливости H_0 известны точно, а решение проблемы Беренса–Фишера носит приближенный характер. В то же время это решение обладает хорошей точностью.

На рис.3.1 представлено эмпирическое распределение $G(t|H_0)$ статистики (3.3), полученное при моделировании 10^5 значений статистики (3.3) в случае справедливости H_0 при $n_1 = n_2 = 5$. Здесь же показано t-распределение Стьюдента с числом степеней свободы $\nu = 6.969072165$, вычисленным в соответствии с (3.4) для $s_1^2 = 1$, $s_2^2 = 2.25$. На рисунке эти распределения визуально совпадают.

В первой строке таблицы 3.1 приведены результаты проверки простой гипотезы о согласии этого эмпирического распределения с теоретическим по критериям Колмогорова, Крамера–Мизеса–Смирнова и Андерсона–Дарлинга (значения статистик S и достигнутый уровень значимости p_{value}). Во второй строке приведены результаты для аналогичного эксперимента при $n_1 = n_2 = 10$ и вычисленном по (3.4) $\nu = 15.68041237$. В этом случае величины p_{value} ещё выше. Всё это подтверждает близость t_ν-распределений при ν, соответствующим (3.4), к истинным распределениям статистики (3.3).

Т а б л и ц а 3.1

Результаты проверки согласия эмпирических распределений статистики (3.3) с теоретическими t_ν -распределениями

n_1, n_2	Критерий					
	Колмогорова		Крамера–Мизеса–Смирнова		Андерсона–Дарлинга	
	S_K	p_{value}	S_ω	p_{value}	S_Ω	p_{value}
$n_1 = n_2 = 5$	0.9730	0.300	0.1926	0.282	1.1777	0.276
$n_1 = n_2 = 10$	0.8748	0.428	0.1101	0.534	0.9948	0.360

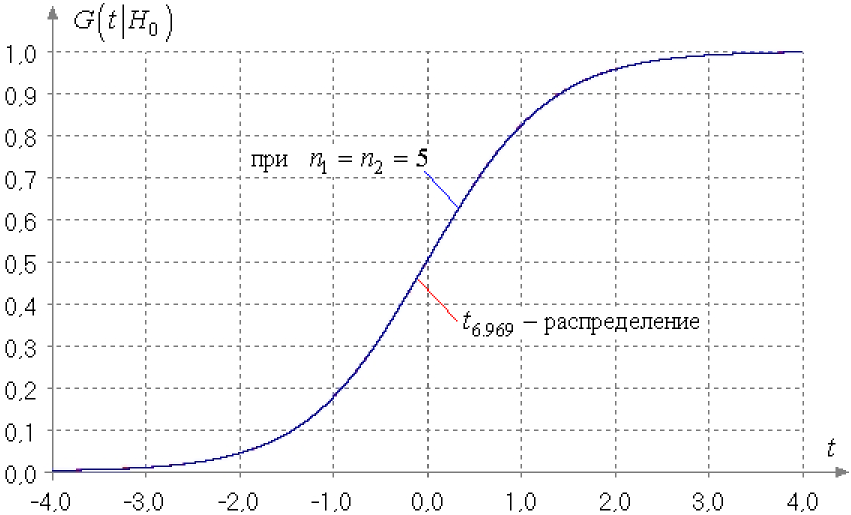

Рис. 3.1. Теоретическое и эмпирическое распределения статистики (3.3) при $n_1 = n_2 = 5$

Отметим, что при $n_1 + n_2 > 200$ различие между критериями со статистиками (3.1) – (3.3) практически исчезает, так как с ростом числа степеней свободы распределение Стьюдента сходится к стандартному нормальному закону. При $n_1 + n_2 > 200$ соответствующие распределения Стьюдента практически не отличаются от стандартного нормального. При использовании в таких ситуациях для вычисления достигаемых уровней значимости стандартного нормального закона вместо соответствующего распределения Стьюдента погрешности в определении вероятностей не превышают 0.001.

3.1.4. F-критерий однородности средних

В случае справедливости гипотезы о постоянстве (о равенстве) дисперсий с помощью F-критерия можно проверять гипотезу об однородности математических ожиданий по k выборкам [108].

Пусть у нас имеется k выборок объемом n. Сумма квадратов отклонений по всем выборкам определяется соотношением

$$Q_{kn} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} \left(x_{ij} - \bar{x}_{kn} \right)^2 ,$$

где

$$\bar{x}_{kn} = \frac{1}{kn} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \bar{\bar{x}}_k$$

– среднее по всем выборкам. Общая сумма Q_{kn} раскладывается на два компонента

$$Q_{kn} = Q_1 + Q_2 ,$$

$$Q_1 = n \sum_{i=1}^{k} \left(\bar{x}_{in} - \bar{\bar{x}}_k \right)^2 = n \sum_{i=1}^{k} \left(\bar{x}_{in}^2 - k \bar{\bar{x}}_k \right)^2 ,$$

$$Q_2 = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} \left(x_{ij} - \bar{x}_{in} \right)^2 = (n-1) \sum_{i=1}^{k} s_{in}^2 .$$

Компонент Q_1, например, в задачах контроля качества является мерой различия в уровнях настройки между k выборками, в то время как Q_2 определяет различие в уровнях настройки внутри этих k выборок.

Для проверки гипотезы используется критерий со статистикой

$$F = \frac{Q_1 / (k-1)}{Q_2 / [k(n-1)]} . \tag{3.5}$$

Если все выборки извлекаются из нормальной генеральной совокупности, то при справедливости гипотезы H_0 статистка (3.5) подчиняется F_{ν_1,ν_2} -распределению Фишера со степенями свободы $\nu_1 = k-1$ и $\nu_2 = k(n-1)$ [108]. Критерий правосторонний. Проверяемая гипотеза отклоняется при больших значениях статистики (3.5).

3.1.5. k-выборочный вариант критерия Стьюдента

В работах [12, 13] для использования в задачах метрологии предлагается развитие критерия, представленного в п. 3.3, на случай по k выборок.

В случае анализа k выборок $x_{ij},\ i=\overline{1,k},\ j=\overline{1,n_i}$, для проверки гипотезы об однородности средних статистика критерия имеет вид

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} n_i \frac{(\bar{x}_i - y)^2}{s_i^2}, \tag{3.6}$$

где $\bar{x}_i = \frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}$, $s_i^2 = \frac{1}{n_i - 1}\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij} - \bar{x}_i)^2$, $y = \left(\sum_{i=1}^{k} n_i \bar{x}_i \big/ s_i^2\right) \Bigg/ \sum_{i=1}^{k}\frac{n_i}{s_i^2}$ – взвешенное среднее по всем выборкам.

Критерий правосторонний. Асимптотическим распределением статистики (3.6) является χ^2_{k-1} -распределение.

Распределение статистики (3.6) не отличается от χ^2_{k-1} -распределения при $n_i \ge 215$. Отличием практически можно пренебречь при $n_i \ge 100$. Но при малых n_i отличие распределения статистики от асимптотического может быть существенным, особенно при большом числе k сравниваемых выборок. Этот факт следует учитывать при использовании критерия. На рис. 3.2 в качестве примера иллюстрируется отклонение реальных распределений статистики от асимптотических в случае равных объёмов выборок при $n_i = 10$ и $n_i = 100$. Как можно видеть, при малых n_i и значительном числе k сравниваемых выборок отличием реального распределения статистики от асимптотического пренебрегать нельзя. В таких ситуациях для оценки достигнутого уровня значимости или для построения реального распределения статистики можно рекомендовать использование методов статистического моделирования.

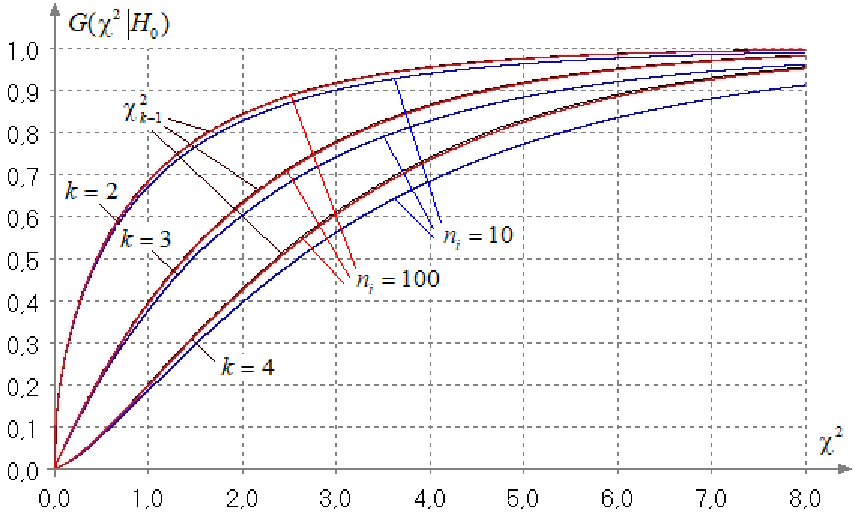

Рис. 3.2. Асимптотические и эмпирические распределения статистики (3.6) в случае справедливости гипотезы H_0 при $n_i = 10$ и $n_i = 100$ для $k = 2$ и $k = 3$

3.1.6. Об устойчивости параметрических критериев

Принадлежность выборок нормальному закону является основным предположением, обуславливающим возможность применения перечисленных выше параметрических критериев. Именно в предположении о нормальности имеют место указанные распределения статистик соответствующих критериев при справедливости проверяемой гипотезы H_0.

В то же время давно известно, что параметрические критерии, предназначенные для проверки гипотез об однородности средних анализируемых выборок, достаточно устойчивы к нарушению стандартного предположения о нормальности.

При исследовании степени устойчивости параметрических критериев в данном случае использовалась та же методика компьютерного моделирования и анализа статистических закономерностей, что и в других наших работах, например [99, 102].

Распределения статистик (3.1)–(3.3), (3.5) и (3.6) при справедливой проверяемой гипотезе H_0 исследовались для различных законов, в частности, в случае принадлежности наблюдений обобщённому нормальному закону с плотностью

$$f(x)=\frac{\theta_2}{2\theta_1\Gamma(1/\theta_2)}\exp\left\{-\left(\frac{|x-\theta_0|}{\theta_1}\right)^{\theta_2}\right\} \tag{3.7}$$

с различными значениями параметра формы θ_2. При $\theta_2=2$ выражение (3.7) дает плотность нормального закона распределения. При больших значениях θ_2 распределение (3.7) стремится к равномерному, при малых θ_2 получаем симметричные законы с «тяжелыми хвостами».

На рис. 3.3 показаны полученные в результате моделирования распределения статистики (3.1) в случае принадлежности наблюдаемых величин законам распределения семейства (3.7) при различных значениях параметра формы и в случае показательного закона с плотностью

$$f(x)=\frac{1}{\theta}\exp\left(-\frac{x}{\theta}\right).$$

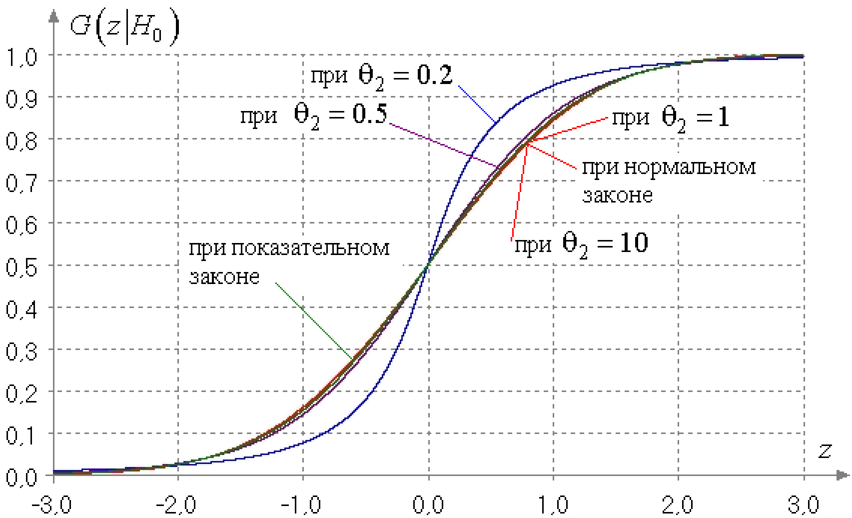

Рис. 3.3. Эмпирические распределения статистики (3.1) при различных законах распределения наблюдаемых величин и справедливости гипотезы H_0 при объемах выборок $n_1=n_2=10$

Результаты исследований позволяют сделать следующие выводы. Конечно, распределение статистики (3.1) зависит от законов, которым принадлежат анализируемые выборки. Асимметрия наблюдаемых законов приводит к отличию распределения статистики от стандартного нормального, однако это отличие не настолько велико, чтобы приводить к серьезным ошибкам при использовании критерия. В случае симметричных законов наблюдается устойчивость распределения статистики к значительным отклонениям наблюдаемых законов от нормального (вплоть до равномерного): распределения статистики существенно отличаются от стандартного нормального только в случае законов с «тяжелыми хвостами» (например, при распределении Коши или в случае распределения (3.7) при малых значениях θ_2 (см. рис. 3.2, при $\theta_2 = 0.5$ и $\theta_2 = 0.2$).

Рис. 3.4 отражает аналогичную картину зависимости распределений статистики (3.2) от законов распределения наблюдаемых величин, которая позволяет сделать идентичные выводы об устойчивости критерия Стьюдента.

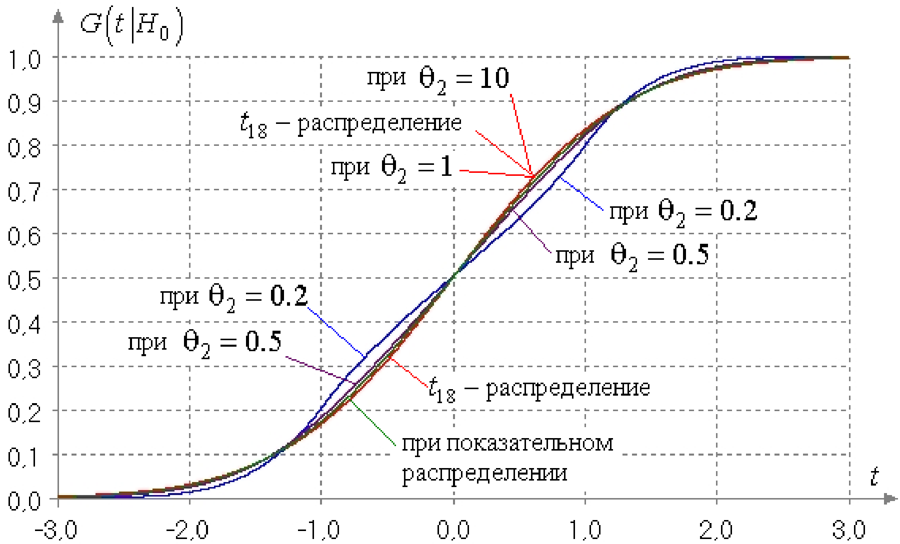

Рис. 3.4. Эмпирические распределения статистики (3.2) при различных законах распределения наблюдаемых величин и справедливости гипотезы H_0 при объемах выборок $n_1 = n_2 = 10$

С ростом объемов выборок критерий становится еще более устойчивым к отклонениям наблюдаемых законов от нормального. На рис. 3.5 показаны распределения статистики (3.2) при объемах выборок $n_1 = n_2 = 100$ в случае принадлежности выборок нормальному закону и распределениям семейства (3.7) при $\theta_2 = 0.5$ и $\theta_2 = 0.2$.

Подобным же образом от наблюдаемых законов зависят распределения статистики (3.3), используемой в критерии при неравных и неизвестных дисперсиях.

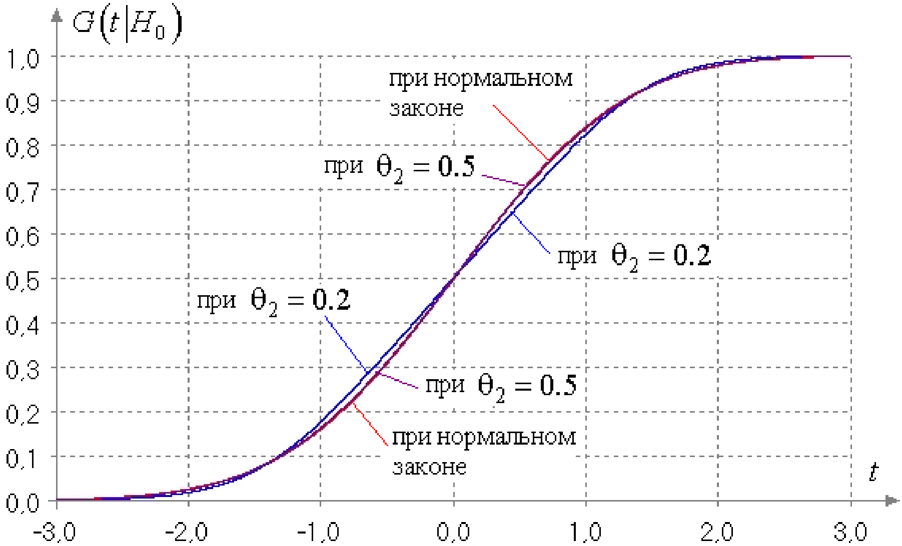

Рис. 3.5. Эмпирические распределения статистики (3.2) при различных законах распределения наблюдаемых величии и справедливости гипотезы H_0 при объемах выборок $n_1 = n_2 = 100$

Распределения статистик (3.5) и (3.6) k выборочных критериев также устойчивы к отклонениям законов, соответствующих анализируемым выборкам, от нормального.

Однако следует подчеркнуть, что применение критерия со статистикой (3.5) для проверки однородности средних предполагает примерное равенство дисперсий анализируемых выборок. При невыполнении данного условия распределения статистики $G(F|H_0)$ становятся отличными от соответствующего F_{ν_1,ν_2}-распределения. Если отношение максимальной дисперсии к минимальной соответствующих анализируемых выборок не превышает 4, то отклонение распределения статистики $G(F|H_0)$ от F_{ν_1,ν_2}-распределения Фишера не превосходит величины 0.01.

Данные результаты подтверждают общую закономерность: параметрические критерии, связанные с проверкой гипотез о математических ожиданиях, весьма устойчивы к отклонениям наблюдаемых законов от нормального. Это справедливо даже в случае многомерных случайных величин [102].

3.2. Непараметрические критерии однородности средних

Строго говоря, применение непараметрических критериев проверки гипотез о равенстве математических ожиданий предполагает, что анализируемые выборки принадлежат законам, которые могут отличаться разве что параметрами сдвига. И проверка гипотезы об однородности направлена именно на обнаружение возможного сдвига.

Нарушение данного предположения отражается на распределениях статистик критериев, имеющих место при справедливости проверяемой гипотезы H_0 о равенстве математических ожиданий. Однако на этом факте, как правило, не акцентируют внимания, так как заметные изменения распределений статистик (при справедливости H_0) проявляются при существенно (на порядок) отличающихся параметрах масштаба закона, соответствующего анализируемым выборкам.

3.2.1. Критерии Уилкоксона и Манна–Уитни.

Ранговый критерий Манна и Уитни [52, 54, 24, 10] является непараметрическим аналогом t-критерия для сравнения двух средних значений непрерывных распределений. Критерий Манна и Уитни представляет собой развитие критерия Уилкоксона [73].

Для вычисления статистики Уилкоксона две независимые выборки объединяют в одну объёмом в $n_1 + n_2$ значений и упорядочивают. По объединенной выборке определяют сумму рангов R_1, соответствующую элементам первой выборки, и сумму рангов второй R_2. Статистика критерия Уилкоксона [73] имеет вид

$$U = \min\{U_1, U_2\}, \tag{3.8}$$

где

$$U_1 = n_1 n_2 + n_1(n_1+1)/2 - R_1,$$
$$U_2 = n_1 n_2 + n_2(n_2+1)/2 - R_2.$$

Дискретные распределения U-статистики сильно зависят от размера выборок, что затрудняет применение критерия. Эту зависимость иллюстрирует рис. 3.6, на котором представлены распределения статистики $G(U|H_0)$ при различных комбинациях объёмов выборок в случае справедливости проверяемой гипотезы H_0.

В критерии Манна–Уитни (Манна–Уитни–Уилкоксона) вместо U-статистики используется нормализованная статистика

$$\tilde{z} = \frac{U - n_1 n_2/2}{\sqrt{n_1 n_2 (n_1 + n_2 + 1)/12}}. \tag{3.9}$$

Дискретное распределение статистики (3.9) в случае справедливости проверяемой гипотезы H_0 хорошо приближается стандартным нормальным законом при $n_1 + n_2 > 60$ (см. рис. 3.7), если объем каждой из выборок не слишком мал: $n_1 \geq 8$, $n_2 \geq 8$.

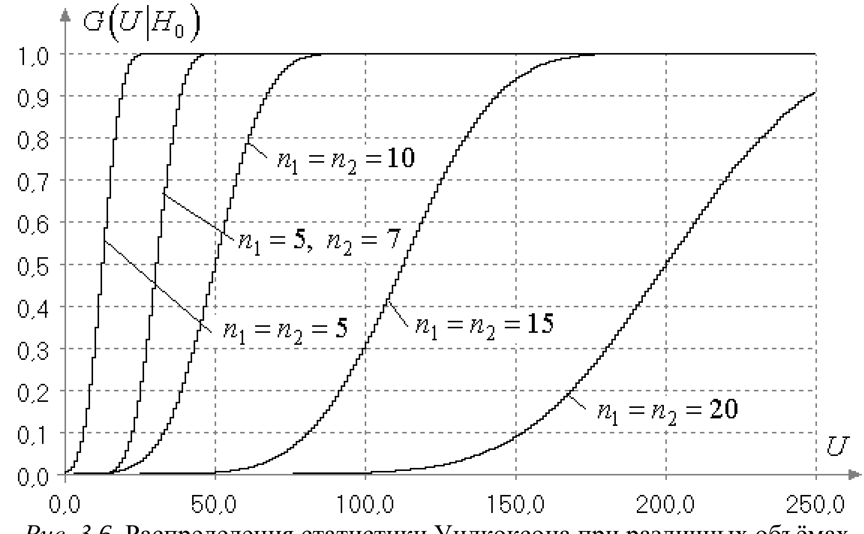

Рис. 3.6. Распределения статистики Уилкоксона при различных объёмах сравниваемых выборок

При меньших объемах выборок следует учитывать, что достигаемый уровень значимости p_{value}, вычисляемый по значению статистики $\tilde{z}$ в соответствии с функцией распределения стандартного нормального закона, может заметно отличаться от истинного.

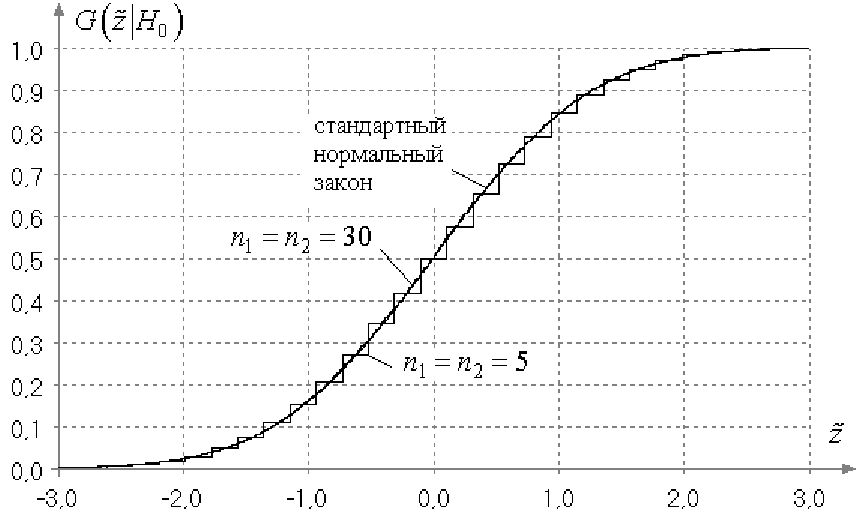

Рис. 3.7. Сходимость распределения статистики Манна–Уитни к стандартному нормальному закону

3.2.2. Критерий Краскела–Уаллиса

H-критерий Краскела–Уаллиса [27, 28] является развитием *U*-критерия для проверки гипотезы о равенстве средних по k выборкам. Объединенную выборку объёмом $n=\sum_{i=1}^{k} n_i$ упорядочивают и вычисляют суммы рангов R_i для i-й выборки, $i=\overline{1,k}$. Статистика для проверки гипотезы H_0 имеет вид

$$H=\left[\frac{12}{n(n+1)}\right]\left[\sum_{i=1}^{k}\frac{R_i^2}{n_i}\right]-3(n+1). \qquad (3.10)$$

Статистика H представляет собой дисперсию ранговых сумм. При больших n_i и k в случае справедливости проверяемой гипотезы H_0 распределение статистики хорошо аппроксимируется χ^2_{k-1}-

распределением [28]. В описаниях критерия говорится, что χ^2_{k-1}-распределением практически можно пользоваться при $n_i \geq 5,\ k \geq 4$.

Исследования показали, что на практике в случае $k = 2$ можно пренебречь дискретностью при $n_i \geq 30$ (см. рис. 3.8).

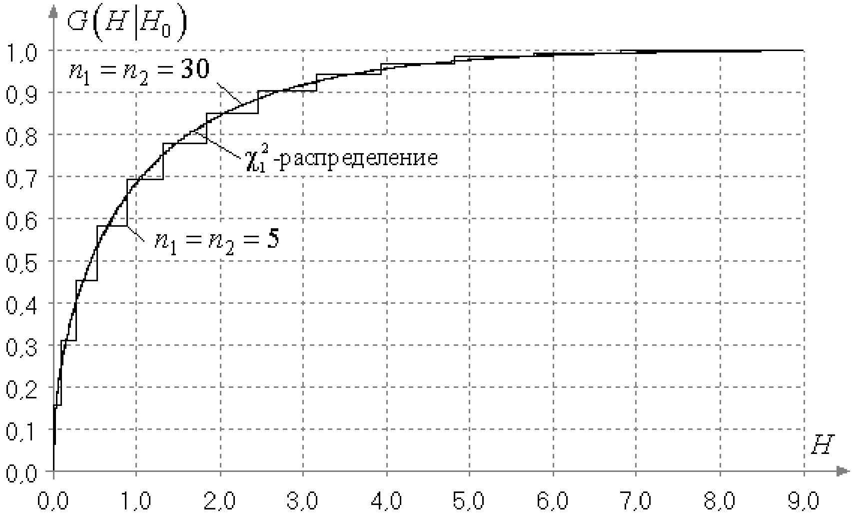

Рис. 3.8. Сходимость распределения статистики (3.10) Краскела–Уаллиса к χ^2_{k-1}-распределению при $k = 2$

С ростом числа выборок влияние дискретности быстро убывает. При $k = 3$ распределение статистики достаточно хорошо приближается χ^2_{k-1}-распределением, начиная с $n_i \geq 20$, а при $n_i \geq 30$ согласие распределения статистики с χ^2_{k-1}-распределением не отклоняется по всем применяемым критериям согласия [112, 113]. При $k \geq 5$ согласие распределения статистики с χ^2_{k-1}-распределением не отклоняется при $n_i \geq 20$.

3.2.3. Критерий Ван дер Вардена

Критерий предназначен для анализа 2-х выборок. Статистика непараметрического критерия Ван дер Вардена вычисляется в соответствии с выражением [79]:

$$V = \sum_{i=1}^{n_2} u_{R_i/(n_1+n_2+1)} \,, \tag{3.11}$$

где u_γ – γ-квантиль стандартного нормального закона, R_i, $i=\overline{1,n_2}$ – ранг i-го наблюдения, например, как в (3.11), второй выборки в общем вариационном ряду объединенной выборки из n_1+n_2 наблюдений.

Считается [82], что при $n_1, n_2 \ge 20$ распределение статистики (3.11) удовлетворительно описывается нормальным законом с нулевым математическим ожиданием и дисперсией

$$D[V] = \frac{n_1 n_2}{(n_1+n_2)(n_1+n_2-1)} \sum_{i=1}^{n_1+n_2} u^2_{i/(n_1+n_2+1)} \,.$$

Нормализованная статистика

$$V^* = \frac{V}{\sqrt{D[V]}} \tag{3.12}$$

должна подчиняться стандартному нормальному закону.

Критерий двусторонний, проверяемая гипотеза отклоняется при больших по модулю значениях статистики (3.12).

Исследование распределений статистики (3.12) методами статистического моделирования показало, что при $n_1+n_2 \ge 40$ отличием распределения $G(V^* | H_0)$ статистики (3.12) от стандартного нормального закона можно пренебречь. Величина отклонения не имеет практического значения уже при $n_1+n_2 \ge 20$. Например, на рис. 3.9 приведены распределения $G(V^* | H_0)$ статистики (3.12) при $n_1=n_2=5$ и $n_1=n_2=10$, а также функция распределения стандартного нормального закона. При $n_1=n_2=5$ хорошо заметна дискретность распределения статистики, а при $n_1=n_2=10$ распределение статистики визуально совпадает со стандартным нормальным законом.

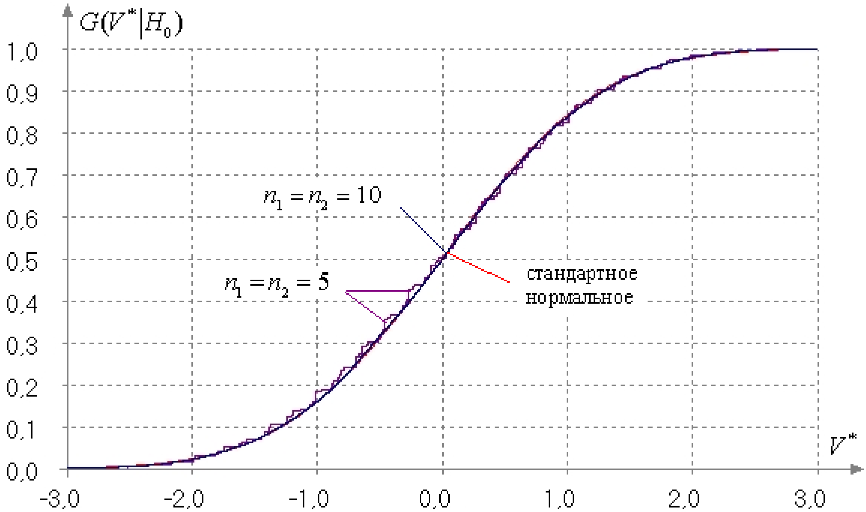

Рис. 3.9. Сходимость распределения нормализованной статистики (3.12) критерия Вандер Вардена к стандартному нормальному закону

Из непараметрических критериев однородности средних критерий Ван дер Вардена, по-видимому, является наиболее предпочтительным.

3.2.4. Критерий Фишера–Йэйтса–Терри–Гёфдинга

Этот критерий, рассмотренный в работах [16, 66, 23], очень близок к критерию Ван дер Вардена. В качестве меток в критерии выбраны математические ожидания соответствующих порядковых статистик в выборке объёмом $n = n_1 + n_2$ из стандартного нормального закона. Статистика критерия имеет вид:

$$S = \sum_{i=1}^{n_2} u_{(R_i - 3/8)/(n+1/4)}, \qquad (3.13)$$

где u_γ – γ-квантиль стандартного нормального закона, R_i, $i = \overline{1, n_2}$ – ранг i-го наблюдения, например, второй выборки в общем вариационном ряду объединенной выборки из $n_1 + n_2$ наблюдений.

Так же как и в случае критерия Ван дер Вардена, статистика (3.13) достаточно хорошо описывается нормальным законом с нулевым математическим ожиданием и дисперсией

$$D[S]=\frac{n_1 n_2}{(n_1+n_2)(n_1+n_2-1)}\sum_{i=1}^{n_1+n_2} u^2_{(i-3/8)/(n_1+n_2+1/4)},$$

а нормализованная статистика

$$S^*=\frac{S}{\sqrt{D[S]}} \qquad (3.14)$$

– стандартным нормальным законом.

По своим свойствам и мощности критерий со статистикой (3.14) эквивалентен критерию Ван дер Вардена.

3.2.5. Многовыборочный критерий Ван дер Вардена

Статистика критерия Ван дер Вардена для проверки гипотезы о равенстве средних по k выборкам имеет вид

$$T=(n-1)\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{n_i}\left(\sum_{j=1}^{n_i} u_{R_{ij}/(n+1)}\right)^2 \Bigg/ \sum_{i=1}^{n} u^2_{i/(n+1)}, \qquad (3.15)$$

где $n=\sum_{i=1}^{k} n_i$, u_γ – γ-квантиль стандартного нормального закона, R_{ij}, $j=\overline{1,n_i}$, – ранг j-го элемента i-й выборки в вариационном ряду объединённой выборки объёма n.

При справедливости проверяемой гипотезы H_0 статистика (3.15) хорошо описывается χ^2_{k-1}-распределением. Отклонением распределения статистики от χ^2_{k-1}-распределения можно пренебречь при $n_i>30$.

При $n_i=10$ в интервале значений функции распределения статистики от 0.9 до 1 функция χ^2_{k-1}-распределения максимально отклоняется от реального распределения статистики в сторону меньших значений на величину порядка 0.005. То есть на такую величину может быть завышен достигнутый уровень значимости p_{value}, вычисляемый по χ^2_{k-1}-распределению.

k-выборочный критерий Ван дер Вардена демонстрирует более высокую мощность по сравнению с критерием Краскела–Уаллиса.

3.3. Сравнительный анализ мощности критериев

Большая часть рассмотренных в руководстве критериев проверки гипотез об однородности средних предназначены для анализа двух выборок.

Мощность исследуемых критериев сравнивалась при одинаковых дисперсиях анализируемых выборок относительно следующих конкурирующих гипотез H_1^1: $\mu_2 = \mu_1 + 0.1\sigma$; H_1^2: $\mu_2 = \mu_1 + 0.2\sigma$; H_1^3: $\mu_2 = \mu_1 + 0.3\sigma$; H_1^4: $\mu_2 = \mu_1 + 0.4\sigma$; H_1^5: $\mu_2 = \mu_1 + 0.5\sigma$; H_1^6: $\mu_2 = \mu_1 + \sigma$.

Естественно, что на результатах сравнительного анализа в определённой степени отразилась существенная дискретность распределений статистик некоторых непараметрических критериев. Например, на рис. 3.10 приведены распределения $\tilde{z}$-статистики (3.8) критерия Манна–Уитни при справедливости проверяемой $G\left(\tilde{z}\middle|H_0\right)$ и конкурирующих гипотез $G\left(\tilde{z}\middle|H_1^i\right)$ при объемах выборок $n_1 = n_2 = 10$. Рисунок, с одной стороны, позволяет судить о мощности критерия относительно рассматриваемых альтернатив, а с другой – демонстрирует дискретность распределений статистики, которую следует учитывать, применяя критерии и анализируя их мощность.

Вычисленные на основании результатов моделирования оценки мощности $1-\beta$ критериев, где β – вероятность ошибки второго рода, для различных значений уровня значимости α (вероятностей ошибок первого рода) и при одинаковых объемах сравниваемых выборок $n_i = n$ представлены в табл. 3.2–3.7. Критерии в таблицах упорядочены по мощности. Выборки распределений статистик моделировались объемом $N = 10^6$, что позволило оценивать значения мощности с погрешностью в пределах $\pm 10^{-3}$.

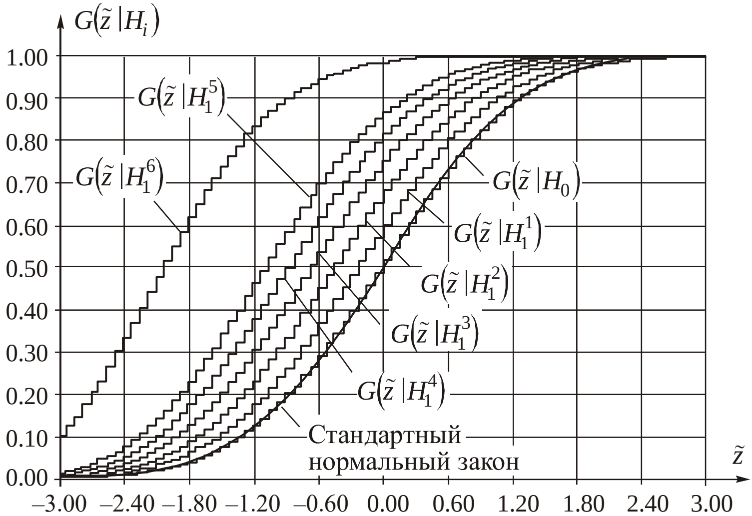

Рис. 3.10. Эмпирические распределения статистики (3.8) Манна–Уитни при справедливости различных конкурирующих гипотез при объемах выборок $n_1 = n_2 = 10$

Какие выводы можно сделать на основе результатов, представленных в таблицах? Во-первых, очевидно, что параметрические критерии обладают несколько большей мощностью по сравнению с непараметрическими, но это преимущество весьма незначительно.

t-критерий Стьюдента со статистикой (3.2) слегка уступает в мощности z-критерию со статистикой (3.1) при известных дисперсиях. В рассматриваемой ситуации равенства дисперсий критерий со статистикой (3.3) эквивалентен критерию со статистикой (3.2) и имеет ту же мощность.

F-критерий эквивалентен k-выборочному критерию Стьюдента. Можно полагать, что в случае анализа 2-х выборок оба они эквивалентны критерию со статистикой (3.3), применяемому при неравных и неизвестных дисперсиях.

Следует отметить, что непараметрические критерии Ван дер Вардена практически не уступают в мощности параметрическому F-критерию.

Таблица 3.2

Мощность критериев относительно $H_1^1:\ \mu_2 = \mu_1 + 0.1\sigma$

z -критерий при известных дисперсиях					
α	$n = 10$	$n = 20$	$n = 30$	$n = 50$	$n = 100$
0.1	0.108	0.117	0.126	0.142	0.184
0.05	0.056	0.61	0.068	0.079	0.109
0.01	0.012	0.014	0.016	0.020	0.032
t -критерий Стьюдента при неизвестных и равных дисперсиях					
0.1	0.108	0.117	0.126	0.141	0.183
0.05	0.055	0.061	0.067	0.078	0.108
0.01	0.012	0.013	0.016	0.020	0.031
t -критерий Стьюдента при неизвестных и неравных дисперсиях					
0.1	0.108	0.117	0.126	0.141	0.183
0.05	0.055	0.061	0.067	0.078	0.108
0.01	0.012	0.013	0.016	0.020	0.031
F-критерий, Стьюдента k-выборочный					
0.1	0.108	0.116	0.125	0.141	0.183
0.05	0.055	0.060	0.067	0.078	0.108
0.01	0.012	0.013	0.015	0.020	0.031
Критерий Ван дер Вардена					
0.1	0.108	0.116	0.125	0.141	0.183
0.05	0.055	0.061	0.067	0.078	0.108
0.01	0.012	0.013	0.015	0.020	0.031
Многовыборочный критерий Ван дер Вардена					
0.1	0.108	0.116	0.125	0.141	0.182
0.05	0.055	0.060	0.067	0.078	0.107
0.01	0.012	0.013	0.015	0.020	0.031
H-критерий Краскела–Уаллиса					
0.1	0.113	0.118	0.126	0.140	0.179
0.05	0.057	0.063	0.066	0.077	0.105
0.01	0.013	0.014	0.015	0.019	0.030
$\tilde{z}$ -критерий Манна–Уитни					
0.1	0.102	0.113	0.124	0.138	0.179
0.05	0.051	0.060	0.066	0.076	0.105
0.01	0.011	0.013	0.015	0.019	0.030

Таблица 3.3

Мощность критериев относительно $H_1^2: \mu_2 = \mu_1 + 0.2\sigma$

z -критерий при известных дисперсиях					
α	n = 10	n = 20	n = 30	n = 50	n = 100
0.1	0.133	0.167	0.200	0.263	0.411
0.05	0.073	0.097	0.122	0.170	0.293
0.01	0.018	0.027	0.036	0.058	0.125
t -критерий Стьюдента при неизвестных и равных дисперсиях					
0.1	0.131	0.166	0.198	0.261	0.408
0.05	0.071	0.095	0.119	0.167	0.291
0.01	0.017	0.025	0.035	0.056	0.122
t -критерий Стьюдента при неизвестных и неравных дисперсиях					
0.1	0.131	0.166	0.198	0.261	0.408
0.05	0.071	0.095	0.119	0.167	0.291
0.01	0.017	0.025	0.035	0.056	0.122
F-критерий, Стьюдента k-выборочный					
0.1	0.131	0.165	0.198	0.261	0.408
0.05	0.071	0.094	0.119	0.168	0.290
0.01	0.016	0.025	0.035	0.056	0.121
Критерий Ван дер Вардена					
0.1	0.130	0.163	0.197	0.259	0.407
0.05	0.070	0.093	0.118	0.166	0.289
0.01	0.016	0.025	0.034	0.056	0.120
Многовыборочный критерий Ван дер Вардена					
0.1	0.129	0.163	0.196	0.259	0.406
0.05	0.070	0.093	0.118	0.166	0.288
0.01	0.016	0.025	0.034	0.056	0.120
H-критерий Краскела–Уаллиса					
0.1	0.136	0.164	0.196	0.254	0.395
0.05	0.073	0.096	0.115	0.162	0.279
0.01	0.019	0.025	0.033	0.054	0.114
$\tilde{z}$ -критерий Манна–Уитни					
0.1	0.121	0.158	0.192	0.252	0.395
0.05	0.063	0.091	0.115	0.161	0.279
0.01	0.015	0.023	0.033	0.053	0.114

Таблица 3.4

Мощность критериев относительно $H_1^3: \mu_2 = \mu_1 + 0.3\sigma$

z -критерий при известных дисперсиях					
α	n = 10	n = 20	n = 30	n = 50	n = 100
0.1	0.175	0.249	0.317	0.443	0.683
0.05	0.103	0.158	0.214	0.323	0.563
0.01	0.029	0.053	0.079	0.142	0.328
t -критерий Стьюдента при неизвестных и равных дисперсиях					
0.1	0.169	0.244	0.314	0.439	0.680
0.05	0.097	0.153	0.208	0.317	0.559
0.01	0.026	0.048	0.075	0.137	0.321
t -критерий Стьюдента при неизвестных и неравных дисперсиях					
0.1	0.169	0.244	0.314	0.439	0.680
0.05	0.097	0.153	0.208	0.317	0.559
0.01	0.026	0.048	0.075	0.137	0.321
F-критерий, Стьюдента k-выборочный					
0.1	0.169	0.243	0.313	0.439	0.680
0.05	0.097	0.152	0.208	0.317	0.558
0.01	0.025	0.047	0.074	0.136	0.320
Критерий Ван дер Вардена					
0.1	0.167	0.240	0.309	0.435	0.678
0.05	0.095	0.150	0.205	0.314	0.556
0.01	0.025	0.047	0.073	0.135	0.318
Многовыборочный критерий Ван дер Вардена					
0.1	0.167	0.239	0.309	0.435	0.677
0.05	0.095	0.149	0.205	0.314	0.555
0.01	0.025	0.047	0.073	0.134	0.317
H-критерий Краскела–Уаллиса					
0.1	0.173	0.239	0.307	0.425	0.662
0.05	0.099	0.152	0.199	0.306	0.539
0.01	0.028	0.047	0.071	0.130	0.302
$\tilde{z}$ -критерий Манна–Уитни					
0.1	0.154	0.231	0.302	0.422	0.662
0.05	0.086	0.145	0.199	0.303	0.539
0.01	0.023	0.044	0.071	0.128	0.302

Таблица 3.5

Мощность критериев относительно $H_1^3: \mu_2 = \mu_1 + 0.4\sigma$

z -критерий при известных дисперсиях					
α	n = 10	n = 20	n = 30	n = 50	n = 100
0.1	0.232	0.355	0.462	0.638	0.881
0.05	0.146	0.246	0.342	0.516	0.806
0.01	0.047	0.096	0.153	0.283	0.603
t -критерий Стьюдента при неизвестных и равных дисперсиях					
0.1	0.222	0.348	0.456	0.633	0.879
0.05	0.135	0.235	0.332	0.507	0.803
0.01	0.040	0.087	0.144	0.272	0.592
t -критерий Стьюдента при неизвестных и неравных дисперсиях					
0.1	0.222	0.348	0.456	0.633	0.879
0.05	0.135	0.235	0.332	0.507	0.803
0.01	0.040	0.087	0.144	0.272	0.592
F-критерий, Стьюдента k-выборочный					
0.1	0.222	0.346	0.455	0.633	0.879
0.05	0.135	0.234	0.332	0.508	0.802
0.01	0.040	0.086	0.143	0.271	0.591
Критерий Ван дер Вардена					
0.1	0.218	0.339	0.449	0.628	0.877
0.05	0.132	0.228	0.328	0.503	0.800
0.01	0.039	0.083	0.140	0.269	0.588
Многовыборочный критерий Ван дер Вардена					
0.1	0.217	0.340	0.449	0.628	0.877
0.05	0.131	0.229	0.327	0.503	0.799
0.01	0.038	0.083	0.140	0.268	0.587
H-критерий Краскела–Уаллиса					
0.1	0.224	0.338	0.445	0.616	0.865
0.05	0.136	0.231	0.317	0.490	0.784
0.01	0.043	0.083	0.135	0.259	0.565
$\tilde{z}$ -критерий Манна–Уитни					
0.1	0.201	0.327	0.439	0.613	0.865
0.05	0.118	0.223	0.317	0.487	0.784
0.01	0.035	0.079	0.135	0.256	0.565

Таблица 3.6

Мощность критериев относительно $H_1^5:\ \mu_2 = \mu_1 + 0.5\sigma$

z -критерий при известных дисперсиях					
α	n = 10	n = 20	n = 30	n = 50	n = 100
0.1	0.301	0.477	0.615	0.803	0.971
0.05	0.201	0.354	0.492	0.706	0.942
0.01	0.073	0.162	0.262	0.470	0.833
t -критерий Стьюдента при неизвестных и равных дисперсиях					
0.1	0.287	0.466	0.607	0.799	0.970
0.05	0.185	0.339	0.478	0.696	0.940
0.01	0.060	0.145	0.246	0.455	0.825
t -критерий Стьюдента при неизвестных и неравных дисперсиях					
0.1	0.287	0.466	0.607	0.799	0.970
0.05	0.185	0.339	0.478	0.696	0.940
0.01	0.060	0.145	0.246	0.455	0.825
F-критерий, Стьюдента k-выборочный					
0.1	0.287	0.464	0.606	0.799	0.970
0.05	0.184	0.338	0.477	0.697	0.940
0.01	0.060	0.144	0.245	0.453	0.824
Критерий Ван дер Вардена					
0.1	0.280	0.457	0.600	0.795	0.969
0.05	0.179	0.333	0.471	0.691	0.938
0.01	0.058	0.141	0.239	0.449	0.821
Многовыборочный критерий Ван дер Вардена					
0.1	0.280	0.456	0.599	0.794	0.969
0.05	0.179	0.330	0.471	0.691	0.938
0.01	0.058	0.140	0.239	0.448	0.821
H-критерий Краскела–Уаллиса					
0.1	0.286	0.452	0.592	0.781	0.963
0.05	0.184	0.331	0.457	0.679	0.930
0.01	0.064	0.139	0.231	0.434	0.802
$\tilde{z}$ -критерий Манна–Уитни					
0.1	0.259	0.441	0.586	0.779	0.963
0.05	0.162	0.321	0.457	0.674	0.930
0.01	0.053	0.132	0.231	0.431	0.802

Таблица 3.7

Мощность критериев относительно $H_1^6:\ \mu_2 = \mu_1 + \sigma$

z -критерий при известных дисперсиях					
α	n = 10	n = 20	n = 30	n = 50	n = 100
0.1	0.722	0.935	0.987	1.000	1.000
0.05	0.608	0.886	0.972	0.999	1.000
0.01	0.367	0.724	0.903	0.992	1.000
t -критерий Стьюдента при неизвестных и равных дисперсиях					
0.1	0.693	0.928	0.985	1.000	1.000
0.05	0.561	0.869	0.968	0.999	1.000
0.01	0.294	0.675	0.883	0.990	1.000
t -критерий Стьюдента при неизвестных и неравных дисперсиях					
0.1	0.693	0.928	0.985	1.000	1.000
0.05	0.561	0.869	0.968	0.999	1.000
0.01	0.294	0.675	0.883	0.990	1.000
F-критерий, Стьюдента k-выборочный					
0.1	0.692	0.927	0.985	1.000	1.000
0.05	0.560	0.868	0.967	0.999	1.000
0.01	0.293	0.672	0.882	0.990	1.000
Критерий Ван дер Вардена					
0.1	0.677	0.922	0.984	0.999	1.000
0.05	0.544	0.859	0.965	0.998	1.000
0.01	0.281	0.657	0.876	0.990	1.000
Многовыборочный критерий Ван дер Вардена					
0.1	0.676	0.921	0.984	0.999	1.000
0.05	0.543	0.859	0.965	0.998	1.000
0.01	0.280	0.659	0.875	0.990	1.000
H-критерий Краскела–Уаллиса					
0.1	0.680	0.917	0.982	0.999	1.000
0.05	0.548	0.855	0.960	0.998	1.000
0.01	0.297	0.652	0.864	0.987	1.000
$\tilde{z}$ -критерий Манна–Уитни					
0.1	0.645	0.912	0.981	0.999	1.000
0.05	0.512	0.849	0.960	0.998	1.000
0.01	0.264	0.640	0.864	0.987	1.000

В случае анализа 2-х выборок ранговые $\tilde{z}$ -критерий Манна–Уитни и H -критерий Краскела–Уаллиса асимптотически эквивалентны и слегка уступают в мощности критериям Ван дер Вардена и чуть больше – параметрическим критериям.

Некоторый разнобой в оценках мощности $\tilde{z}$-критерия Манна–Уитни и H -критерия Краскела–Уаллиса, отраженный в таблицах, является следствием дискретности распределений этих статистик. Из-за дискретности действительные уровни значимости для этих критериев отличаются от заданных в таблице значений α и несколько превышают их. Этим же объясняется «преимущество» в некоторых случаях H -критерия Краскела–Уаллиса перед параметрическими критериями.

В таблицах 3.8 – 3.9 представлены оценки мощности k-выборочных критериев при $k = 3, 5$ относительно конкурирующих гипотез, при которых $k-1$ выборке соответствовало математическое ожидание μ, а k-й выборке – $\mu + 0.2\sigma$ и $\mu + 0.5\sigma$ (при одинаковых объемах сравниваемых выборок $n_i = n$). Можно заметить, что с ростом числа сравниваемых выборок k-выборочный критерий Стьюдента начинает уступать не только F-критерию, но и критерию Ван дер Вардена.

Таблица 3.8

Мощность критериев относительно H_1^2 : $\mu_k = \mu_1 + 0.2\sigma$

Критерий	α	$k = 3$		$k = 5$	
		$n = 30$	$n = 50$	$n = 30$	$n = 50$
F-критерий	0.1	0.191	0.254	0.175	0.232
	0.05	0.112	0.160	0.101	0.142
	0.01	0.031	0.052	0.026	0.043
Стьюдента k-выборочный	0.1	0.190	0.253	0.174	0.230
	0.05	0.112	0.159	0.099	0.140
	0.01	0.031	0.052	0.026	0.042
Многовыборочный критерий Ван дер Вардена	0.1	0.190	0.252	0.174	0.231
	0.05	0.111	0.159	0.100	0.141
	0.01	0.031	0.051	0.026	0.043
H-критерий Краскела–Уаллиса	0.1	0.187	0.247	0.172	0.225
	0.05	0.109	0.155	0.098	0.137
	0.01	0.030	0.049	0.025	0.041

Аналогично, возрастает преимущество в мощности критерия Ван дер Вардена по сравнению с критерием Краскела–Уаллиса.

На практике, применяя рассматриваемые критерии для проверки гипотезы об однородности математических ожиданий обычно задаются только вероятностью α ошибки первого рода. Процедуры контроля предусматривают чаще всего небольшие объемы выборок. Как правило, не заходит речи о вероятности β ошибки второго рода: не отклонить проверяемую гипотезу при справедливости конкурирующей. В то же время в процедуре контроля при задании α желательно гарантировать величину $\beta \le \alpha$.

Таблица 3.9

Мощность критериев относительно H_1^5 : $\mu_k = \mu_1 + 0.5\sigma$

Критерий	α	$k = 3$		$k = 5$	
		$n = 30$	$n = 50$	$n = 30$	$n = 50$
F-критерий	0.1	0.618	0.823	0.585	0.807
	0.05	0.488	0.727	0.454	0.705
	0.01	0.252	0.491	0.226	0.468
Стьюдента k-выборочный	0.1	0.613	0.820	0.573	0.799
	0.05	0.482	0.723	0.439	0.694
	0.01	0.247	0.485	0.214	0.451
Многовыборочный критерий Ван дер Вардена	0.1	0.612	0.819	0.581	0.804
	0.05	0.482	0.723	0.449	0.701
	0.01	0.248	0.487	0.223	0.463
H-критерий Краскела–Уаллиса	0.1	0.598	0.806	0.564	0.786
	0.05	0.468	0.706	0.431	0.680
	0.01	0.238	0.467	0.208	0.437

В данном случае по результатам анализа мощности мы видим, что при конкурирующей гипотезе H_1^1 для $\alpha = 0.1$ и объемах выборок $n = 100$ вероятность ошибки второго рода составит величину $\beta = 1 - 0.184 = 0.816$ для z-критерия со статистикой (3.1). При $\alpha = 0.1$ и объемах выборок $n = 100$ данный критерий обеспечит величину $\beta = 0.119$ для более далекой альтернативы H_1^4, и величину $\beta = 0.029 < 0.1$ относительно H_1^5. А чтобы с заданным качеством различать гипотезы H_0 и H_1^1, необходимо иметь выборки объемом порядка 1625 наблюдений!

Какие конкурирующие гипотезы можно с таким же качеством (при $\alpha \le 0.1$ и $\beta \le 0.1$) различать по выборкам объемом $n = 10$? Альтернативы, когда μ_2 отличается от μ_1 на величину не менее чем 1.28σ! При $n = 20$, когда μ_2 отличается от μ_1 на величину примерно 0.9σ, при $n = 30$ – примерно 0.74σ, при $n = 50$ – приблизительно 0.555σ, при $n = 100$ – на 0.41σ.

3.4. Выводы по разделу

Таким образом, исследования подтвердили устойчивость параметрических критериев проверки однородности математических ожиданий. Это означает, что если закон распределения, которому соответствуют анализируемые выборки, отличается от нормального, но нет оснований полагать, что наблюдаемые величины принадлежат законам с «тяжелыми хвостами», то применение параметрических критериев со статистиками остается корректным. По крайней мере, такая ситуация не приводит к существенным погрешностям при оценке достигнутого уровня значимости.

Если дисперсии анализируемых выборок неизвестны и, возможно, различны, лучше воспользоваться критерием со статистикой (3.3), так как при малых объемах выборок распределение статистики (3.2) будет существенно отличаться от $t_{n_1+n_2-2}$-распределения Стьюдента.

При $n_1 + n_2 > 200$ для всех критериев со статистиками (3.1) – (3.3) в качестве распределений статистик можно использовать стандартный нормальный закон.

Двухвыборочный критерий Ван дер Вардена является лучшей непарамерической заменой критериям со статистиками (3.2) и (3.3). так как практически не уступает им по мощности.

Недостатком $\tilde{z}$-критерия Манна–Уитни является существенная дискретность распределения статистики, что отражается на точности оценок p_{value}. Это же замечание относится и к H-критерию Краскела–Уаллиса. В то же время оба эти критерия не столь уж сильно уступают в мощности критериям со статистиками (3.1) – (3.3).

Можно сделать аналогичные выводы об устойчивости k-выборочных параметрических критериев со статистиками (3.5) и (3.6).

Применение k-выборочного F-критерия проверки однородности математических ожиданий целесообразно, если есть основание полагать, что дисперсии, соответствующие выборкам, примерно одинаковы. В противном случае от него следует отказаться и воспользоваться многовыборочным критерием Ван дер Вардена, обладающим практически той же мощностью, или критерием Краскела–Уаллиса, который немного уступает F-критерию по мощности.

При использовании k-выборочного варианта критерия Стьюдента со статистикой (3.6) следует учитывать, что при малых объёмах анализируемых выборок распределение её статистики при справедливости H_0 может заметно отличаться от асимптотического χ^2_{k-1}-распределения, а с ростом k-исчезает его преимущество в мощности по сравнению с критерием Ван дер Вардена. Для обеспечения корректности выводов по k-выборочному критерию Стьюдента при малых объёмах выборок для оценки p_{value} можно рекомендовать использование статистического моделирование.

Напомним, что распределения статистик непараметрических критериев однородности средних при справедливости проверяемой гипотезы H_0 не зависят от вида закона, которому принадлежат выборки, если все они принадлежат одному виду закона. Но если при справедливости H_0 это разные законы, то распределение статистик всё-таки меняется.

В качестве примера, подтверждающего этот факт, на рис. 3.11 приведены распределения статистики многовыборочного критерия Ван дер Вардена, соответствующие двум ситуациям: в первом случае все анализируемые выборки принадлежали одному и тому же закону, во втором – обобщённому нормальному закону (3.7) с различными значениями параметра формы θ_2 (0.5, 2 и 6). Как видим, распределения статистики критерия в этих ситуациях существенно различаются.

В подобной ситуации распределения статистики H-критерия Краскела–Уаллиса демонстрируют аналогичную зависимость, но она проявляется в меньшей степени.

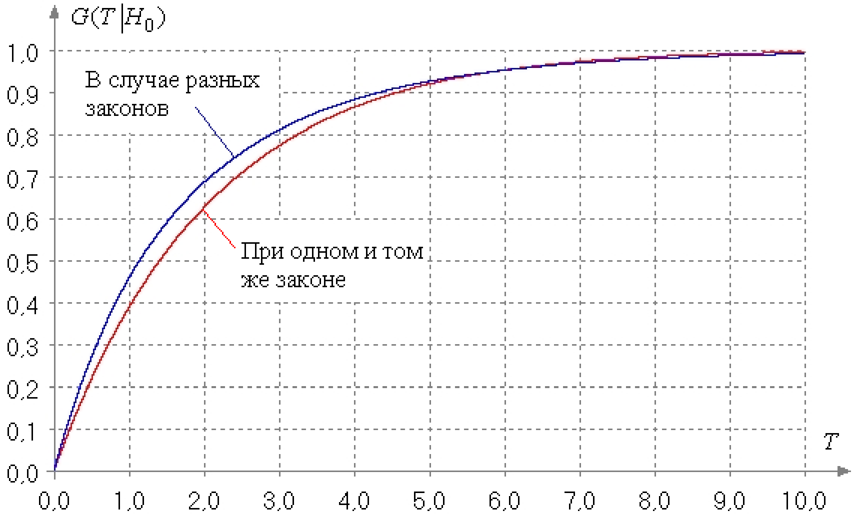

Рис. 3.11. Эмпирические распределения статистики многовыборочного критерия Ван дер Вардена при $k = 3$ и объемах выборок $n_i = 20$

Заметим, что предположение о принадлежности анализируемых выборок одному и тому же виду закона имеет место и для непараметрических критериев, используемых при проверке гипотез об однородности дисперсий (см. п. 4.3)

4. КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ ОДНОРОДНОСТИ ДИСПЕРСИЙ

Применение классических критериев проверки однородности дисперсий всегда сопряжено с вопросом: насколько полученные выводы корректны в данной конкретной ситуации? Дело в том, что одним из основных предположений при построении этих критериев является принадлежность наблюдаемых случайных величин (погрешностей измерений) нормальному закону распределения. При этом давно известно, что параметрические критерии однородности дисперсий чрезвычайно чувствительны к малейшим отклонениям наблюдаемых случайных величин от нормального закона. При нарушении данного предположения условные распределения статистик критериев при справедливости проверяемой гипотезы, как правило, сильно изменяются. Так как погрешности измерительных приборов или наблюдаемые в различных приложениях величины далеко не всегда подчиняются нормальному закону, то применение классических результатов в таких условиях может приводить к неверным выводам.

В связи с этим вызывает интерес поведение критериев проверки однородности дисперсий (характеристик рассеяния) при определенных отклонениях закона распределения результатов измерений (контролируемого показателя) от нормального. Возможно ли применение какой-то части имеющихся параметрических критериев при определённых нарушениях предположения о нормальности? Каким образом обеспечить возможность корректного применения множества классических критериев в условиях нарушения стандартных предположений?

Пока нет четкого ответа, как соотносятся мощности различных параметрических критериев по отношению к конкретным конкурирующим гипотезам, не ясно, насколько уступают им по мощности непараметрические критерии проверки гипотез о равенстве характеристик рассеяния (параметров масштаба).

Материал данного раздела опирается на работы [95, 96, 40, 41, 42, 43, 44, 18], в которых продолжены исследования устойчивости критериев проверки гипотез о равенстве дисперсий [101, 35, 104]. Сравниваются классические критерии Бартлетта [2], Кокрена [8], Фишера, Хартли [21], Левене [48], рассматриваются непараметрические (ранговые) критерии Ансари–Бредли [1], Муда [55], Сижела–Тьюки [64], Кейпена [6] и Клотца [26].

Цель работ по исследованию параметрических критериев [95, 40, 18] заключалась в следующем. Во-первых, в исследовании распределений статистик перечисленных критериев при законах распределения наблюдаемых случайных величин, отличных от нормального закона. Во-вторых, в сравнительном анализе мощности критериев относительно конкретных конкурирующих гипотез. В-третьих, в реализации возможности применения классических критериев в условиях нарушения предположений о нормальности случайных величин. В-четвертых, в выработке рекомендаций по применению критериев в реальных приложениях.

Перечисленные непараметрические критерии предназначены для проверки гипотез об однородности параметров масштаба законов, соответствующих анализируемым выборкам. Как правило, характеристики рассеяния и, следовательно, стандартное отклонение σ пропорциональны параметру масштаба закона. Поэтому рассматриваемые критерии можно считать непараметрическими аналогами критериев однородности дисперсий. Сравнительному анализу мощности и исследованию распределений статистик непараметрических критериев посвящена работа [96].

Очень важно иметь в виду, что корректность применения непараметрических критериев обусловлена не менее жесткими предположениями. Во-первых, предполагается, что анализируемые выборки принадлежат одному и тому же закону распределения [80]. В противном случае даже при справедливости проверяемой гипотезы H_0 о равенстве дисперсий распределения статистик этих критериев будут отличаться от имеющих место при выполнении данного предположения [96]. Во-вторых, предполагается равенство математических ожиданий [80]. Следовательно, прежде чем применять некоторый непараметрический критерий для проверки гипотезы об однородности дисперсий выборки должны быть соответствующим образом преобразованы.

В критериях проверки однородности дисперсий проверяемая гипотеза о постоянстве дисперсий k выборок имеет вид

$$H_0\colon \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \ldots = \sigma_k^2, \tag{4.1}$$

а конкурирующая с ней гипотеза

$$H_1\colon \sigma_{i_1}^2 \neq \sigma_{i_2}^2\,, \tag{4.2}$$

где неравенство выполняется, по крайней мере, для одной пары индексов i_1, i_2.

При исследовании распределений статистик, построении для этих распределений процентных точек и оценке мощности критериев относительно различных конкурирующих гипотез использовались методика статистического моделирования [105] и развиваемая на базе [89] программная система ISW (Интервальная статистика под Windows) [111]. При этом объем моделируемых выборок исследуемых статистик составлял величину $N = 10^6$. При таких N разность между истинным законом распределения статистики и смоделированным эмпирическим по модулю не превышает величины 10^{-3}.

Исследования распределений статистик проводились при различных наблюдаемых законах, в частности в случае принадлежности моделируемых выборок семейству с плотностью

$$De(\theta_2) = f\left(x;\theta_0,\theta_1,\theta_2\right) = \frac{\theta_2}{2\theta_1\Gamma(1/\theta_2)}\exp\left(-\left(\frac{|x-\theta_0|}{\theta_1}\right)^{\theta_2}\right) \tag{4.3}$$

при различных значениях параметра формы θ_2. Это семейство может быть хорошей моделью для законов распределения погрешностей различных измерительных систем. Распределение $\mathrm{De}(\theta_2)$ включает в качестве частных случаев распределение Лапласа $(\theta_2 = 1)$ и нормальное $(\theta_2 = 2)$. Семейство (4.3) позволяет задавать различные симметричные законы распределения, в той или иной мере отличающиеся от нормального: чем меньше значение параметра формы θ_2, тем «тяжелее» хвосты распределения $\mathrm{De}(\theta_2)$, чем больше параметр, тем хвосты «легче».

При сравнительном анализе мощности критериев рассматривались следующие конкурирующие гипотезы: $H_1\colon \sigma_k = 1.1\sigma_0$; $H_2\colon \sigma_k = 1.2\sigma_0$; $H_3\colon \sigma_k = 1.5\sigma_0$. Таким образом, конкурирующей гипотезе соответствует ситуация, когда $m-1$ выборка принадлежат закону с некоторым $\sigma = \sigma_0$, в то время как одна из выборок, например с номером m, имеет некоторую отличную дисперсию. Проверяемой гипотезе соответствует ситуация H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \ldots = \sigma_k^2 = \sigma_0^2$.

4.1. Параметрические критерии однородности дисперсий

4.1.1. Критерий Бартлетта

Статистика критерия Бартлетта [77] вычисляется в соответствии с соотношением

$$\chi^2 = M\left[1 + \frac{1}{3(k-1)}\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{\nu_i} - \frac{1}{N}\right)\right]^{-1}, \tag{4.4}$$

где

$$M = N\ln\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k}\nu_i S_i^2\right) - \sum_{i=1}^{k}\nu_i \ln S_i^2 \ ;$$

k – количество выборок; n_i – объемы выборок; $\nu_i = n_i$, если математическое ожидание известно, и $\nu_i = n_i - 1$, если не известно; $N = \sum_{i=1}^{k}\nu_i$; S_i^2 – оценки выборочных дисперсий. При неизвестном математическом ожидании оценки $S_i^2 = \frac{1}{n_i - 1}\sum_{j=1}^{n_i}\left(X_{ji} - \overline{X}_i\right)^2$, $\overline{X}_i = \frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i} X_{ji}$, где X_{ij} – j-е наблюдение в i-й выборке.

Если гипотеза H_0 верна, все $\nu_i > 3$ и выборки извлекаются из нормальной генеральной совокупности, то статистика (4.4) приближенно подчиняется χ_{k-1}^2-распределению. Если вычисленное значение статистики $\chi^{2*} > \chi_{1-\alpha,k-1}^2$, то проверяемая гипотеза отклоняется на заданном уровне значимости α.

При нормально распределенных результатах измерений распределение статистики (4.4) практически не зависит от изменения объемов выборок [101, 35]. При малых величинах ν_i можно воспользоваться таблицей процентных точек для критерия Бартлетта, приводимой в [77]. Использование этой таблицы несколько затруднительно.

В более удобной таблице **А.7** приложения представлены критические значения статистики критерия Бартлетта, полученные методами статистического моделирования при числе экспериментов 6×10^6 для числа анализируемых выборок $k = 2 \div 6$ при равных объемах выборок $n_i = n$.

Если при малых объёмах выборок для оценки достигнутого уровня значимости p_{value} мы будем использовать предельное χ^2_{k-1}-распределение, то о величине погрешности оценки p_{value} можно судить по величине отклонения реального распределения статистики $G\left(\chi^2 \middle| H_0\right)$ от χ^2_{k-1}-распределения в критических точках χ^2_{k-1}-распределения, соответствующих значениях $1-\alpha$, равным 0.9 и 0.95. Оценки отклонения $\Delta = G\left(\chi^2_{1-\alpha,k-1} \middle| H_0\right) - (1-\alpha)$ при равных $n_i = 10, 20, 30$ приведены в таблице 4.1.

Таблица 4.1

Отклонения Δ распределения $G\left(\chi^2 \middle| H_0\right)$ от χ^2_{k-1}-распределения

n_i	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$
			$1-\alpha=0.9$		
10	0.00008	–0.0015	–0.0023	–0.0031	–0.0032
20	0.00012	–0.0010	–0.0013	–0.0017	–0.0020
30	–0.00015	–0.0009	–0.0008	–0.0012	–0.0013
			$1-\alpha=0.95$		
10	0.00011	–0.0012	–0.0018	–0.00217	–0.0022
20	0.00010	–0.0009	–0.0013	–0.0015	–0.0017
30	–0.00007	–0.0007	–0.0009	–0.0011	–0.0012

Сходимость распределений $G\left(\chi^2 \middle| H_0\right)$ статистики критерия Бартлетта к χ^2_{k-1}-распределениям ухудшается с ростом числа сравниваемых выборок.

То, что асимптотическое распределение статистики критерия известно и его можно использовать при достаточно малых объемах выборок, является серьезным преимуществом критерия Бартлетта.

При отклонении закона распределения наблюдаемого показателя от нормального закона распределение $G\left(\chi^2 \middle| H_0\right)$ статистики (4.4) становится *зависящим от объема выборки* и отличным от χ^2_{k-1}-распределения. Этот факт иллюстрирует рис. 4.1, на котором показаны распределения статистики при различных объемах двух сравниваемых выборок в случае принадлежности их закону распределения Лапласа (семейству (4.3) с параметром формы $\theta_2 = 1$), а также приведено предельное χ^2_1-распределение статистики (для классической ситуации с нормальным законом).

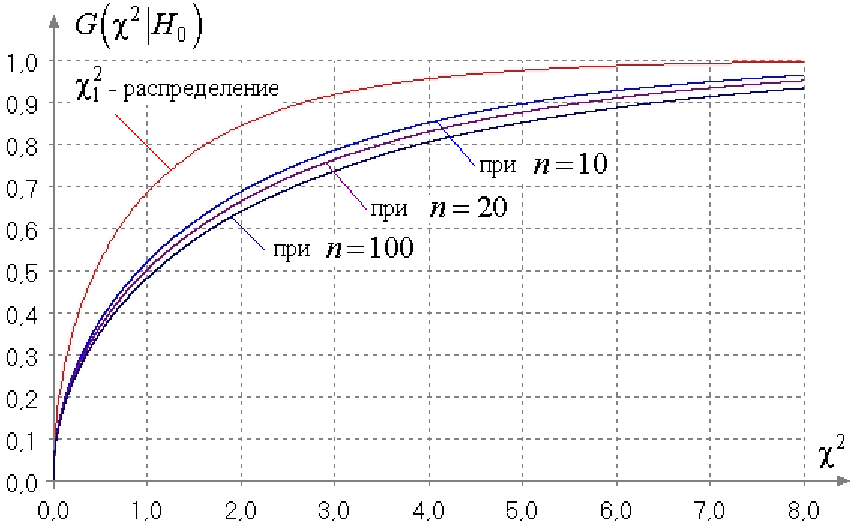

Рис. 4.1. Функции распределения статистики критерия Бартлетта при различных объемах выборок в случае распределения Лапласа при $k = 2$

Распределения статистики (4.4) очень чувствительны к отклонениям наблюдаемого закона от нормального. На рис. 4.2 показано, как меняется распределение статистики критерия Бартлетта, если результаты измерений подчиняются семейству распределений (4.3) с различными значениями параметра формы.

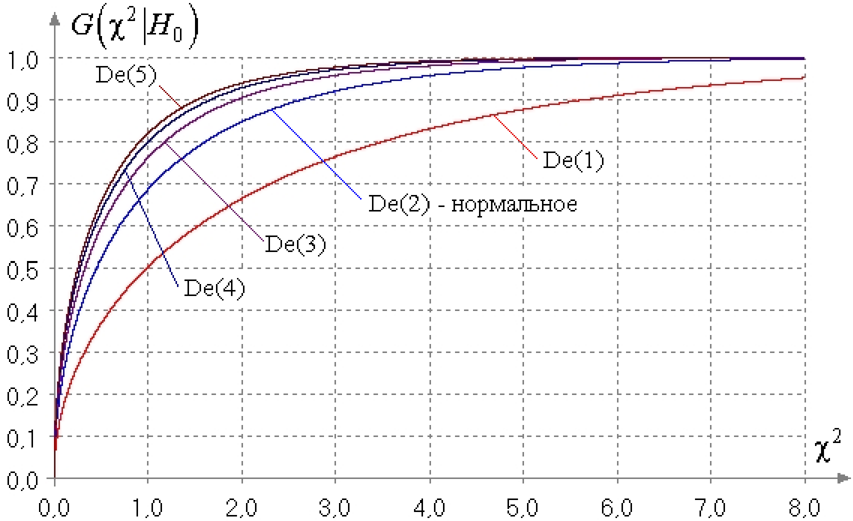

Рис. 4.2. Функции распределения статистики критерия Бартлетта в случае принадлежности выборок законам семейства (4.3) с различными значениями параметра формы ($n_i = 20,\ \ i = \overline{1,k},\ \ k = 2$)

На рис. 4.3 приведены графики распределения статистики (4.4) при справедливости конкурирующих гипотез H_1: $\sigma_k = 1.1\sigma_0$, H_2: $\sigma_k = 1.2\sigma_0$, H_3: $\sigma_k = 1.5\sigma_0$ в ситуации, когда выборки принадлежат закону распределения семейства (4.3) с параметром формы $\theta_2 = 3$ с несколько более тяжелыми хвостами, чем у нормального закона.

Отметим, что мощность критерия Бартлетта относительно тех же конкурирующих гипотез при законах отличных от нормального возрастает по сравнению с имеющейся при нормальном законе, если реальный закон, которому соответствуют анализируемые выборки, обладает более лёгкими хвостами, чем нормальный. И наоборот, мощность падает, если у реального закона хвосты более тяжелые. Это замечание справедливо относительно всех параметрических критериев проверки гипотез об однородности дисперсий. Оно справедливо и относительно непараметрических критериев.

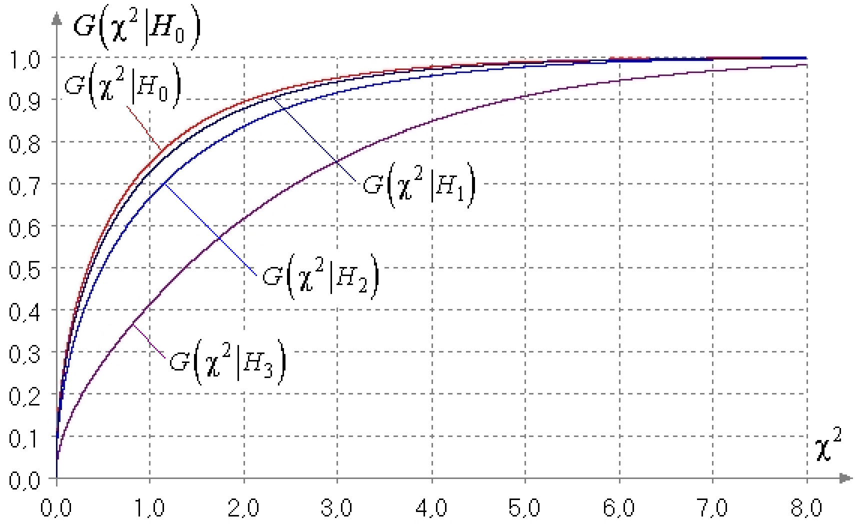

Рис. 4.3. Распределения $G(\chi^2 \mid H_i)$ статистики критерия Бартлетта при $n_i = 10,\ \ i = \overline{1,k},\ \ k = 2$, в случае принадлежности выборок семейству (4.3) с параметром формы $\theta_2 = 3$

4.1.2. Критерий Кокрена

Статистика критерия Кокрена [8] выражается формулой

$$Q = \frac{S_{\max}^2}{S_1^2 + S_2^2 + \cdots + S_k^2}, \tag{4.5}$$

где $S_{\max}^2 = \max\left(S_1^2,\ S_2^2, \ldots,\ S_k^2\right)$; k – число независимых оценок дисперсий (число выборок); $S_i^2,\ i = \overline{1,k}$, – оценки выборочных дисперсий. Проверяемая гипотеза отклоняется при больших значениях статистики.

В [77] критерий Кокрена называется более простым и менее мощным по сравнению с критерием Бартлетта. Второе не соответствует действительности: при выполнении стандартного предположения о нормальности при $k=2$ эти критерии по мощности эквивалентны, а при $k>2$ преимущество в мощности за критерием Кокрена.

Распределения статистики Кокрена сильно зависят от объемов наблюдаемых выборок (рис. 4.4) и их числа (рис. 4.5).

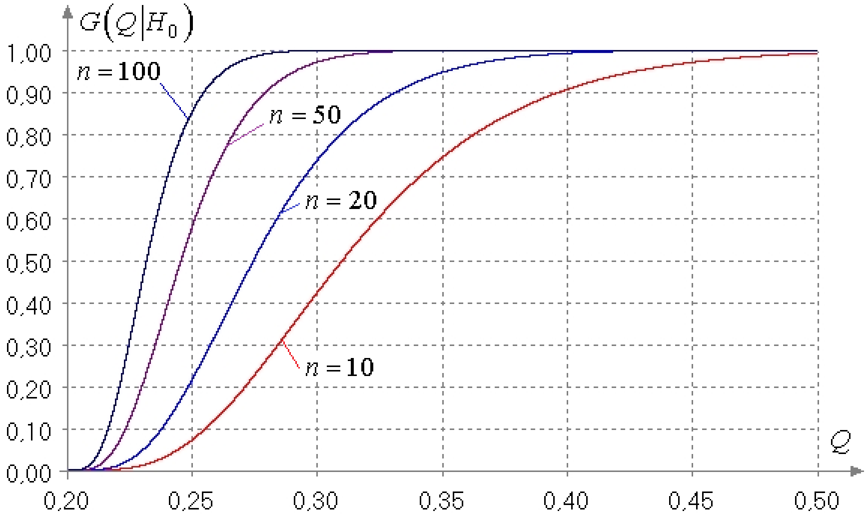

Рис. 4.4. Функции распределения статистики критерия Кокрена при равных объемах выборок $n_i = n$ в случае $k=5$

Аналитический вид распределений статистики неизвестен. В справочной литературе можно найти только таблицы процентных точек для ситуации равных объёмов сравниваемых выборок $n_i = n,\ i=\overline{1,k}$ [77], которые и используются при проверке гипотез.

Встречающиеся в литературе указания о применимости критерия Кокрена только при условии равенства всех n_i связаны лишь с отсутствием соответствующих таблиц процентных точек. Других возражений против применения критерия при неравных n_i нет. Возможность применения упирается лишь в наличие соответствующего программного обеспечения.

Критические значения статистики критерия Кокрена, полученные нами методами статистического моделирования при числе экспериментов 2×10^6 для числа анализируемых выборок $k = 2 \div 6$ при равных объемах выборок $n_i = n$, представлены в таблице **А.8** приложения.

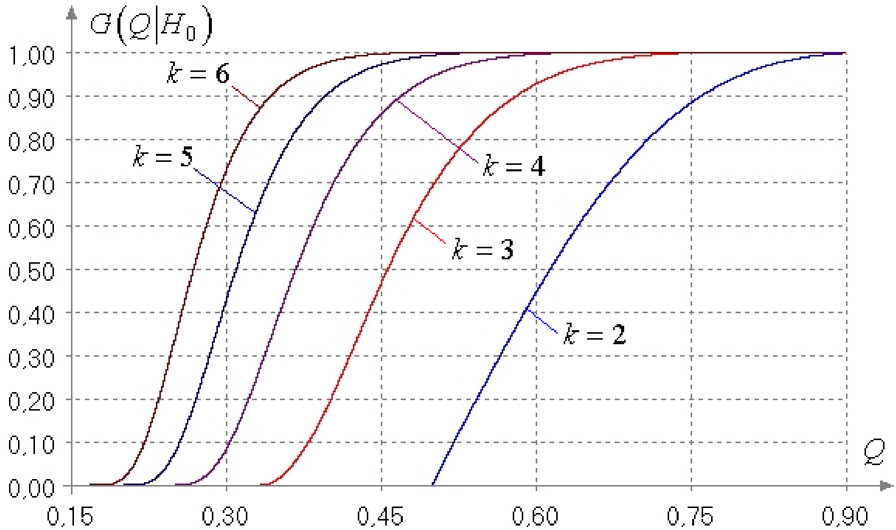

Рис. 4.5. Зависимость функций распределения статистики критерия Кокрена от числа сравниваемых выборок k при $n_i = 10$

Характер зависимости распределений $G(Q|H_0)$ статистики (4.5) критерия Кокрена при справедливости проверяемой гипотезы H_0 от закона распределения наблюдаемых выборок аналогичен зависимости для критерия Бартлетта [101].

4.1.3. Критерий Хартли

Статистика критерия Хартли [21], применяемого для проверки гипотезы об однородности дисперсий, имеет вид

$$F = \frac{S_{\max}^2}{S_{\min}^2}, \tag{4.6}$$

где $S_{\max}^2 = \max\left(S_1^2,\ S_2^2, \ldots,\ S_k^2\right)$; $S_{\min}^2 = \min\left(S_1^2,\ S_2^2, \ldots,\ S_k^2\right)$; k – число независимых оценок дисперсий (число выборок); S_i^2, $i = \overline{1,k}$ – оценки выборочных дисперсий. Проверяемая гипотеза отклоняется при больших значениях статистики.

Распределения статистики существенно зависят от числа сравниваемых выборок k и их объемов n_i, $i = \overline{1,k}$. Зависимость распределения $G\left(Q \middle| H_0\right)$ статистики (4.6) от объемов сравниваемых выборок n_i иллюстрирует рис. 4.6, а от числа k анализируемых выборок – рис. 4.7.

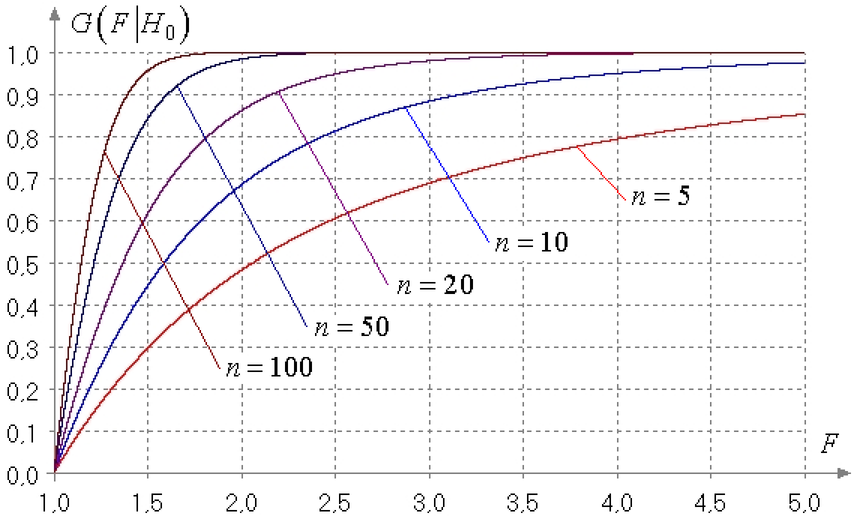

Рис. 4.6. Функции распределения статистики критерия Хартли при равных объемах выборок $n_i = n$ в случае $k = 2$

В литературных источниках для статистики (4.6) приводятся лишь ограниченные таблицы процентных точек, как правило, при равных объемах анализируемых выборок. Именно с этим связано часто встречаемое упоминание о возможности применения критерия Хартли только в случае выборок равного объема. Такое ограничение вызвано лишь отсутствием таблиц критических значений для произвольных (не равных) объёмов выборок.

Полученные с использованием методов статистического моделирования при числе экспериментов 2×10^6 критические значения статистики критерия Хартли для числа анализируемых выборок $k = 2 \div 6$ при равных объемах выборок $n_i = n$ представлены в таблице **А.13** приложения.

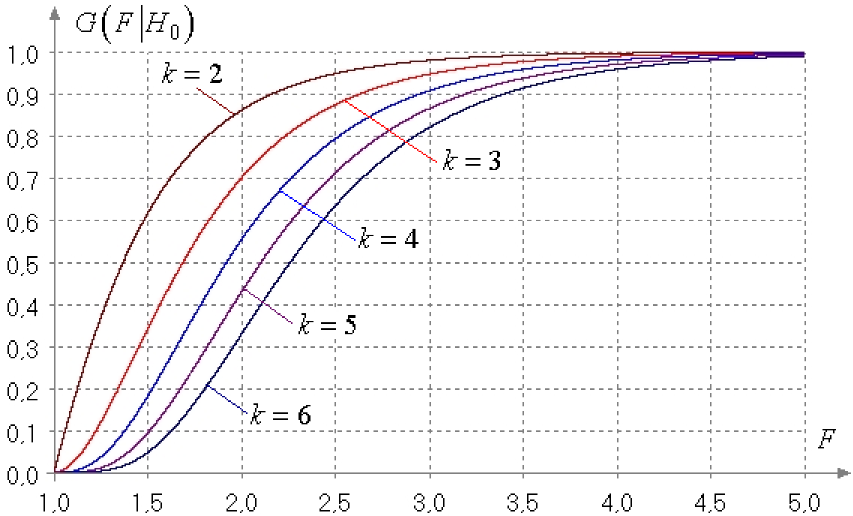

Рис. 4.7. Зависимость функций распределения статистики критерия Хартли от числа сравниваемых выборок при $n_i = 20$

Характер зависимости распределений $G(F|H_0)$ статистики (4.6) критерия Хартли при справедливости проверяемой гипотезы H_0 от закона распределения наблюдаемых выборок аналогичен зависимостям для критериев Бартлетта и Кокрена.

4.1.4. Критерий Левене

Статистика критерия Левене [48] имеет вид

$$W = \frac{N-k}{k-1} \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i \left(\bar{Z}_{i\bullet} - \bar{Z}_{\bullet\bullet} \right)^2}{\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} \left(Z_{ij} - \bar{Z}_{i\bullet} \right)^2}, \tag{4.7}$$

где k – количество выборок; n_i – объем i-й выборки; $N=\sum_{i=1}^{k} n_i$; X_{ij} – j-е наблюдение в i-й выборке; $Z_{ij}=\left|X_{ij}-\overline{X}_{i\bullet}\right|$, в котором $\overline{X}_{i\bullet}$ – среднее в i-й выборке; $\overline{Z}_{i\bullet}$ – среднее Z_{ij} по i-й выборке; $\overline{Z}_{\bullet\bullet}$ – среднее Z_{ij} по всем выборкам. Проверяемая гипотеза отклоняется при больших значениях статистики.

Зависимость от числа анализируемых выборок демонстрирует рис. 4.8, на котором приведены распределения статистики при равных объёмах выборок $n_i=n=20$, $k=2\div 6$.

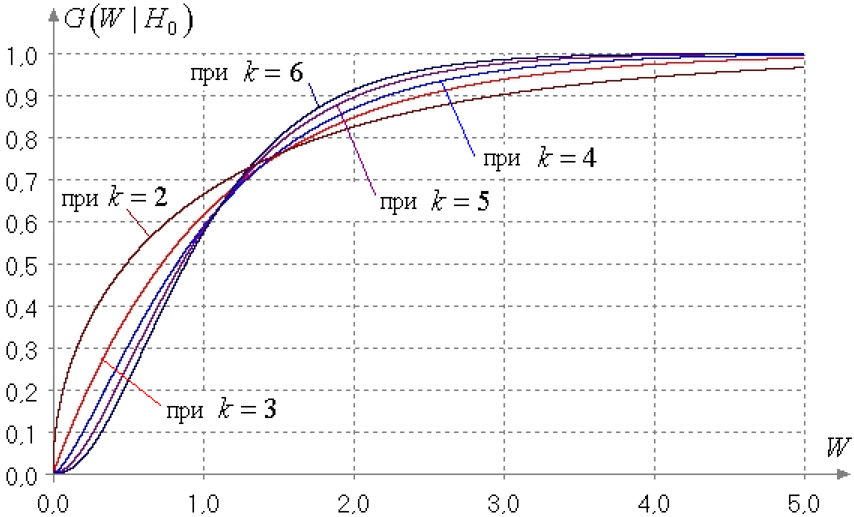

Рис. 4.8. Зависимость функций распределения статистики критерия Левене от числа выборок при $n_i=20$, $i=\overline{2,k}$

В многочисленных описаниях критерия, например [49], говорится, что в случае принадлежности выборок нормальному закону и справедливости H_0 эта статистика подчинятся F_{ν_1,ν_2}-распределению Фишера с числом степеней свободы $\nu_1=k-1$ и $\nu_2=N-k$. На самом деле при объемах выборок в 10…20 элементов *распределения статистики* $G(W \mid H_0)$ *существенно отличаются от* F_{ν_1,ν_2}-

распределения, и это надо иметь в виду при использовании критерия (см. рис. 4.9).

То, что распределение статистики (4.7) не является F_{ν_1,ν_2} - распределением Фишера, очевидно из определения величин Z_{ij}, которые в любом случае не принадлежат нормальному закону, а следовательно, (4.7) не может подчиняться F_{ν_1,ν_2} - распределению. В этой связи процентные точки распределения исследовались методами статистического моделирования [56].

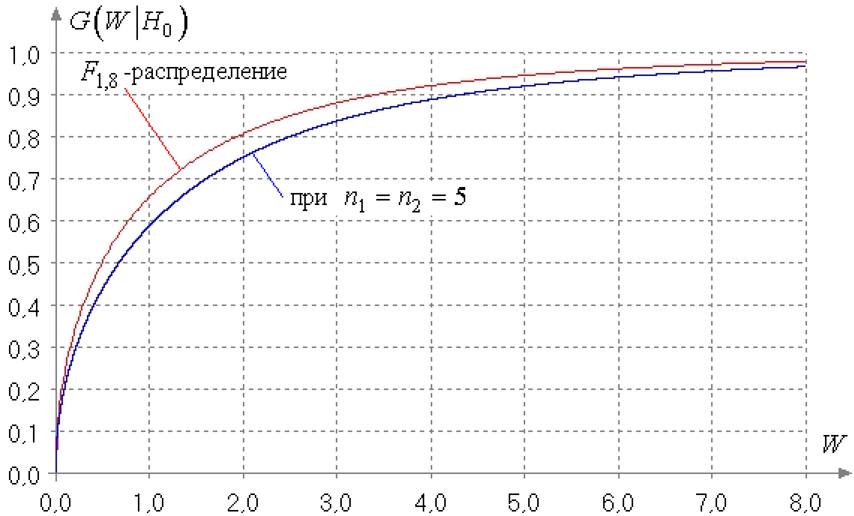

Рис. 4.9. Функция распределения статистики критерия Левене при $n_1 = n_2 = 5$, $k = 2$ и соответствующее $F_{1,8}$ -распределение Фишера

В то же время, как показали наши исследования, уже при объемах выборок $n_i \geq 40$ максимальное отклонение распределения статистики от F_{ν_1,ν_2} -распределения Фишера при $k = 2$ не превышает величины 0.005 (в случае принадлежности анализируемых выборок нормальному закону). Для $k = 4$ отклонением $G(W\,|\,H_0)$ от F_{ν_1,ν_2} -распределения можно пренебречь при $n_i = 50$. Заметим, что использование F_{ν_1,ν_2} - распределения для оценки достигнутого уровня значимости p_{value} занижает эту оценку по сравнению с реальным его значением.

Критические значения статистики критерия Левене для числа анализируемых выборок $k = 2 \div 6$ при равных объемах выборок $n_i = n$, построенные с использованием методов статистического моделирования при числе экспериментов 2×10^6, представлены в таблице **А.14** приложения.

Поведение условного распределения $G(W \mid H_0)$ статистики критерия Левене при справедливости проверяемой гипотезы H_0 в зависимости от вида закона распределения, соответствующего наблюдаемым выборкам, иллюстрирует рис. 4.10. Очевидно, что критерий Левене менее чувствителен к отклонениям анализируемых выборок от нормального закона (сравните рис. 4.2 и 4.10).

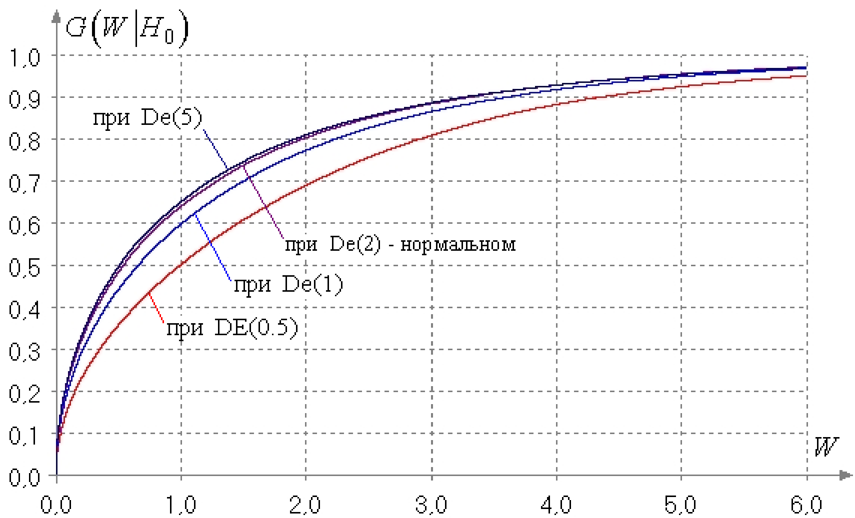

Рис. 4.10. Функции распределения статистики критерия Левене в случае распределений семейства (4.3) с различными значениями параметра формы ($n_1 = n_2 = 10,\ \ k = 2$)

В оригинальном критерии Левене предусмотрено использование только выборочных средних. В работе [5] предложено в статистике вида (4.7) вместо оценок среднего использовать выборочные медиану и усеченное среднее ($Z_{ij} = \left| X_{ij} - \tilde{X}_{i\bullet} \right|$, где $\tilde{X}_{i\bullet}$ – медиана в i-й выборке; $Z_{ij} = \left| X_{ij} - \overline{X}'_{i\bullet} \right|$, где $\overline{X}'_{i\bullet}$ – усеченное среднее в i-й выборке). Считается, что в этих случаях критерий становится еще устойчивей к нарушению предположений о нормальности.

Как это обычно бывает, используемый метод оценивания влияет на распределение статистики. В случае использования медианы распределение статистики (4.7) при выполнении предположений о нормальности существенно отличается от распределения статистики при использовании обычного среднего, но меньше отличается от F_{ν_1,ν_2}-распределения Фишера.

Рис. 4.11 показывает, как в случае $k=2$ выборок объемом $n_i = 10$, принадлежащих нормальному закону, изменяется распределение статистики (4.7) в зависимости от того, используется ли оценка среднего, или оценка усеченного среднего, или оценка медианы. Там же приведено соответствующее $F_{1,18}$-распределение Фишера.

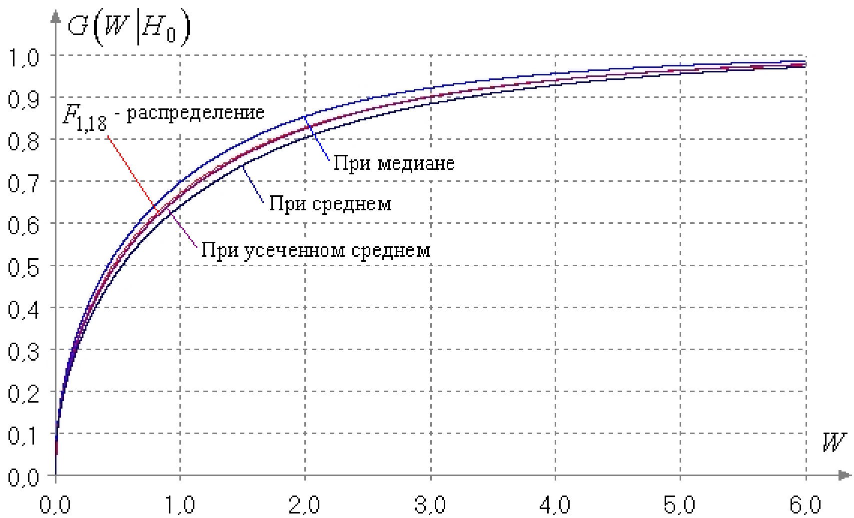

Рис. 4.11. Функции распределения статистики критерия Левене в случае принадлежности выборок нормальному закону при $n_1 = n_2 = 10,\ k = 2$ и $F_{1,18}$-распределение Фишера

В данном случае при оценивании усеченного среднего отбрасывалось по два крайних наблюдения слева и справа. Картина, представленная на рис. 4.11, подчеркивает, что при ограниченных объемах выборок необходимо учитывать различие в распределениях статистики, связанное с различием используемых оценок. Можно отметить, что при использовании усеченного среднего распределение статистики оказалось наиболее близким $F_{1,18}$ -распределению Фишера

Становится ли критерий более устойчивым в случае использования оценки медианы? В какой-то степени, да. Однако характер поведения распределений статистики кардинально изменился, и это также следует учитывать.

Например, рис. 4.12 иллюстрирует изменение распределений $G(W \mid H_0)$ статистики критерия Левене при справедливости проверяемой гипотезы H_0 в зависимости от вида закона распределения, соответствующего наблюдаемым выборкам, при использовании оценки медианы (сравните с рис. 4.10).

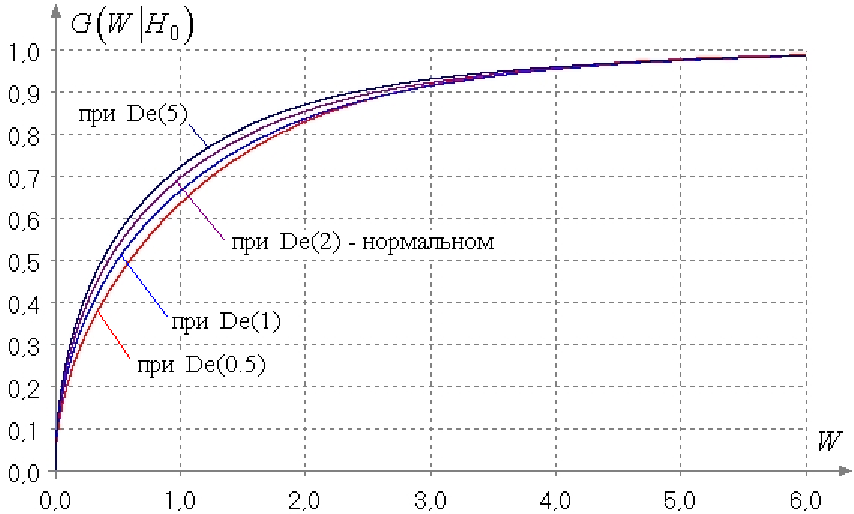

Рис. 4.12. Распределения статистики критерия Левене при использовании медианы в случае принадлежности выборок законам семейства (4.3) с различными значениями параметра формы ($n_1 = n_2 = 10,\ k = 2$)

При выполнении стандартного предположения о нормальности или при законах с более лёгкими хвостами по сравнению с нормальным законом критерий Левене заметно уступает в мощности критериям Бартлетта, Кокрена, Хартли и ряда другим, а выигрывает при законах с тяжёлыми хвостами.

Вопросы мощности и поведения модификаций критерия Левене, в том числе в случае нарушения предположений о нормальности, рассматривались в [22, 70].

4.1.5. Критерий Фишера

Критерий Фишера используется для проверки гипотезы о равенстве дисперсий *двух* выборок случайных величин. Статистика критерия имеет простой вид

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2}, \tag{4.8}$$

где s_1^2 и s_2^2 – несмещенные оценки дисперсий, вычисленные по выборкам.

В отличие от критериев, рассмотренных выше, распределение статистики критерия Фишера при выполнении стандартного предположения известно точно. В случае принадлежности выборок нормальному закону и справедливости $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ эта статистика подчиняется F_{ν_1,ν_2}-распределению Фишера с числом степеней свободы $\nu_1 = n_1 - 1$ и $\nu_2 = n_2 - 1$, где n_1 и n_2 – объемы сравниваемых выборок. Проверяемая гипотеза отклоняется при малых $F^* < F_{\alpha/2,\nu_1,\nu_2}$ или больших $F^* > F_{1-\alpha/2,\nu_1,\nu_2}$ значениях статистики.

Как и остальные, критерий Фишера очень чувствителен к отклонениям от нормальности. На рис. 4.13 показаны распределения статистики критерия Фишера при справедливости проверяемой гипотезы H_0 в случае принадлежности законам семейства распределений (4.3). На рисунке приведена также функция $F_{19,19}$-распределения, которому принадлежит статистика при нормальном законе и объёмах сравниваемых выборок $n_1 = n_2 = 20$.

Критерий применяется только при анализе двух выбок и в этих условиях по мощности эквивалентен критериям Бартлетта, Кокрена, Хартли, Неймана–Пирсона и Z-критерию Оверолла–Вудворда.

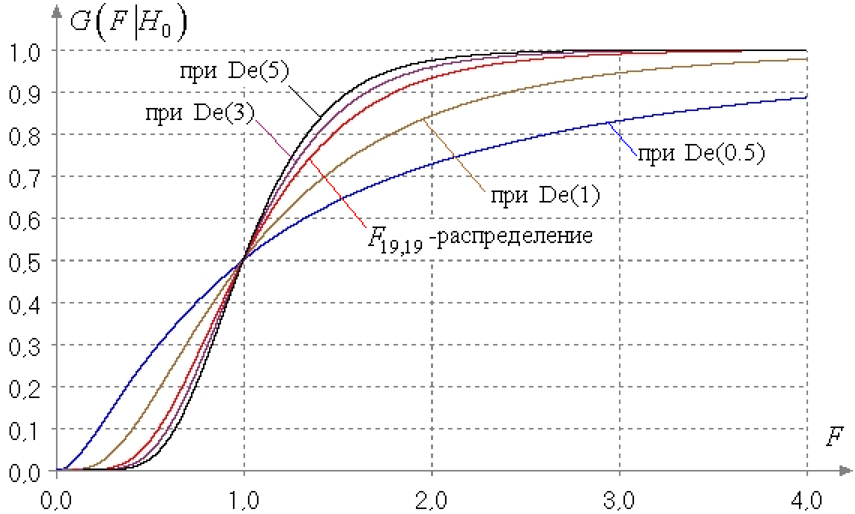

Рис. 4.13. Распределения статистики критерия Фишера в случае принадлежности выборок законам семейства (4.3) с различными значениями параметра формы ($n_1 = n_2 = 20$)

4.1.6. Критерий Неймана-Пирсона

Статистика критерия Неймана–Пирсона (критерия отношения правдоподобия) [82] определяется отношением арифметического среднего всех оценок дисперсий s_i^2 к их геометрическому среднему:

$$h = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} s_i^2 \Bigg/ \left(\prod_{i=1}^{k} s_i^2\right)^{\frac{1}{k}}, \qquad (4.9)$$

где k – количество выборок, $s_i^2 = \frac{1}{n_i - 1}\sum_{j=1}^{n_i}\left(x_{ij} - \bar{x}_i\right)^2$ – оценки выборочных дисперсий, $\bar{x}_i = \frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}$ – выборочное среднее значение, x_{ij} – j-й элемент i-й выборки. Обычно предполагается, что

$n_1 = n_2 = \ldots = n_k = n$. Критерий правосторонний. Проверяемая гипотеза H_0 отклоняется при больших значениях статистики (4.9), когда $h > h_{1-\alpha}$.

Распределения статистики (4.9) зависят от объёма n и от числа анализируемых выборок k. Рис. 4.14 иллюстрирует зависимость распределения статистики (4.8) от объёма выборок при $n_i = n$, а рис. 4.15 – от количества выборок k.

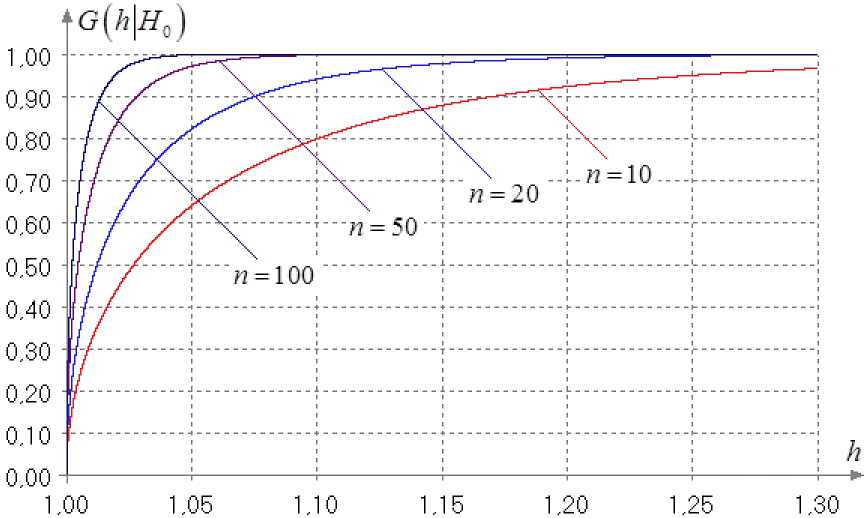

Рис. 4.14. Зависимость распределения статистики критерия Неймана-Пирсона от объема выборки (при $n_i = n$, $k = 2$)

Уточненные значения процентных точек (при выполнении стандартного предположения о нормальности) приведены в таблице **А.15** приложения.

Критерий Неймана–Пирсона крайне чувствителен к отклонениям от предположения о нормальности. Рис. 4.16 на примере семейства (4.3) демонстрирует характер зависимости распределений $G(h|H_0)$ статистик (4.9) от вида закона (при различных значениях параметра формы θ_0 семейства (4.3)), которым принадлежат анализируемые выборки при справедливости H_0 (при $n = 100$ и $k = 2$).

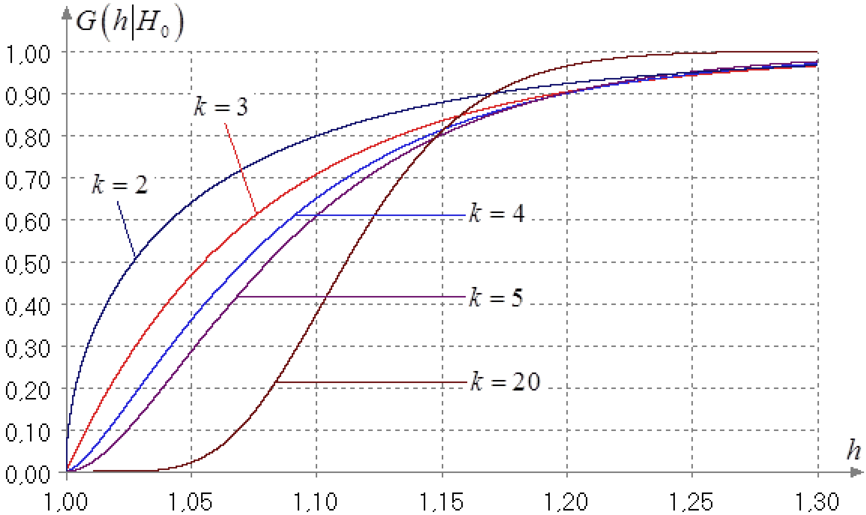

Рис. 4.15. Зависимость распределения статистики критерия Неймана-Пирсона от числа выборок (при $n = 10$)

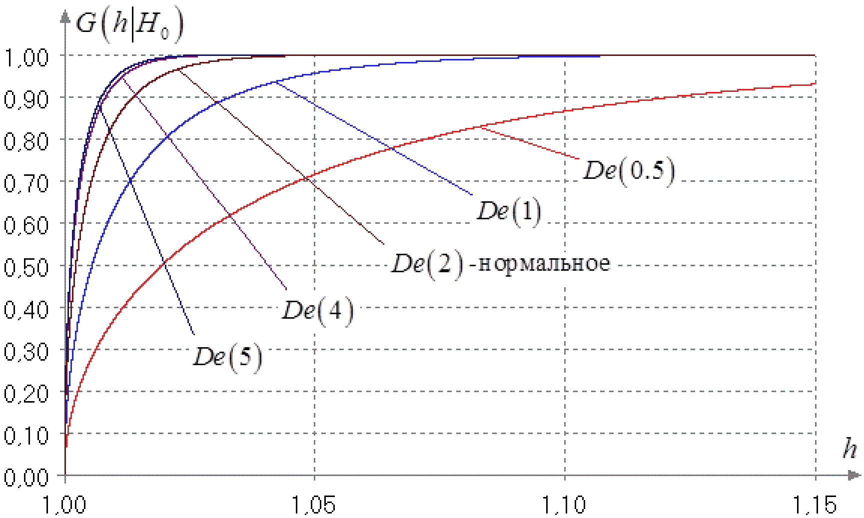

Рис. 4.16. Зависимость распределения статистики (4.9) критерия Неймана-Пирсона от вида закона (при $n = 100$, $k = 2$)

Естественно, что критерий со статистикой (4.9) может использоваться и при неравных n_i, однако следует учитывать, что в этом случае распределения статистик при справедливости H_0 будут отличаться от распределений, имеющих место при равных n_i.

4.1.7. Критерий О`Брайена.

При формировании статистики критерия [67] каждый j-й элемент i-й выборки x_{ij} преобразуется в соответствии с формулой

$$V_{ij} = \frac{(n_i - 1.5) n_i \left(x_{ij} - \bar{x}_i \right)^2 - 0.5 s_i^2 (n_i - 1)}{(n_i - 1)(n_i - 2)}, \tag{4.10}$$

где n_i – объём, $\bar{x}_i$– среднее значение, s_i^2 – оценка дисперсии i-й выборки.

Статистика критерия имеет вид

$$V = \frac{\frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^{k} n_i \left(\overline{V_i} - \overline{\overline{V_i}} \right)^2}{\frac{1}{N-k} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} \left(V_{ij} - \overline{V_i} \right)^2}, \tag{4.11}$$

где $\overline{V_i} = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} V_{ij}$, $\overline{\overline{V_i}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} V_{ij}$, $N = \sum_{i=1}^{k} n_i$.

Критерий правосторонний, и проверяемая гипотеза H_0 отклоняется при больших значениях статистики (4.11).

Предельным распределением статистики критерия О’Брайена при справедливости H_0 является $F_{k-1,N-k}$-распределение Фишера с $k-1$ и $N-k$ степенями свободы [67]. Однако проведенные исследования показывают, что распределение статистики (4.11) критерия О’Брайена достаточно медленно сходится к соответствующему распределению Фишера. Например, в случае $k=2$ отличием реального распределения $G(V|H_0)$ статистики (4.11) от соответствующего $F_{1,N-k}$-распределения Фишера можно пренебречь лишь при $n_1 = n_2 = n \geq 80$. При малых объёмах выборок существенное отличие распределения статистики $G(V|H_0)$ от $F_{k-1,N-k}$-распределения Фишера наблюдается при больших значениях V, поэтому использование процентных точек $F_{k-1,N-k}$-распределения приводит к увеличению вероятности β ошибок второго рода (вследствие уменьшения уровня значимости по сравнению с заданным α).

Чтобы обеспечить возможность корректного применения критерия и при малых объемах выборок, в таблице **А.16** приложения приведены полученные верхние процентные точки распределений статистики критерия О'Брайена при различном количестве m сравниваемых выборок для $n_1 = n_2 = n \le 80$.

Исследования также показали, что при $N-k \le 80$ распределения $G(V|H_0)$ при значениях статистики V таких, что $1-G(V|H_0) < 0.1$, оказываются ближе к $F_{k-1,\infty}$-распределению, чем к $F_{k-1,N-k}$-распределению Фишера (см. рис. 4.17).

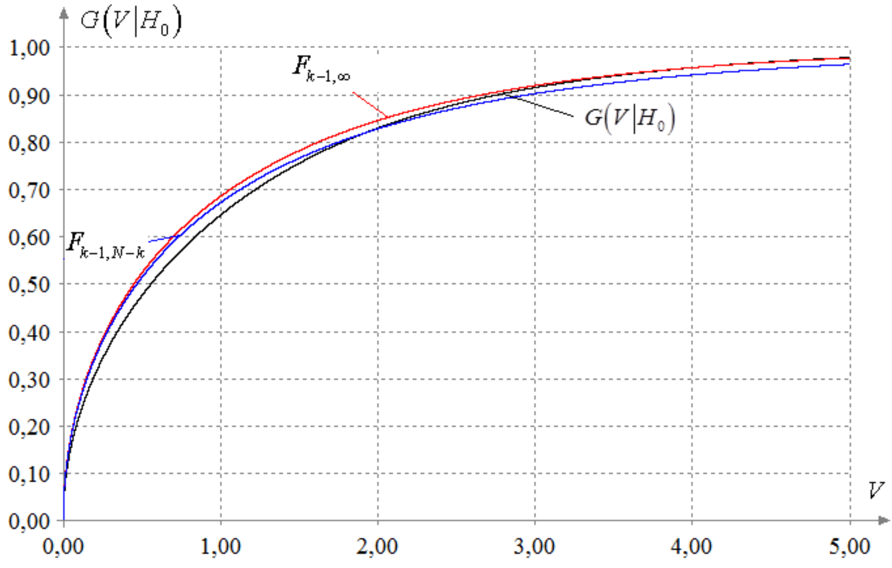

Рис. 4.17. Функция распределения статистики критерия О'Брайена при $n = 10$, $k = 2$, $N-k = 18$

Поэтому в таких ситуациях корректность выводов можно повысить, используя $F_{k-1,\infty}$-распределение для оценки достигнутого уровня значимости (p_{value}) или выбирая в соответствии с $F_{k-1,\infty}$-распределением критические значения $V_{1-\alpha}$.

Картина, представленная на рис. 4.18 показывает, что распределения статистики критерия О'Брайена (как и в случае критерия Левене [40, 95]) достаточно устойчивы к нарушению стандартного предположения о принадлежности выборок нормальному закону. Отклонения в сторону законов с более "лёгкими" чем у нормального закона хвостами практически не влияют на распределение статистики. А при законах с более "тяжелыми" хвостами отклонения от распределений, имеющих место при нормальном законе, не настолько велики, как в случае других параметрических критериев.

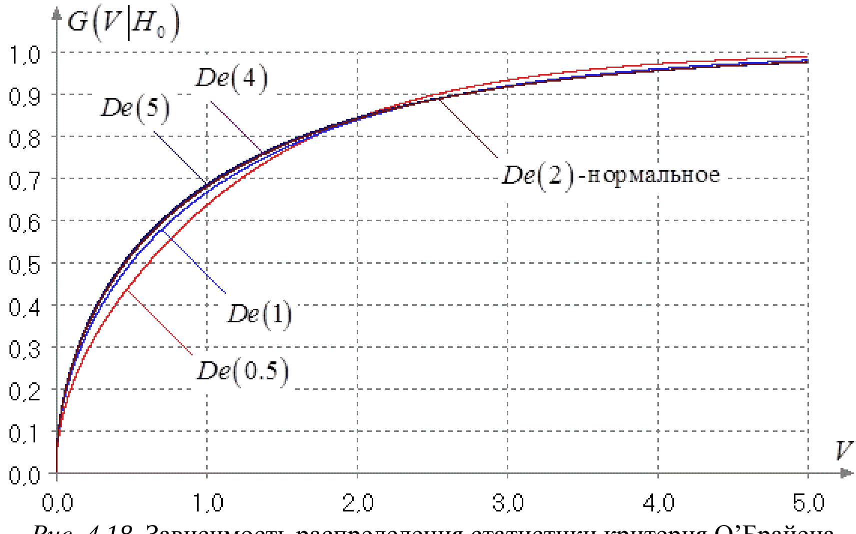

Рис. 4.18. Зависимость распределения статистики критерия О'Брайена от вида закона семейства (4.3) (при $n=100$, $k=2$)

Подобную же устойчивость к нарушению стандартного предположения о нормальности среди критериев, рассмотренных в данной работе, демонстрирует только модифицированный Z-критерий Оверолла–Вудворда.

4.1.8. Критерий Линка

Критерий Линка (критерий отношения размахов) является аналогом критерия Фишера и используется только при анализе 2-х выборок ($m = 2$). Статистика критерия имеет вид [51]:

$$F^* = \frac{\omega_{n_1}}{\omega_{n_2}}, \tag{4.12}$$

где $\omega_{n_1} = x_{1,\max} - x_{1,\min}$, $\omega_{n_1} = x_{2,\max} - x_{2,\min}$ – размахи, а $x_{1,\max}$, $x_{2,\max}$, $x_{1,\min}$, $x_{2,\min}$ – максимальные и минимальные элементы сравниваемых выборок.

Критерий двусторонний. Проверяемая гипотеза отклоняется с уровнем значимости α, если $F^* > F^*_{1-\alpha/2}$ или $F^* < F^*_{\alpha/2}$, где $F^*_{1-\alpha/2}$ и $F^*_{\alpha/2}$ – верхнее и нижнее критические значения статистики.

Распределение статистики критерия существенно зависит от объемов сравниваемых выборок (рис. 4.19).

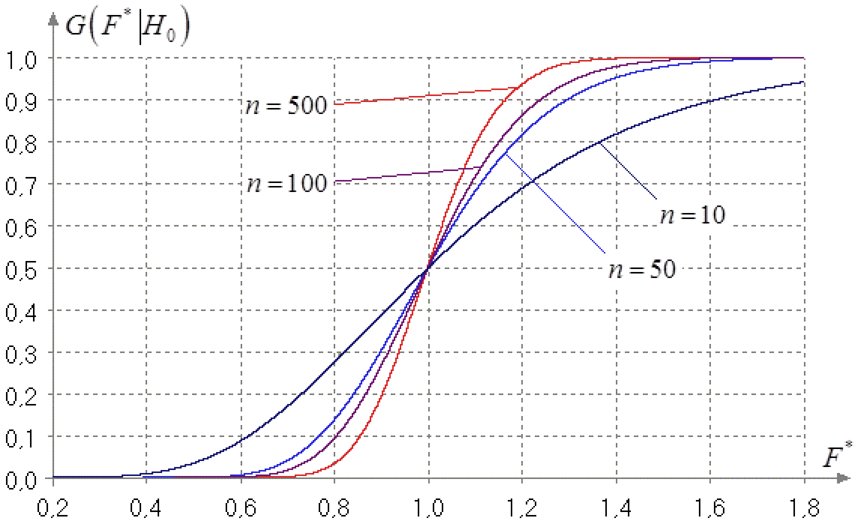

Рис. 4.19. Зависимость распределения статистики критерия Линка от объема выборок n (при $n_1 = n_2 = n$ и нормальном законе)

Критерий Линка крайне чувствителен к любым отклонениям от нормальности. Характер зависимости распределений статистики (4.12) от вида закона (при справедливости H_0), которым принадлежат выборки, при $n=100$ демонстрирует рис. 4.20.

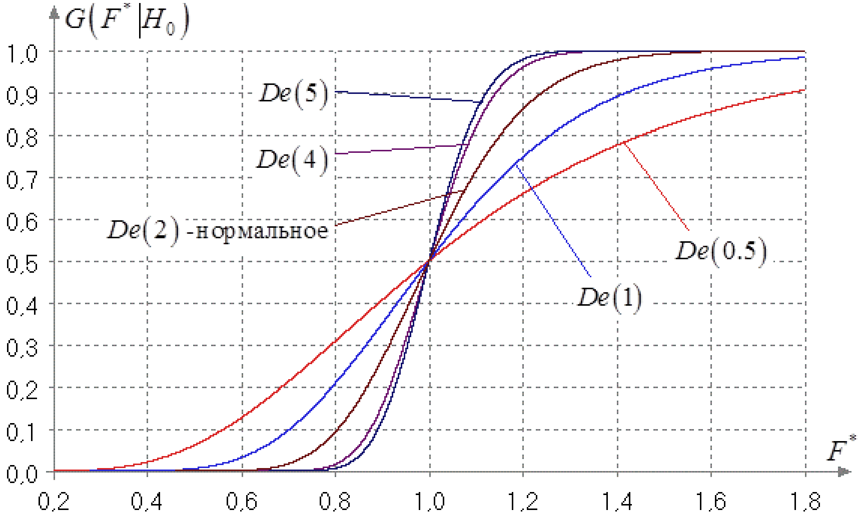

Рис. 4.20. Зависимость распределения статистики критерия Линка от вида закона семейства (4.3) (при $n=100$)

Уточненные в ходе исследований нижние и верхние процентные точки для статистики (4.12) критерия отношения размахов в случае принадлежности выборок нормальному закону при $n_1, n_2 \le 20$ приведены в таблицах **А.17–А.18** приложения.

4.1.9. Критерий Ньюмана

Статистика критерия Ньюмана (стьюдентизированного размаха) имеет вид [57]:

$$q = \frac{\omega_{n_1}}{s_{n_2}}, \tag{4.13}$$

где $\omega_{n_1} = x_{1,\max} - x_{1,\min}$, $s_{n_2} = \sqrt{\frac{1}{n_2 - 1}\sum_{i=1}^{n_2}\left(x_{2i} - \bar{x}_2\right)^2}$.

Как и предыдущий, этот критерий также является двусторонним. Проверяемая гипотеза H_0 о равенстве дисперсий отклоняется, если $q < q_{\alpha/2}$ или $q > q_{1-\alpha/2}$, где $q_{\alpha/2}$ и $q_{1-\alpha/2}$ – нижнее и верхнее критические значения статистики при заданном уровне значимости α .

Распределения статистики (4.13) критерия Ньюмана при справедливости H_0 зависят от объёмов анализируемых выборок (см. рис. 4.21).

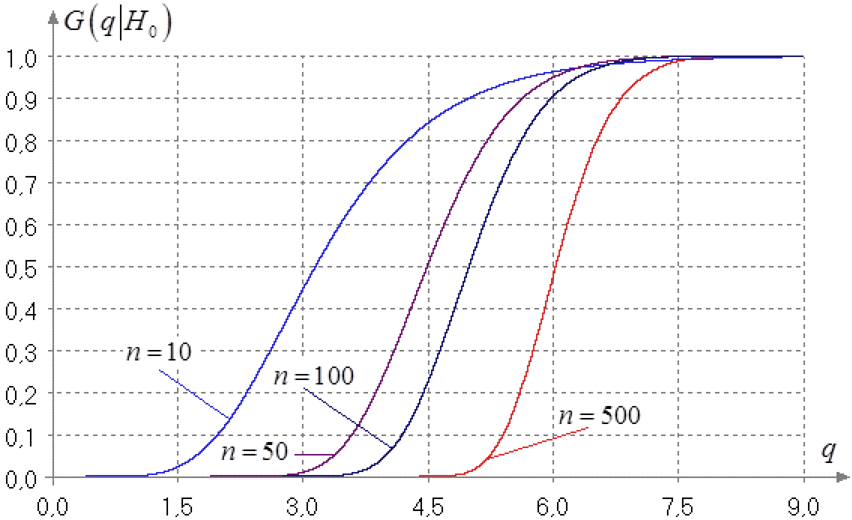

Рис. 4.21. Зависимость распределения статистики критерия Ньюмана от объема выборки n (при $n_1 = n_2 = n$ и нормальном законе)

Уточненные нижние и верхние критические значения статистики (4.13), выход за которые приводит к отклонению нулевой гипотезы, приведены в таблицах **А.19–А.20** приложения.

Критерий также очень чувствителен к любым отклонениям от нормальности (см. рис. 4.22).

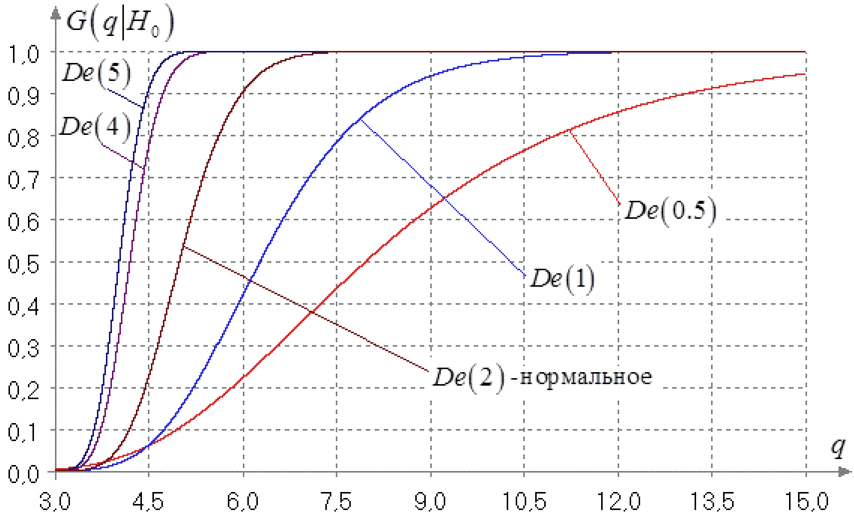

Рис. 4.22. Зависимость распределения статистики критерия Ньюмана от вида закона семейства (4.3) (при $n = 100$)

4.1.10. Критерий Блиса–Кокрена–Тьюки

Статистика критерия [4], предложенного в качестве аналога критерия Кокрена, имеет вид

$$c = \frac{\max\limits_{1 \le i \le k} \omega_i}{\sum\limits_{i=1}^{k} \omega_i}, \tag{4.14}$$

где k – количество сравниваемых выборок, $\omega_i = \max\limits_{1 \le j \le n_i} x_{ij} - \min\limits_{1 \le j \le n_i} x_{ij}$ – размах i-й выборки.

Критерий правосторонний. Если статистика $c > c_{1-\alpha}$, где $c_{1-\alpha}$ – верхнее критическое значение при заданном уровне значимости α, то проверяемая гипотеза H_0 о равенстве дисперсий отклоняется.

Распределение статистики критерия сильно зависит от объема выборок (см. рис. 4.23) и числа сравниваемых выборок.

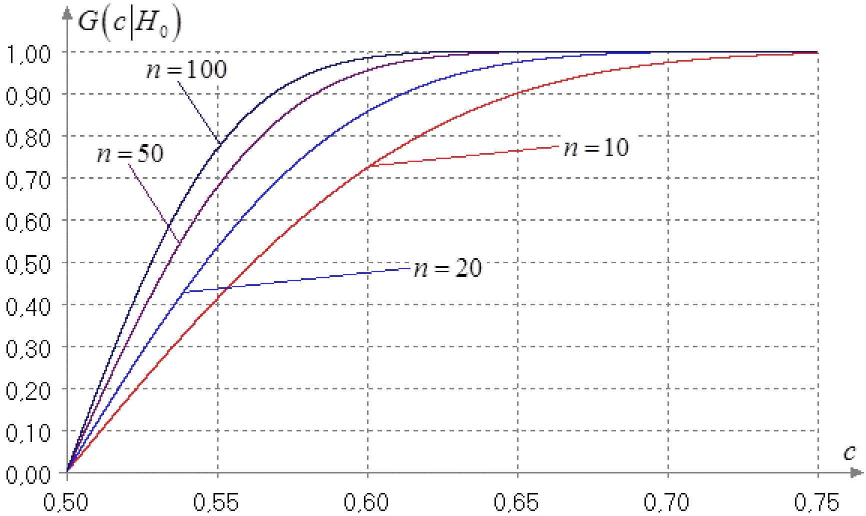

Рис. 4.23. Зависимость распределения статистики критерия Блисса-Кокрена-Тьюки от объема выборки n (при $n_1 = n_2 = n$, $k = 2$ и нормальном законе)

Значения верхних процентных точек для статистики критерия при некоторых объёмах $n_1 = n_2 = n \le 20$ и числе $k \le 10$ сравниваемых выборок и выполнении стандартного предположения о нормальности приведены в таблице **А.21** приложения. Формально критерий Блисса–Кокрена–Тьюки можно применять и при неравных объёмах n_i анализируемых выборок, однако следует иметь ввиду, что в этом случае критические значения статистики будут отличаться от приведенных в таблице **А.21**.

Как и в случае критерия Кокрена, распределения статистики данного критерия сильно зависят от закона, которому принадлежат анализируемые выборки. На рис. 4.24 демонстрируется зависимость распределений статистики от вида закона в случае принадлежности выборок обобщённому нормальному закону (4.3) $De(\theta_0)$ при $\theta_0 = 0.5, 1, 2, 4, 5$.

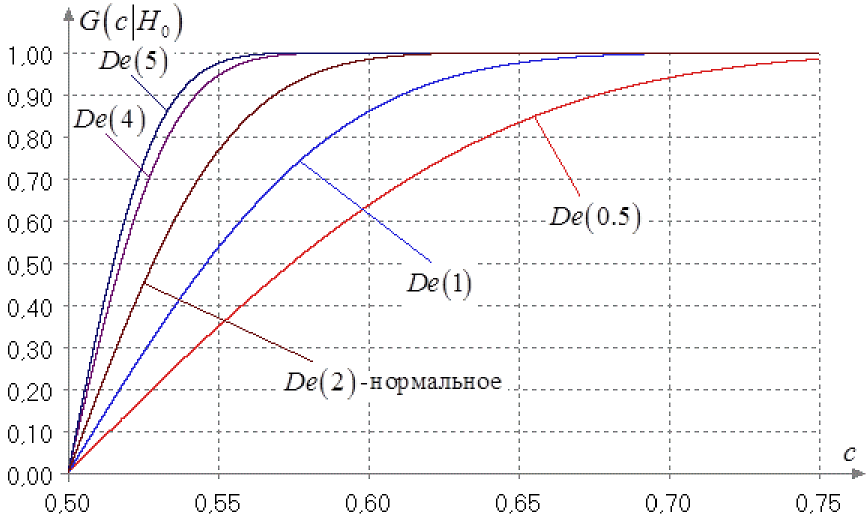

Рис. 4.24. Зависимость распределения статистики критерия Блисса–Кокрена-Тьюки от закона семейства (4.3) (при $n = 10$, $k = 2$)

4.1.11. Критерий Кадуэлла–Лесли–Брауна

Этот критерий [47] был предложен в качестве аналога критерия Хартли с заменой в статистике отношений оценок дисперсий на отношения размахов

$$K = \frac{\max\limits_{1 \le i \le k} \omega_i}{\min\limits_{1 \le i \le k} \omega_i}, \qquad (4.15)$$

где k – количество выборок, ω_i – размах i-й выборки.

Критерий правосторонний. При $K > K_{1-\alpha}$, где $K_{1-\alpha}$ – верхнее критическое значение статистики при заданном уровне значимости α, проверяемая гипотеза H_0 отклоняется.

Распределения статистики критерия Кадуэлла–Лесли–Брауна так же, как и статистики критерия Блисса–Кокрена–Тьюки, существенно зависят и от объема выборок (рис. 4.25), и от закона распределения, которому подчиняются выборки (рис. 4.26).

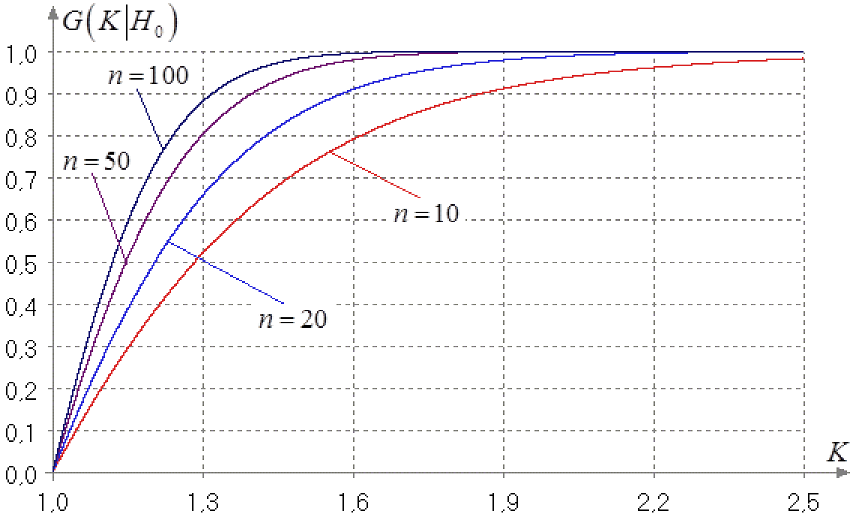

Рис. 4.25. Зависимость распределения статистики критерия Кадуэлла–Лесли–Брауна от объема выборки n (при $n_1 = n_2 = n$, $k = 2$ и нормальном законе)

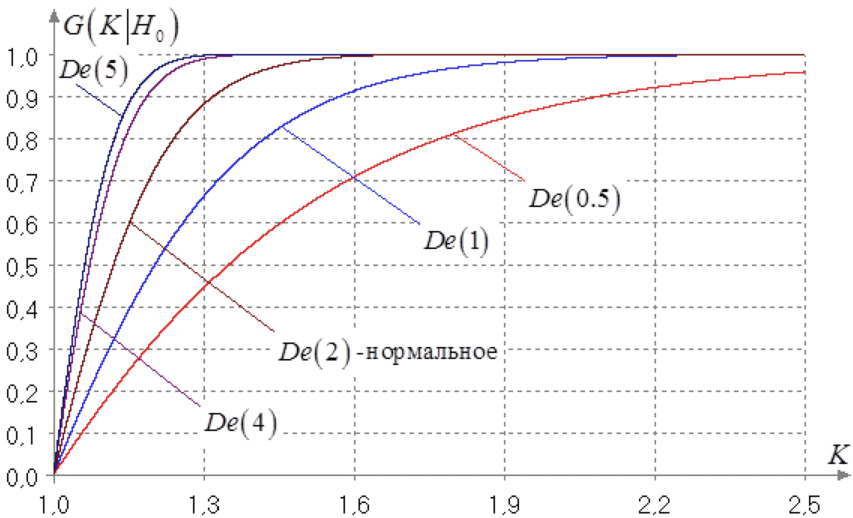

Рис. 4.26. Зависимость распределения статистики критерия Кадуэлла-Лесли-Брауна от вида закона семейства (4.3) (при $n = 10$, $k = 2$)

В таблице **А.22** приложения приведены критические значения $K_{1-\alpha}$ для количества выборок $k \le 10$ при равных объемах выборок $n_1 = n_2 = n \le 20$, $i = \overline{1, m}$, полученные методами статистического моделирования. Формально критерий Кадуэлла–Лесли–Брауна можно применять и при неравных объёмах n_i анализируемых выборок.

4.1.12. Z–критерий Оверолла–Вудворда

Статистика критерия имеет вид [68]:

$$Z = \frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^{k} Z_i^2 , \tag{4.16}$$

где $Z_i = \sqrt{\dfrac{c_i \left(n_i - 1\right) s_i^2}{MSE}} - \sqrt{c_i \left(n_i - 1\right) - \dfrac{c_i}{2}}$, $MSE = \dfrac{1}{N-k} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} \left(x_{ij} - \bar{x}_i\right)^2$, m – количество выборок, $c_i = 2 + 1/n_i$, n_i – размер i-й выборки, s_i^2 – несмещенная оценка дисперсии i-й выборки, $N = \sum_{i=1}^{k} n_i$, x_{ij} – j-й элемент i-й выборки, $\bar{x}_i$ –среднее значение i-й выборки.

При справедливости проверяемой гипотезы H_0 об однородности дисперсий и принадлежности анализируемых выборок нормальному закону предельное распределение статистики (4.16) не зависит от размера выборки и подчиняется $F_{k-1,\infty}$-распределению Фишера. Однако при малых объемах n_i распределение статистики Z–критерия Оверолла–Вудворда заметно отличается от предельного $F_{k-1,\infty}$-распределения Фишера.

Сходимость распределения статистики Z–критерия к предельному (с ростом объёмов выборок $n_i = n$) иллюстрирует рис. 4.27. Проведенные исследования показали, что различием между реальным распределением статистики критерия и предельным $F_{k-1,\infty}$-распределением можно пренебречь при объемах выборок $n_i \ge 50$. Поэтому (в предположении о принадлежности анализируемых выборок нормальному закону) для объемов выборок $n_i \le 50$ методами статистического моделирования (для разного количества сравниваемых выборок m и для различных $n_i = n$ объемов выборок) были вычислены верхние критические значения $Z_{1-\alpha}$, представленные в таблице **А.23** приложения.

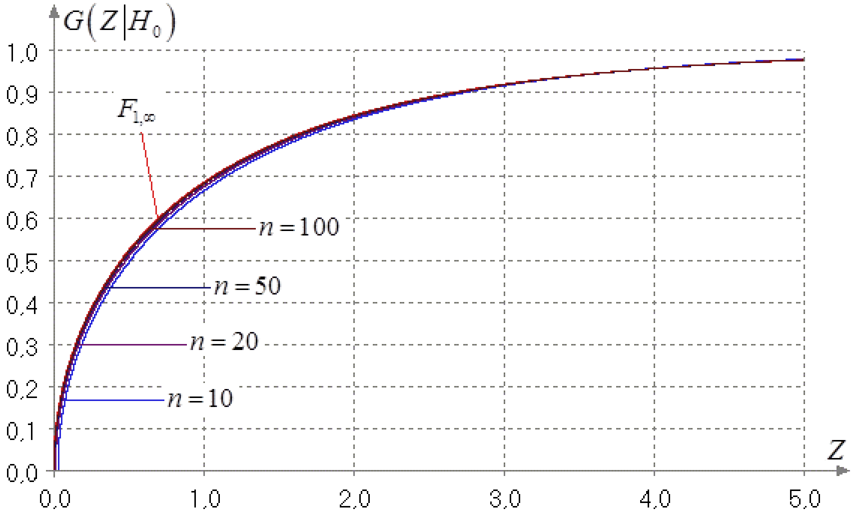

Рис. 4.27. Сходимость распределения статистики (4.15) Z–критерия к предельному (при $n_1 = n_2 = n$, $k = 2$ и нормальном законе)

Распределение статистики (4.16) Z–критерия очень чувствительно к нарушению предположения о нормальности (см. рис. 4.28).

4.1.13. Модифицированный Z–критерий

В целях построения критерия, более устойчивого к нарушению стандартного предположения о нормальности, в [69] предложена модификация Z–критерия, статистика которого отличается вычислением величин c_i:

$$c_i = 2.0\left[\frac{1}{K_i}\left(2.9 + \frac{0.2}{n_i}\right)\right]^{\frac{1.6(n_i - 1.8K_i + 14.7)}{n_i}}, \qquad (4.17)$$

где $K_i = \frac{1}{n_i - 2}\sum_{j=1}^{n_i} G_{ij}^4$ – оценка коэффициента эксцесса i-й выборки, $G_{ij} = \left(x_{ij} - \bar{x}_i\right) \Big/ \sqrt{\frac{n_i - 1}{n_i} s_i^2}$.

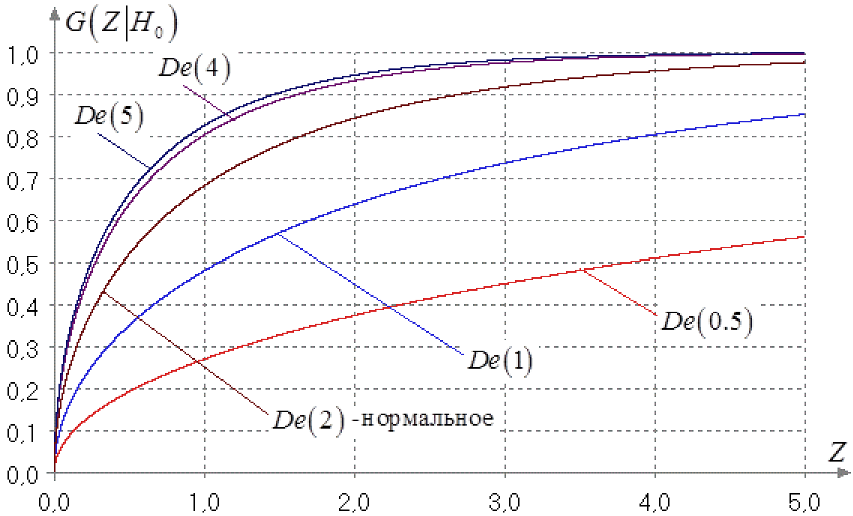

Рис. 4.28. Зависимость распределения статистики (4.16) Z–критерия от вида закона семейства (4.3) (при $n = 100$, $k = 2$)

В ходе настоящих исследований было показано, что распределение статистики модифицированного Z–критерия с ростом объема выборок очень медленно сходится к $F_{k-1,\infty}$-распределению Фишера. Даже при больших объемах выборок распределение статистики критерия не согласуется с $F_{k-1,\infty}$-распределением, хотя в области больших значений статистики отличие её распределения от $F_{k-1,\infty}$-распределения не играет существенного значения (см. рис. 4.29).

Для корректного применения критерия при малых объёмах выборок в таблице **А.24** приложения представлены критические значения, полученные с использованием методов статистического моделирования.

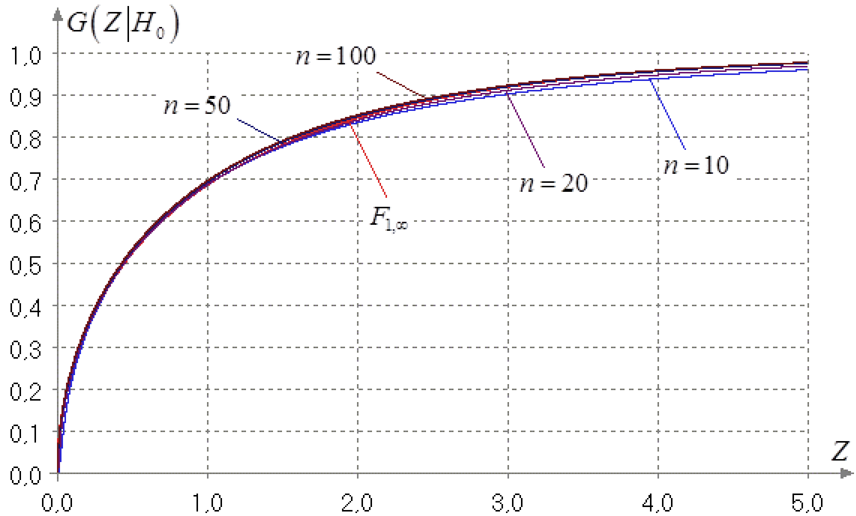

Рис. 4.29. Сходимость распределения статистики модифицированного Z–критерия к предельному $F_{k-1,\infty}$-распределению (при $n=n_1=n_2$, $k=2$)

Распределение статистики модифицированного Z–критерия действительно обладает большей стабильностью к нарушению стандартного предположения о нормальности. При симметричности наблюдаемых законов явное отличие распределения модифицированной статистики, от имеющего место при нормальном законе, проявляется лишь при тяжёлых хвостах (см. рис. 4.30). Однако, соотношение (4.17), по-видимому, не обладает необходимой точностью, так как в случае модифицированного Z–критерия нарушается общий для всех параметрических критериев монотонный характер зависимости распределений статистик от степени отклонения наблюдаемого закона от нормального.

Отметим, что борьба за устойчивость привела не только к ухудшению сходимости распределения статистики модифицированного Z–критерия к $F_{k-1,\infty}$-распределению, но и к некоторому снижению мощности критерия.

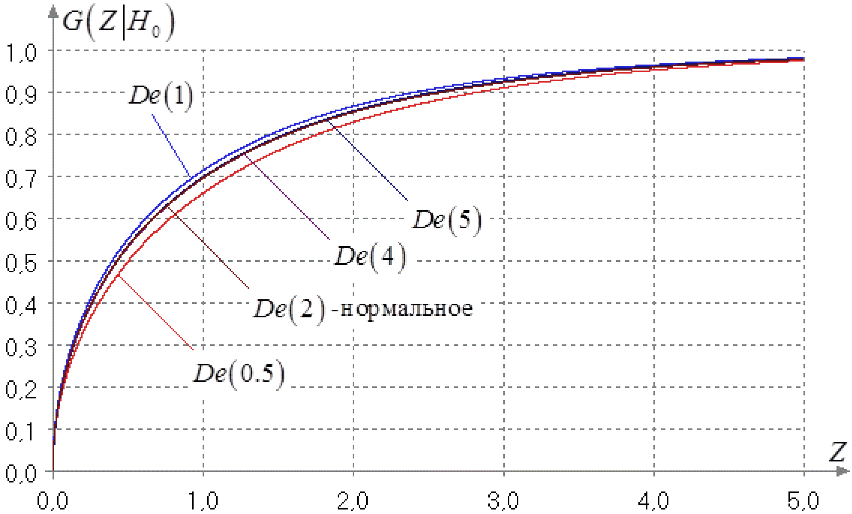

Рис. 4.30. Зависимость распределения статистики модифицированного Z–критерия от вида закона семейства (4.3) (при $n = 100,\ \ m = 2$)

4.1.14. Критерий Миллера

Миллер [53] предложил критерий однородности дисперсий, базирующийся на F-преобразовании Фишера для выборочных дисперсий. Лайард [30] обобщил двухвыборочный критерий Миллера на случай k выборок.

Статистика k-выборочного критерия Миллера имеет вид

$$M = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i \left(\bar{U}_{i\bullet} - \bar{U}_{\bullet\bullet}\right)^2 \Big/ (k-1)}{\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} \left(U_{ij} - \bar{U}_{i\bullet}\right)^2 \Big/ (n-k)}, \tag{4.18}$$

где

$$U_{ij} = n_i \ln S_i^2 - (n_i - 1) \ln S_{i(j)}^2 ;$$

$$S_i^2 = \frac{1}{n_i - 1} \sum_{j=1}^{n_i} \left(x_{ij} - \bar{x}_i\right)^2 ;\ \bar{x}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij} ;$$

$$S_{i(j)}^2 = \frac{1}{n_i - 2} \sum_{l \ne j} \left(x_{il} - \bar{x}_{i(j)}\right)^2 ; \qquad \bar{x}_{i(j)} = \frac{1}{n_i - 1} \sum_{l \ne j} x_{il} ;$$

$$\overline{U}_{i\bullet} = \frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i} U_{ij}\ ;\ \ \overline{U}_{\bullet\bullet} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} U_{ij}\ ;\ \ n = \sum_{i=1}^{k} n_i\ .$$

При справедливости проверяемой гипотезы H_0 об однородности дисперсий и выполнении предположений о принадлежности выборок нормальным законам статистика (4.18) должна подчиняться F-распределению Фишера с числами степеней свободы $(k-1)$ и $(n-k)$. Проверяемая гипотеза отклоняется при больших значениях статистик.

Отметим, что при малых объёмах выборок распределение $G(M_n|H_0)$ статистики (4.18) Миллера заметно отличается от соответствующего F-распределения. На рис. 4.31 показано отклонение реального распределения $G(M_n|H_0)$ от F-распределения для $k=4$ при объёмах сравниваемых выборок $n_i=10$. Реально отклонением распределения $G(M_n|H_0)$ статистики от распределения Фишера с $(k-1)$ и $(n-k)$ степенями свободы можно пренебречь при $n_i > 40 \div 50$.

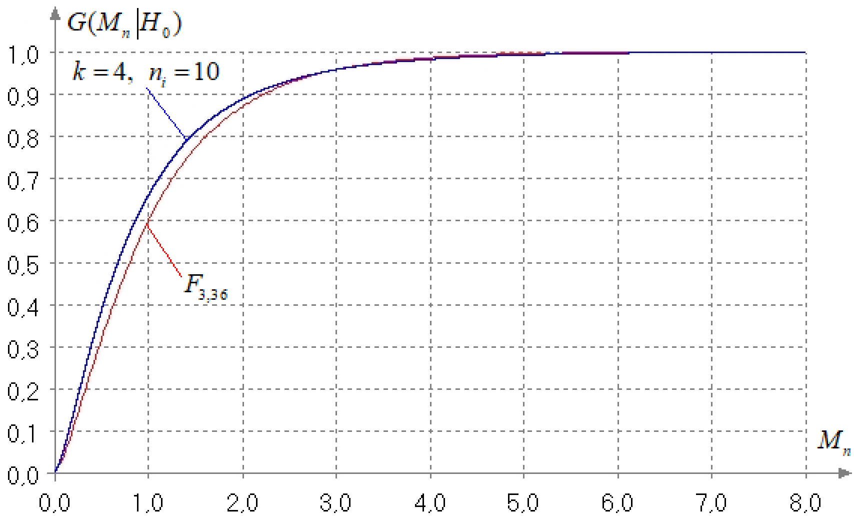

Рис. 4.31. Отклонение распределения статистики (4.18) от $F_{k-1,\,n-k}$-распределения

Распределения статистики (4.18) чувствительны к нарушению предположения о нормальности анализируемых выборок.

4.1.15. Критерий Лайарда

Лайард [30] представил критерий со статистикой, в которой используется функция эксцесса нескольких выборок для проверки однородности дисперсий.

Статистика критерия Лайарда определяется выражением

$$L = \sum_{i=1}^{k} (n_i - 1) \frac{\left(\ln S_i^2 - T\right)^2}{\delta^2}, \tag{4.19}$$

где

$$T = \left[\sum_{i=1}^{k} (n_i - 1) \ln S_i^2 \right] \Big/ (n-k)\,; \quad n = \sum_{i=1}^{k} n_i\,; \quad \delta^2 = 2 + \gamma \left[1 - k/n\right];$$

$$\gamma = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} n_i^2 \left[\sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x}_i)^4 \Big/ \left(\sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x}_i)^2 \right)^2 \right] - 3. \tag{4.20}$$

Здесь γ – взвешенное среднее коэффициентов эксцесса k выборок.

Автор критерия далее предпочёл использовать в статистике (4.19) несколько другую оценку коэффициента эксцесса:

$$\hat{\gamma} = n \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x}_i)^4 \Big/ \left[\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x}_i)^2 \right]^2 - 3. \tag{4.21}$$

Проверяемая гипотеза отклоняется при больших значениях статистики (4.19), которая при справедливости проверяемой гипотезы об однородности дисперсий и выполнении предположений о принадлежности выборок нормальным законам асимптотически подчиняется χ^2_{k-1}-распределению.

Однако необходимо отметить, что сходимость распределения статистики $G(L_n | H_0)$ к χ^2_{k-1}-распределению достаточно медленная. Реально отклонением $G(L_n | H_0)$ от χ^2_{k-1}-распределения, например, при $k = 2$ можно пренебречь при $n_i > 300$ (см. рис. 4.32).

Заметим также, что для вычисления статистики (4.19) предпочтительней использовать оценку (4.21), так как в случае применения оценки (4.20) сходимость $G(L_n|H_0)$ к χ^2_{k-1}-распределению несколько хуже.

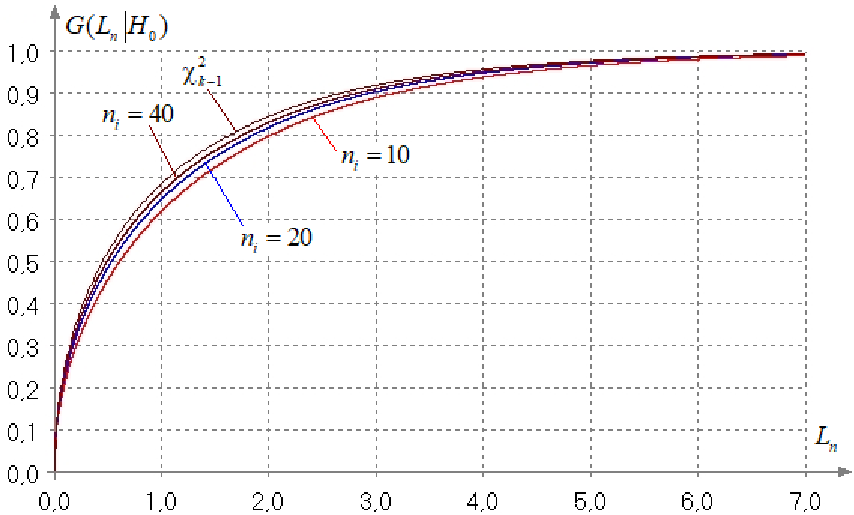

Рис. 4.32. Сходимость распределения статистики (2) к χ^2_{k-1}-распределению

По своим асимптотическим свойствам (и мощности) критерий Лайарда очень близок критерию Миллера и несколько превосходит последний по мощности лишь при малых объёмах выборок.

4.2. Непараметрические критерии однородности дисперсий

4.2.1. Критерий Ансари–Бредли

Непараметрические аналоги критериев проверки однородности дисперсий предназначены для проверки гипотез о принадлежности двух выборок с объемами n_1 и n_2 общей генеральной совокупности с одинаковыми характеристиками рассеяния. При этом, как правило, предполагается равенство средних.

Статистика критерия Ансари–Бредли [1] может быть вычислена следующим образом:

$$S = \sum_{i=1}^{n_1} \left\{ \frac{n_1 + n_2 + 1}{2} - \left| R_i - \frac{n_1 + n_2 + 1}{2} \right| \right\}, \tag{4.22}$$

где R_i – ранги элементов первой выборки в общем вариационном ряду. Проверяемая гипотеза не отклоняется при $S_{\alpha/2} < S < S_{1-\alpha/2}$. Критические значения статистики для $n_1, n_2 \le 10$ доступны в таблице, приведенной, например, в [82], а для больших значений n_i соответствующая таблица может быть элементарно расширена методами статистического моделирования.

В случае принадлежности выборок случайных величин одному и тому же закону распределение $G\left(S \middle| H_0\right)$ статистики (4.22) при справедливости проверяемой гипотезы H_0 не зависит от вида этого закона.

Математическое ожидание и дисперсия статистики (4.22) имеют вид

$$E[S] = \begin{cases} \dfrac{n_1(n_1 + n_2 + 2)}{4} & \text{при четном } (n_1 + n_2), \\ \dfrac{n_1(n_1 + n_2 + 1)^2}{4(n_1 + n_2)} & \text{при нечетном } (n_1 + n_2); \end{cases}$$

$$D[S] = \begin{cases} \dfrac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)(n_1 + n_2 + 2)}{48(n_1 + n_2 - 1)} & \text{при четном } (n_1 + n_2), \\ \dfrac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 + 1)\left[(n_1 + n_2)^2 + 3 \right]}{48(n_1 + n_2)^2} & \text{при нечетном } (n_1 + n_2). \end{cases}$$

При объемах выборок $n_1, n_2 > 10$ дискретное распределение нормированной статистики

$$S^* = (S - E[S]) / \sqrt{D[S]} \tag{4.23}$$

достаточно хорошо приближается стандартным нормальным законом. В этом случае проверяемая гипотеза не отклоняется при $N^*_{\alpha/2} < S^* < N^*_{1-\alpha/2}$, где N^*_α – соответствующая квантиль стандартного нормального закона. Дискретностью распределений статистик (4.22) и (4.23) практически можно пренебречь, начиная с $n_1, n_2 > 40$.

На рис. 4.33 приведены графики распределения нормированной статистики S^* критерия Ансари–Бредли при справедливости различных конкурирующих гипотез H_0, H_1, H_2, H_3 при объемах выборок $n_1 = n_2 = 10$, принадлежащих семейству распределений (4.3) с параметром формы $\theta_2 = 3$.

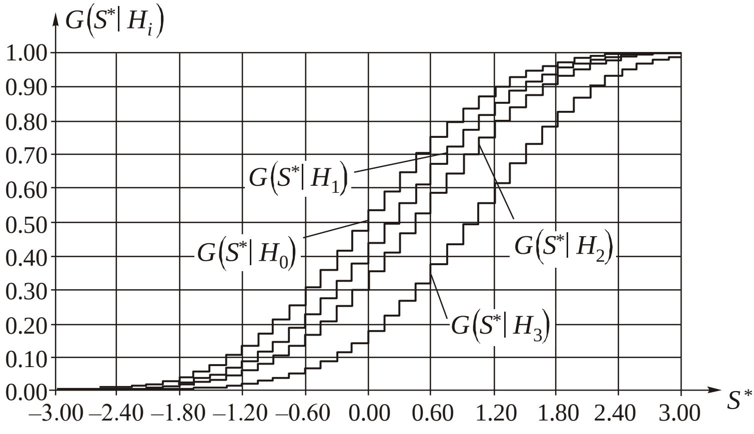

Рис. 4.33. Распределения $G(S^* | H_i)$ нормированной статистики критерия Ансари–Бредли [выборки объемом $n_1 = n_2 = 10$ принадлежат $\mathrm{De}(3)$]

4.2.2. Критерий Муда

Статистика критерия имеет вид [55, 65]

$$M = \sum_{i=1}^{n_1} \left(R_i - \frac{n_1 + n_2 + 1}{2} \right)^2 , \qquad (4.24)$$

где R_i – ранги элементов первой выборки в общем вариационном ряду двух выборок. Проверяемая гипотеза не отклоняется при $M_{\alpha/2} < M < M_{1-\alpha/2}$. Критические значения данной статистики для $n_1, n_2 \le 10$ доступны в [82], а для больших значений n_i таблица может быть легко расширена методами статистического моделирования.

При $n_1, n_2 > 10$ распределение нормированной статистики

$$M^* = \frac{\left(M - E[M] + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{D[M]}}, \tag{4.25}$$

где

$$E[M] = \frac{n_1(n_1 + n_2 + 1)(n_1 + n_2 - 1)}{12},$$

$$D[M] = \frac{n_1 n_2 \left(n_1 + n_2 + 1\right)(n_1 + n_2 + 2)(n_1 + n_2 - 2)}{180},$$

хорошо приближается стандартным нормальным законом [29], а при $n_1, n_2 > 20$, как показали исследования, дискретностью распределений статистик (4.24), (4.25) вообще можно пренебречь. При использовании статистики (4.25) проверяемая гипотеза не отклоняется при $N^*_{\alpha/2} < M^* < N^*_{1-\alpha/2}$.

На рис. 4.34 представлены распределения нормированной статистики (4.25) критерия Муда при справедливости различных конкурирующих гипотез H_0, H_1, H_2, H_3 при объемах выборок $n_1 = n_2 = 10$, принадлежащих семейству распределений (4.3) с параметром формы $\theta_2 = 3$. Как можно заметить, проблемы с дискретностью этой статистики существенно меньше, чем со статистикой критерия Ансари–Бредли (см. рис. 4.33).

Критерий показывает мощность несколько выше по сравнению с критерием Ансари–Бредли.

4.2.3. Критерий Сижела–Тьюки

Статистика критерия строится следующим образом [64]. Вариационный ряд, построенный по объединенной выборке, $x_1 \le x_2 \le ... \le x_n$, где $n = n_1 + n_2$, преобразуется в последовательность вида

$$x_1, x_n, x_{n-1}, x_2, x_3, x_{n-2}, x_{n-3}, x_4, x_5, \ldots,$$

т. е. оставшийся ряд «переворачивается» каждый раз после приписывания рангов паре крайних значений. В качестве статистики критерия используется сумма рангов элементов первой выборки.

Статистика критерия имеет вид

$$R = \sum_{i=1}^{n_1} R_i \ . \tag{4.26}$$

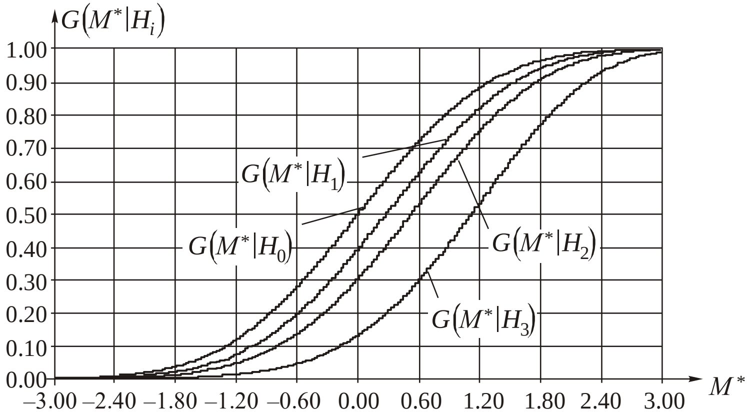

Рис. 4.34. Распределения $G(M^* \mid H_i)$ статистики нормированного критерия Муда [выборки объемом $n_1 = n_2 = 10$ принадлежат De(3)]

Проверяемая гипотеза не отклоняется при $R_{\alpha/2} < R < R_{1-\alpha/2}$. Статистика критерия Сижела–Тьюки является аналогом критерия Манна–Уитни, но предназначенным для проверки гипотез об однородности параметров масштаба. Поэтому при проверке гипотезы могут использоваться квантили распределения статистики Манна–Уитни [82].

При $n_1, n_2 > 10$ распределение нормированной статистики

$$R^* = (R - E[R]) / \sqrt{D[R]}, \tag{4.27}$$

где

$$E[R] = \frac{n_1(n_1 + n_2 + 1)}{2}, \quad D[R] = \frac{n_1 n_2 \left(n_1 + n_2 + 1\right)}{12},$$

достаточно хорошо приближается стандартным нормальным законом. В этом случае проверяемая гипотеза не отклоняется при $N^*_{\alpha/2} < R^* < N^*_{1-\alpha/2}$. При этом дискретностью распределения статистики можно практически пренебречь с $n_1, n_2 > 30$.

На рис. 4.35 приведены распределения нормированной статистики (4.27) критерия Сижела–Тьюки при справедливости различных конкурирующих гипотез H_0, H_1, H_2, H_3 при объемах выборок $n_1 = n_2 = 10$, принадлежащих семейству распределений (4.3). Можно заметить, что данная статистика более дискретна по сравнению со статистикой Муда, но менее – по сравнению со статистикой критерия Ансари–Бредли (см. рис. 4.33 и 4.34).

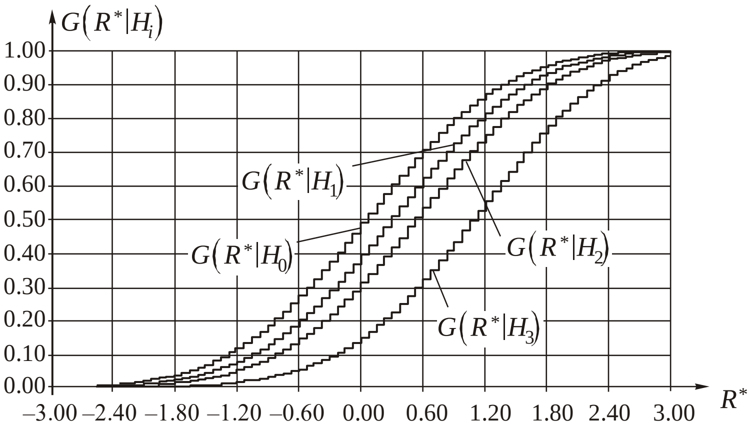

Рис. 4.35. Распределения $G(R^* \mid H_i)$ статистики нормированного критерия Сижела–Тьюки [выборки объемом $n_1 = n_2 = 10$ принадлежат De(3)]

По мощности критерний эквивалентен критерию Ансари–Бредли.

4.2.4. Критерий Клотца

Статистика критерия имеет вид [26]

$$L=\sum_{i=1}^{n_1} u^2_{R_i/(n_1+n_2+1)}\ , \tag{4.28}$$

где n_1 и n_2 – объемы сравниваемых выборок; R_i – ранг i-го элемента первой выборки в общем упорядоченном по возрастанию ряду (n_1+n_2) значений объединенной выборки; u_γ – γ-квантиль стандартного нормального распределения. Значения $u^2_{i/(N+1)}$, называемые метками критерия, которые несложно вычислить, приведены, например, в [82].

Гипотеза о равенстве параметров масштаба не отклоняется с достоверностью α, если $L_{\alpha/2}<L<L_{1-\alpha/2}$, где критические значения $L_{\alpha/2}$, $L_{1-\alpha/2}$ можно найти в [82].

При $n_1, n_2>10$ нормализованная статистика

$$L^*=\frac{L-E[L]}{\sqrt{D[L]}}\ , \tag{4.29}$$

где

$$E[L]=\frac{n_1}{n_1+n_2}\sum_{i=1}^{n_1+n_2} u^2_{\frac{i}{n_1+n_2+1}}\ ,$$

$$D[L]=\frac{n_1 n_2}{(n_1+n_2)(n_1+n_2-1)}\sum_{i=1}^{n_1+n_2} u^4_{\frac{i}{n_1+n_2+1}}-$$

$$-\frac{n_2}{n_1(n_1+n_2-1)}\left[\frac{n_1}{n_1+n_2}\sum_{i=1}^{n_1+n_2} u^2_{\frac{i}{n_1+n_2+1}}\right]^2,$$

хорошо аппроксимируется стандартным нормальным законом. Гипотеза равенства параметров масштаба не отклоняется с достоверностью α, если $N^*_{\alpha/2} < L^* < N^*_{1-\alpha/2}$, где N^*_{α} – соответствующая квантиль стандартного нормального закона.

Дискретностью распределений статистик критерия можно пренебречь при $n_1, n_2 > 10$ (см. рис. 4.36). При таких же объёмах выборок можно считать несущественным отклонение распределения $G(L^* | H_0)$ статистики (4.25) от аппроксимирующего стандартного нормального закона.

Критерий Клотца демонстрирует мощность, превышающую мощность критерия Муда, который в свою очередь имеет преимущество перед критериями Ансари–Бредли и Сижела–Тьюки.

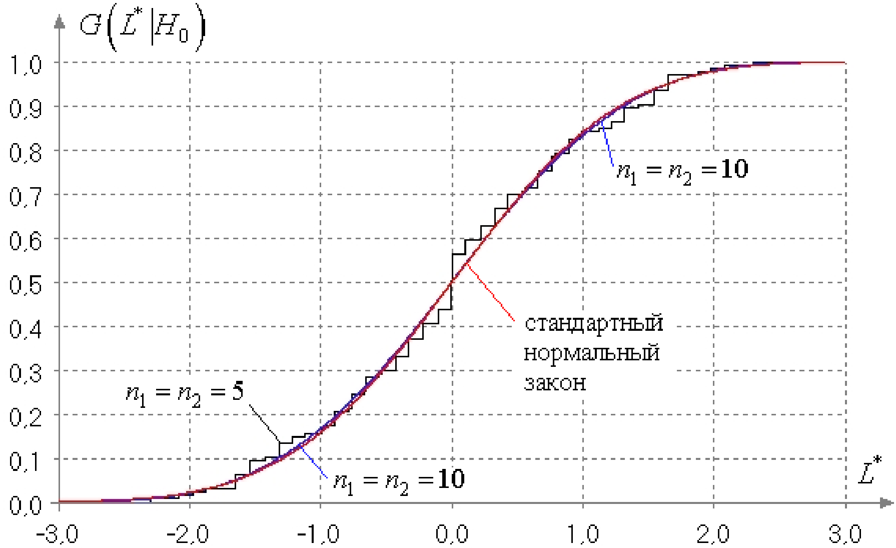

Рис. 4.36. Сходимость распределения $G(L^* | H_0)$ статистики (4.29) к стандартному нормальному закону

Напомним, что корректное применение критерия Клотца, как и других рассмотренных непараметрических критериев, требует выполнения предположения о принадлежности анализируемых выборок одному и тому же виду закона. То есть, при справедливости гипотезы H_0 о равенстве дисперсий распределение статистики (4.29) будет аппроксимироваться стандартным нормальным законом только в том случае, если обе выборки подчиняются или нормальному закону, или равномерному, или любому другому. Предполагается и равенство математических ожиданий.

4.2.5. Критерий Кейпена

Статистика критерия Кейпена [6] задается соотношением

$$K = \sum_{i=1}^{n_1} a_{n_1+n_2}\left(R_i\right), \tag{4.30}$$

где n_1 и n_2 – объемы сравниваемых выборок; R_i – ранг i-го элемента первой (меньшей по объёму) выборки в общем упорядоченном по возрастанию ряду $n = n_1 + n_2$ значений объединенной выборки. Метки $a_n\left(i\right)$ представляют собой квадрат математического ожидания i-й порядковой статистики в выборке объема n из стандартного нормального закона и приближённо определяются соотношением $a_n\left(i\right) = u^2_{(i-3/8)/(n+1/4)}$, где u_γ – γ-квантиль стандартного нормального распределения. Значения $a_n\left(i\right)$ для некоторых n приведены, например, в [82].

Гипотеза о равенстве параметров масштаба не отклоняется с достоверностью α, если $K_{\alpha/2} < K < K_{1-\alpha/2}$, где критические значения $K_{\alpha/2}$, $K_{1-\alpha/2}$ также можно найти в [82].

При $n_1, n_2 > 10$ справедлива нормальная аппроксимация

$$K^* = \frac{K - E[K]}{\sqrt{D[K]}}, \tag{4.31}$$

где

$$E[K] = n_1, \quad D[K] = \frac{n_1 n_2}{\left(n_1 + n_2\right)\left(n_1 + n_2 - 1\right)} \sum_{i=1}^{n_1+n_2} a^2_{n_1+n_2}(i) - \frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2 - 1}.$$

Гипотеза равенства параметров масштаба не отклоняется с достоверностью α, если $N^*_{\alpha/2} < K^* < N^*_{1-\alpha/2}$.

Распределения статистики (4.31) критерия Кейпена, как и критерия Клотца (4.29), с ростом объёмов выборок быстро сходятся к стандартному нормальному закону.

По своим свойствам и мощности критерий эквивалентен критерию Клотца.

4.2.6. k-выборочный критерий Флайне–Киллина

Модифицированный в [11] непараметрический критерий Флайне–Киллина [17] предназначен для проверки однородности дисперсий $k \geq 2$ выборок с объёмами n_i, $i = \overline{1,k}$. Статистика критерия формируется следующим образом.

По исходным выборкам вычисляются абсолютные значения $z_{ji} = \left| x_{ji} - \tilde{x}_i \right|$, где $\tilde{x}_i$ – выборочная медиана i-й выборки, $i = \overline{1,k}$. Далее строится вариационный ряд объединённой выборки z_{ji}, $j = \overline{1,n_i}$, $i = \overline{1,k}$. Для элементов i-й выборки на основании рангов R_{ji} её элементов z_{ji} в объединённой выборке строятся метки

$$a_{n,R_{ji}} = \Phi^{-1}\left(\frac{1 + R_{ji} / (n+1)}{2}\right), \; j = \overline{1,n_i},$$

где $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$, находятся $\bar{A}_i = \frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i} a_{n,R_{ji}}$. Статистика критерия имеет вид:

$$\chi_0^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i \left(\bar{A}_i - \bar{a}\right)^2}{V^2}, \tag{4.32}$$

где $\bar{a} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_{n,j}$, $V^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}\left(a_{n,j} - \bar{a}\right)^2$.

Асимптотическим распределением статистики (4.32) при справедливости H_0 и больших объёмах выборок является χ^2_{k-1}-

распределение.

При малых объёмах выборок распределение статистики дискретное. Сходимость распределений $G(\chi_0^2|H_0)$ статистики (4.32) с ростом объёмов выборок к χ_{k-1}^2-распределению в случае принадлежности сравниваемых выборок нормальному закону при $k=2$ и равных n_i иллюстрирует рис. 4.36. Отклонением реального распределения статистики от χ_{k-1}^2-распределения в ситуации принадлежности выборок нормальному закону можно пренебречь при объёмах анализируемых выборок порядка 100. С ростом числа сравниваемых выборок k сходимость к соответствующему χ_{k-1}^2-распределению не улучшается, но и сильно не ухудшается.

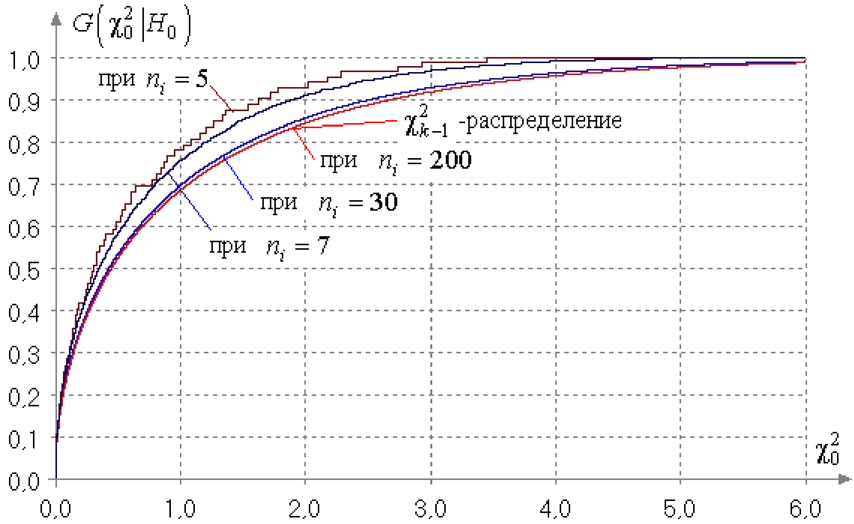

Рис. 4.36. Сходимость распределения $G(\chi_0^2 \mid H_0)$ статистики (4.32) к χ_{k-1}^2-распределению при $k=2$ и $n_1=n_2$

При ограниченных объёмах выборок распределения $G(\chi_0^2|H_0)$ статистики (4.32) зависят от закона, которому принадлежат выборки. В качестве примера на рис. 4.37 показаны распределения $G(\chi_0^2|H_0)$ в случае принадлежности обеих сравниваемых выборок законам: равномерному, нормальному, обобщенному нормальному (4.3) с параметром формы 0.5 (с тяжёлыми хвостами), экспоненциальному и логарифмически нормальному при $k=2$ и $n_i=30$.

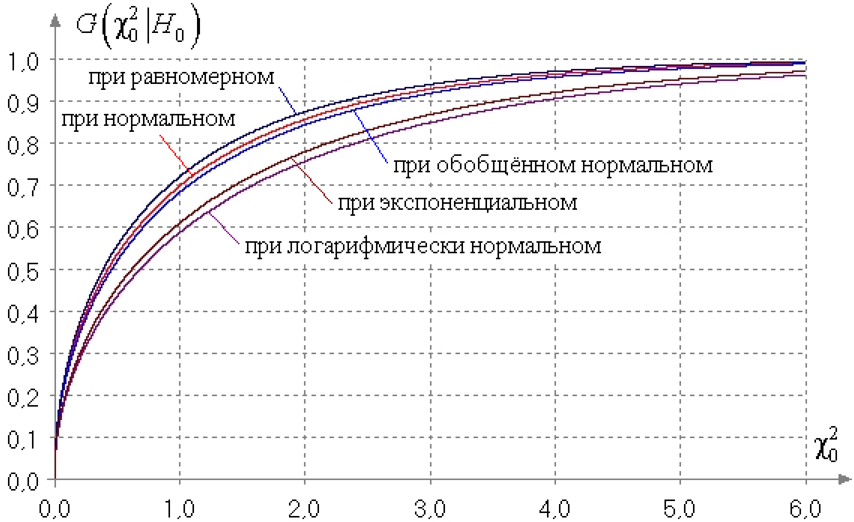

Рис. 4.37. Зависимость распределений $G(\chi_0^2 \mid H_0)$ статистики (4.32) от закона, которому принадлежат выборки, при $k=2$ и $n_1=n_2=30$

Исходный критерий Флайне–Киллина [17] был построен в предположении о принадлежности анализируемых выборок симметричным законам. Именно в такой ситуации асимптотическим распределением статистики (4.32) оказывается χ_{k-1}^2-распределение. На рис. 4.38 показаны распределения статистики (4.32) в случае принадлежности пары сравниваемых выборок тем же законам, что и на рис. 4.37, но при $n_i=200$. Как можно видеть, в случае принадлежности выборок симметричным законам, распределения статистики сходятся к χ_{k-1}^2-распределению, а при асимметричных законах – к некоторым другим предельным распределениям, существенно отличающимся от χ^2_{k-1}-распределения. Сходимость распределений статистики (4.32) к χ^2_{k-1}-распределению при симметричных законах, отличных от нормального, более медленная, чем при нормальном.

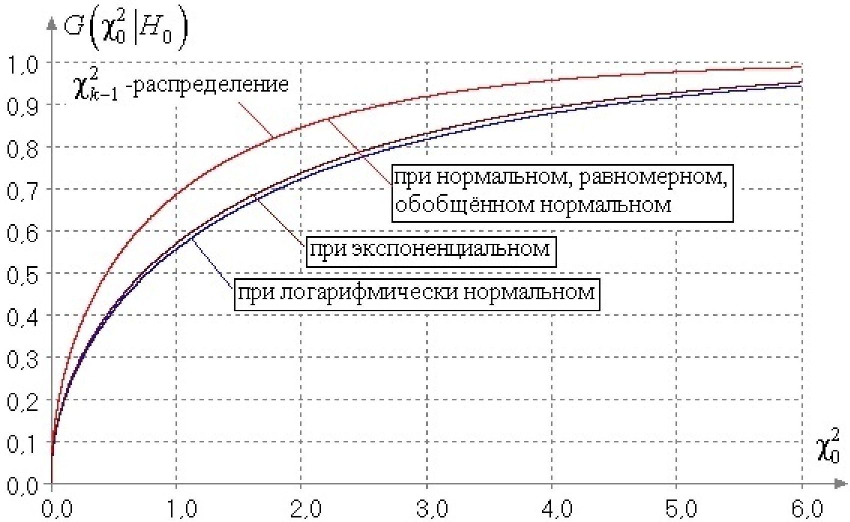

Рис. 4.38. Распределения $G(\chi_0^2 \mid H_0)$ статистики (4.32) при различных законах, которым принадлежат пары сравниваемых выборок, при $k = 2$ и $n_1 = n_2 = 200$

Предположение о симметричности закона распределения, которым принадлежат сравниваемые выборки, и которое может не выполняться, а также зависимость распределения статистики при ограниченных объёмах выборок от n_i и от вида симметричного закона, существенно ограничивают возможность формирования корректного статистического вывода по результатам проверки гипотезы.

4.3. Сравнительный анализ мощности критериев

Критерии проверки гипотез об однородности дисперсий применяются в различных приложениях при обработке результатов измерений.

В связи с применением критериев однородности дисперсий на практике специалистов давно волнуют две связанные проблемы. Первая заключается в крайней неустойчивости большей части существующих параметрических критериев однородности дисперсий, а вторая касается оценки мощности критериев.

Вопросам анализа мощности среди множества публикаций посвящены работы [31, 11, 50], и эти же вопросы рассматривались в [35, 40, 95, 96, 101, 41, 42, 43, 44].

Качество статистических выводов, осуществляемых по результатам проводимого анализа, обеспечивается корректностью применения соответствующих критериев и использованием критериев, обладающих лучшими свойствами (большей мощностью). Поэтому специалист, столкнувшийся с необходимостью статистического анализа результатов измерений, должен выбирать среди тех критериев, которые способны обеспечить корректность принимаемого решения о результатах проверки гипотезы в условиях предположений, характеризующих анализируемый измерительный процесс. И при этом отдать предпочтение критерию, обладающему в этих условиях большей мощностью.

Стандартным предположением, обуславливающим возможность применения классических параметрических критериев однородности дисперсий, является принадлежность анализируемых выборок нормальному закону распределения. Это условие резко ограничивает область применения параметрических критериев, так как делает невозможным использование классических результатов, связанных с распределениями статистик критериев при справедливости H_0, которые были получены именно при данном предположении.

На непараметрические аналоги такого рода критериев, в которых по существу проверяется гипотеза о равенстве параметров масштаба, подобного ограничения не накладывается.

В работах [35, 40, 95, 96, 101, 41, 99] был проведен сравнительный анализ мощности и исследованы свойства ряда параметрических

(Бартлетта, Кокрена, Фишера, Хартли, Левене) и непараметрических (Ансари–Бредли, Муда, Сижела–Тьюки, Кейпена, Клотца) критериев, в том числе в условиях нарушения стандартных предположений. В [42, 43, 44, 97, 98, 60] эти исследования были дополнены.

Было показано, что при $k = 2$ параметрические критерии Бартлетта, Кокрена, Фишера и Хартли являются эквивалентными, а при $k > 2$ преимущество оказывается за критерием Кокрена. При этом мощность параметрических критериев существенно выше непараметрических аналогов.

Оказалось, что свойство “непараметричности” непараметрических критериев очень ограничено. Да, распределения статистик непараметрических критериев при справедливости H_0 не зависят от вида закона, которому принадлежат анализируемые выборки, но при этом выборки <u>должны принадлежать одному виду закона</u>. Например, это означает, что при справедливости $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ асимптотическим распределением нормализованных статистик этих критериев будет являться стандартный нормальный закон только в том случае, если выборки принадлежат одному и тому же виду закона (то есть, принадлежат одной генеральной совокупности, так как предполагается и равенство математических ожиданий). Необходимость выполнения такой предпосылки существенно ограничивает область корректного применения непараметрических критериев.

Явное преимущество в мощности параметрических критериев заставляет рассмотреть возможность их применения в условиях нарушения классического предположения о нормальности (в условиях принадлежности выборок различным законам [96, 41, 20]).

Содержание данного раздела руководства расширяет исследования в [40, 95, 96, 41]. Выводы, изложенные в [35, 40, 95, 96, 101, 41, 99], дополнены результатами сравнительного анализа ещё ряда параметрических критериев однородности дисперсий: Неймана–Пирсона [82], О’Брайена [67], Линка (отношения размахов) [51], Ньюмана (стьюдентизированного размаха) [57], Блисса–Кокрена–Тьюки [4], Кадуэлла–Лесли–Брауна [47], Миллера [53, 30], Лайарда [30], Z-критерия Оверолла–Вудворда [68] и модифицированного Z-критерия [69]. Рассмотрено применение непараметрического k-выборочного критерия Флайне–Киллина [17].

Исследование распределений статистик и оценка мощности критериев относительно различных конкурирующих гипотез осуществлялась методами статистического моделирования [105] при использовании программной системы ISW [111]. Число статистических экспериментов при моделировании выборок статистик составляло величину порядка $N = 10^6$. При таких величинах N разность между истинным законом распределения статистики и смоделированным эмпирическим, как правило, по модулю не превышает величины 10^{-3}.

В условиях нарушения стандартного предположения о нормальности распределения статистик критериев исследовались в случае принадлежности выборок обобщённому нормальному закону с плотностью (4.3) при различных значениях параметра формы.

В данном случае при анализе мощности критериев проверяемая гипотеза имела вид $H_0:\ \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = ... = \sigma_k^2 = \sigma_0^2$. В качестве конкурирующих гипотез рассматривались ситуации, когда $k-1$ выборка принадлежала закону с некоторым $\sigma = \sigma_0$, а одна из выборок, например, с номером k принадлежала закону с отличающимся значением σ ($H_1:\ \sigma_k = 1.1\sigma_0$, $H_2:\ \sigma_k = 1.2\sigma_0$, $H_3:\ \sigma_k = 1.5\sigma_0$). В сравнительном анализе кроме вышерассмотренных приняли участие также критерии Бартлетта, Кокрена, Левене, Хартли, Фишера, оценки мощности которых были взяты из [40, 95, 96].

Полученные оценки мощности всех рассматриваемых критериев в случае принадлежности выборок нормальному закону для уровней значимости $\alpha = 0.1,\ 0.05,\ 0.01$ при $k = 2$ и $n_i = n$ представлены в таблицах 4.2–4.4, где критерии упорядочены по убыванию мощности. В этих же таблицах для сравнения представлены оценки мощности непараметрических критериев Муда, Ансари–Бредли и Сижела–Тьюки [96, 41].

Критерий Неймана–Пирсона и Z–критерий Оверолла–Вудворда по мощности оказались эквивалентны критериям Бартлетта, Кокрена, Хартли и Фишера.

Другую группу практически эквивалентных по мощности критериев образуют критерии Лайарда, Миллера, О’Брайена и модифицированный Z–критерий. Некоторое преимущество имеет пара критериев Лайарда, Миллера. Различие в мощности модифицированного Z–критерия и критерия О’Брайена заметно только относительно достаточно далёкой конкурирующей гипотезы H_3. При этом эта группа имеет преимущество в мощности по сравнению с критерием Левене. Считается, что, как и последний, эти критерии достаточно устойчивы к нарушению стандартного предположения о нормальности анализируемых выборок.

Критерий Ньюмана с ростом объёмов выборок всё заметнее уступает в мощности критерию Левене. В то же время он имеет явное преимущество в мощности (за исключением $n=10$) по сравнению с критериями Блисса–Кокрена–Тьюки, Кадуэлла–Лесли–Брауна и Линка. Три последних эквивалентны по мощности.

Следует отметить, что критерии О'Брайена, Левене и модифицированный Z–критерий, относящиеся к группе "устойчивых" критериев, при малых объёмах выборок (см. при $n=10$) уступают в мощности критериям Ньюмана, Линка, Блисса–Кокрена–Тьюки и Кадуэлла–Лесли–Брауна, но с ростом n имеет явное преимущество перед последними, а также перед непараметрическими критериями.

Естественно, что непараметрические критерии существенно уступают в мощности большинству из рассмотренным параметрических критериев.

Исключение составляют параметрические критерии Ньюмана, Блисса–Кокрена–Тьюки, Кадуэлла–Лесли–Брауна и Линка: они имеют некоторое преимущество в мощности над непараметрическими критериями лишь при малых объёмах выборок ($n_i = 10 \div 20$), а при увеличении n_i заметно уступают всем непараметрическим критериям.

Таблица 4.2

Мощность критериев однородности дисперсий относительно конкурирующей гипотезы $H_1: \ \sigma_2 = 1.1\sigma_1$

Критерий	α	Объем выборки				
		$n=10$	$n=20$	$n=40$	$n=60$	$n=100$
Бартлетта, Кокрена, Хартли, Фишера, Неймана–Пирсона, Z–критерий Оверолла–Вудворда	0.1	0.112	0.128	0.157	0.188	0.246
	0.05	0.058	0.068	0.090	0.111	0.156
	0.01	0.012	0.016	0.023	0.032	0.051
Лайарда	0.1	0.110	0.125	0.155	0.185	0.243
	0.05	0.057	0.066	0.087	0.108	0.153
	0.01	0.012	0.015	0.022	0.030	0.049

Окончание таблицы 4.2

Критерий	α	Объем выборки				
		$n=10$	$n=20$	$n=40$	$n=60$	$n=100$
Миллера	0.1	0.110	0.125	0.154	0.185	0.243
	0.05	0.056	0.066	0.087	0.109	0.153
	0.01	0.012	0.015	0.022	0.030	0.049
Модифицированный Z–критерий, О'Брайена	0.1	0.109	0.125	0.154	0.184	0.243
	0.05	0.056	0.066	0.087	0.108	0.153
	0.01	0.012	0.015	0.022	0.030	0.049
Клотца	0.1	0.109	0.123	0.151	0.181	0.236
	0.05	0.056	0.065	0.085	0.106	0.149
	0.01	0.012	0.015	0.021	0.030	0.047
Левене	0.1	0.110	0.123	0.150	0.176	0.228
	0.05	0.056	0.065	0.084	0.103	0.141
	0.01	0.012	0.014	0.021	0.028	0.044
Флайне–Киллина	0.1	0.108	0.121	0.147	0.172	0.223
	0.05	0.055	0.064	0.082	0.100	0.139
	0.01	0.012	0.014	0.020	0.027	0.043
Муда	0.1	0.108	0.120	0.143	0.166	0.212
	0.05	0.055	0.064	0.079	0.096	0.130
	0.01	0.012	0.014	0.020	0.026	0.040
Ньюмана	0.1	0.111	0.123	0.143	0.159	0.186
	0.05	0.057	0.066	0.080	0.091	0.112
	0.01	0.012	0.015	0.020	0.025	0.033
Ансари–Бредли	0.1	0.109	0.125	0.138	0.154	0.190
	0.05	0.056	0.064	0.074	0.089	0.114
	0.01	0.016	0.014	0.018	0.023	0.034
Сижела–Тьюки	0.1	0.107	0.120	0.137	0.154	0.190
	0.05	0.054	0.061	0.074	0.088	0.114
	0.01	0.012	0.014	0.018	0.023	0.033
Блисса–Кокрена–Тьюки, Кадуэлла–Лесли–Брауна, Линка	0.1	0.111	0.119	0.133	0.141	0.154
	0.05	0.057	0.063	0.072	0.078	0.087
	0.01	0.012	0.014	0.018	0.019	0.023

Таблица 4.3

Мощность критериев однородности дисперсий относительно конкурирующей гипотезы $H_2:\ \sigma_2 = 1.2\sigma_1$

Критерий	α	Объем выборки				
		$n=10$	$n=20$	$n=40$	$n=60$	$n=100$
Бартлетта, Кокрена, Хартли, Фишера, Неймана–Пирсона, Z–критерий Оверолла–Вудворда	0.1	0.144	0.199	0.304	0.401	0.564
	0.05	0.079	0.119	0.201	0.283	0.438
	0.01	0.018	0.033	0.071	0.114	0.218
Лайарда	0.1	0.139	0.193	0.295	0.391	0.557
	0.05	0.075	0.112	0.190	0.270	0.428
	0.01	0.017	0.030	0.062	0.104	0.205
Миллера	0.1	0.137	0.191	0.294	0.391	0.557
	0.05	0.074	0.112	0.191	0.271	0.429
	0.01	0.017	0.031	0.064	0.105	0.207
Модифицированный Z–критерий, О’Брайена	0.1	0.134	0.188	0.292	0.389	0.555
	0.05	0.071	0.109	0.189	0.269	0.427
	0.01	0.016	0.029	0.062	0.104	0.205
Клотца	0.1	0.133	0.183	0.280	0.376	0.540
	0.05	0.071	0.107	0.181	0.260	0.412
	0.01	0.017	0.029	0.060	0.101	0.196
Левене	0.1	0.135	0.184	0.276	0.363	0.515
	0.05	0.072	0.107	0.177	0.250	0.388
	0.01	0.016	0.028	0.058	0.095	0.180
Флайне–Киллина	0.1	0.131	0.177	0.266	0.351	0.503
	0.05	0.070	0.103	0.170	0.239	0.376
	0.01	0.016	0.027	0.055	0.090	0.173
Муда	0.1	0.130	0.172	0.253	0.331	0.470
	0.05	0.069	0.101	0.160	0.224	0.347
	0.01	0.016	0.027	0.052	0.082	0.155
Ньюмана	0.1	0.140	0.183	0.251	0.304	0.386
	0.05	0.077	0.108	0.161	0.203	0.276
	0.01	0.018	0.030	0.053	0.075	0.116

Окончание таблицы 4.3

Критерий	α	Объем выборки				
		$n=10$	$n=20$	$n=40$	$n=60$	$n=100$
Ансари–Бредли	0.1	0.133	0.171	0.232	0.290	0.405
	0.05	0.072	0.096	0.140	0.193	0.289
	0.01	0.023	0.025	0.044	0.067	0.120
Сижела–Тьюки	0.1	0.128	0.166	0.228	0.290	0.405
	0.05	0.069	0.093	0.140	0.191	0.290
	0.01	0.017	0.026	0.044	0.067	0.120
Блисса–Кокрена–Тьюки, Кадуэлла–Лесли–Брауна, Линка	0.1	0.139	0.171	0.216	0.246	0.289
	0.05	0.075	0.100	0.133	0.156	0.190
	0.01	0.018	0.027	0.042	0.051	0.068

Таблица 4.4

Мощность критериев однородности дисперсий относительно конкурирующей гипотезы $H_3: \ \sigma_2 = 1.5\sigma_1$

Критерий	α	Объем выборки				
		$n=10$	$n=20$	$n=40$	$n=60$	$n=100$
Бартлетта, Кокрена, Хартли, Фишера, Неймана–Пирсона, Z–критерий Оверолла–Вудворда	0.1	0.312	0.532	0.806	0.926	0.991
	0.05	0.201	0.402	0.705	0.871	0.980
	0.01	0.064	0.182	0.463	0.692	0.924
Лайарда	0.1	0.289	0.503	0.787	0.918	0.990
	0.05	0.179	0.364	0.672	0.852	0.977
	0.01	0.053	0.149	0.399	0.641	0.906
Миллера	0.1	0.281	0.500	0.786	0.918	0.990
	0.05	0.174	0.364	0.675	0.853	0.977
	0.01	0.051	0.153	0.411	0.648	0.910
О’Брайена	0.1	0.266	0.490	0.783	0.917	0.990
	0.05	0.155	0.344	0.664	0.849	0.976
	0.01	0.039	0.127	0.379	0.628	0.903
Модифицированный Z–критерий	0.1	0.265	0.489	0.781	0.916	0.990
	0.05	0.158	0.348	0.666	0.849	0.976
	0.01	0.043	0.138	0.397	0.639	0.906

Окончание таблицы 4.4

Критерий	α	Объем выборки				
		$n=10$	$n=20$	$n=40$	$n=60$	$n=100$
Клотца	0.1	0.258	0.463	0.754	0.900	0.987
	0.05	0.158	0.334	0.638	0.829	0.971
	0.01	0.047	0.137	0.379	0.619	0.892
Левене	0.1	0.269	0.471	0.746	0.888	0.981
	0.05	0.163	0.338	0.628	0.812	0.960
	0.01	0.045	0.131	0.364	0.590	0.866
Флайне–Киллина	0.1	0.249	0.442	0.719	0.870	0.977
	0.05	0.151	0.315	0.597	0.787	0.952
	0.01	0.043	0.125	0.341	0.559	0.847
Муда	0.1	0.243	0.424	0.688	0.842	0.964
	0.05	0.149	0.303	0.565	0.752	0.932
	0.01	0.045	0.122	0.316	0.516	0.806
Ньюмана	0.1	0.296	0.473	0.682	0.796	0.901
	0.05	0.190	0.348	0.566	0.699	0.840
	0.01	0.060	0.153	0.326	0.473	0.667
Ансари–Бредли	0.1	0.242	0.392	0.616	0.768	0.926
	0.05	0.150	0.268	0.483	0.663	0.870
	0.01	0.059	0.103	0.253	0.417	0.694
Сижела–Тьюки	0.1	0.231	0.384	0.613	0.768	0.926
	0.05	0.142	0.262	0.484	0.661	0.869
	0.01	0.046	0.106	0.254	0.416	0.693
Блисса–Кокрена–Тьюки, Кадуэлла–Лесли–Брауна, Линка	0.1	0.285	0.425	0.584	0.674	0.776
	0.05	0.181	0.305	0.458	0.554	0.671
	0.01	0.057	0.127	0.237	0.314	0.430

В группе непараметрических критериев результаты анализа показывают заметное преимущество в мощности критерия Клотца. Затем следуют критерий Флайне-Киллина и критерий Муда. Ещё меньшую мощность и практическую эквивалентность демонстрируют критерии Ансари–Бредли и Сижела–Тьюки. Некоторый «разнобой» в данных таблицах относительно мощности критериев Муда, Ансари–Бредли и Сижела–Тьюки при объемах выборок $n=10$ и $n=20$

объясняется различной степенью дискретности распределений статистик этих критериев.

Критерии Бартлетта, Кокрена, Хартли, Левене, Неймана–Пирсона, Лаарда, Миллера, О’Брайена, Блисса–Кокрена–Тьюки, Кадуэлла–Лесли–Брауна, Z–критерий Оверолла–Вудворда, модифицированный Z–критерий могут применяться при числе выборок $k > 2$. При $k > 2$ критерии Бартлетта, Кокрена, Хартли, Неймана–Пирсона и Z–критерий Оверолла–Вудворда уже не образуют группу эквивалентных критериев с одинаковой мощностью. Исключение составляют лишь критерии Бартлетта и Неймана–Пирсона, которые остаются практически эквивалентными по мощности, а также пара критериев Миллера и Лайарда.

В таблицах 4.5–4.7 приведены полученные оценки мощности многовыборочных критериев при числе выборок $k = 3$ и $k = 5$ при объёмах выборок $n_i = 100$, $i = \overline{1,k}$, относительно конкурирующих гипотез H_1, H_3, H_3 (при отличающейся дисперсии одной из выборок) в случае принадлежности анализируемых выборок нормальным законам. Критерии в таблицах расположены по убыванию мощности. Приводимые оценки мощности позволяют судить о предпочтительности применения тех или иных критериев.

На первой позиции с явным преимуществом, как и было показано в [40, 95], находится критерий Кокрена. На второй оказывается критерий О’Брайена, однако в случае анализа 3-х выборок и близких конкурирующих гипотез он не имеет заметного преимущества по сравнению с Z–критерием Оверолла–Вудворда, Неймана-Пирсона и Бартлетта. В то же время критерий О’Брайена явно мощнее модифицированного Z–критерия, критериев Хартли, Миллера, Лайарда и критерия Левене. Напомним, что критерий О’Брайена, как и критерий Левене, является устойчивыми к нарушению стандартного предположения о нормальности.

k-выборочные критерии Лайард и Миллера меняются местами, оставаясь примерно на тех же позициях в общем упорядоченном ряду критериев. С увеличением расстояний между конкурирующими гипотезами критерий Блисса–Кокрена–Тьюки демонстрирует более высокую мощность по сравнению с критерием Кадуэлла–Лесли–Брауна.

Т а б л и ц а 4.5

Мощность многовыборочных критериев относительно конкурирующей гипотезы $H_1: \sigma_k = 1.1\sigma_1$, $n_i = 100$, $i = \overline{1,k}$

Критерий	α					
	0.1	0.05	0.01	0.1	0.05	0.01
	$k=3$			$k=5$		
Кокрена	0.250	0.161	0.056	0.241	0.156	0.056
О’Брайена	0.243	0.153	0.051	0.230	0.144	0.048
Z–крит. Оверолла–Вудворда	0.243	0.153	0.051	0.227	0.141	0.046
Неймана–Пирсона, Бартлетта	0.242	0.152	0.049	0.224	0.138	0.044
Модифицированный Z–крит.	0.240	0.150	0.048	0.223	0.137	0.044
Хартли	0.239	0.148	0.046	0.219	0.133	0.040
Миллера	0.237	0.146	0.045	0.216	0.129	0.038
Лайарда	0.236	0.146	0.044	0.215	0.128	0.037
Левене	0.225	0.139	0.043	0.209	0.127	0.039
Флайне–Киллина	0.222	0.137	0.042	0.206	0.124	0.038
Кадуэлла–Лесли–Брауна	0.149	0.083	0.021	0.139	0.075	0.018
Блисса–Кокрена–Тьюки	0.147	0.082	0.021	0.136	0.075	0.019

Т а б л и ц а 4.6

Мощность многовыборочных критериев относительно конкурирующей гипотезы $H_2: \sigma_k = 1.2\sigma_1$, $n_i = 100$, $i = \overline{1,k}$

Критерий	α					
	0.1	0.05	0.01	0.1	0.05	0.01
	$k=3$			$k=5$		
Кокрена	0.609	0.494	0.286	0.624	0.515	0.316
О’Брайена	0.583	0.461	0.247	0.575	0.460	0.258
Z–крит. Оверолла–Вудворда	0.583	0.461	0.246	0.565	0.445	0.241
Неймана–Пирсона	0.580	0.457	0.240	0.557	0.434	0.228
Бартлетта	0.577	0.459	0.237	0.557	0.434	0.227
Модифицированный Z–крит.	0.574	0.449	0.232	0.554	0.433	0.228
Хартли	0.568	0.443	0.217	0.545	0.418	0.204
Миллера	0.565	0.436	0.213	0.530	0.400	0.189
Лайарда	0.564	0.433	0.207	0.527	0.395	0.181
Левене	0.530	0.409	0.200	0.513	0.390	0.197
Флайне–Киллина	0.518	0.395	0.191	0.498	0.378	0.187
Блисса–Кокрена–Тьюки	0.359	0.187	0.068	0.262	0.170	0.061
Кадуэлла–Лесли–Брауна	0.280	0.180	0.061	0.253	0.158	0.052

Т а б л и ц а 4.7

Мощность многовыборочных критериев относительно конкурирующей гипотезы $H_3: \sigma_k = 1.5\sigma_1$, $n_i = 100$, $i = \overline{1,k}$

Критерий	α					
	0.1	0.05	0.01	0.1	0.05	0.01
	$k=3$			$k=5$		
Кокрена	0.997	0.994	0.974	0.998	0.997	0.987
О'Брайена	0.996	0.990	0.961	0.997	0.994	0.976
Z–крит. Оверолла–Вудворда	0.996	0.991	0.964	0.997	0.993	0.974
Неймана–Пирсона, Бартлетта	0.996	0.990	0.962	0.996	0.992	0.970
Модифицированный Z–крит.	0.995	0.989	0.955	0.996	0.991	0.967
Хартли	0.995	0.988	0.947	0.995	0.989	0.955
Миллера	0.995	0.987	0.946	0.994	0.987	0.949
Лайарда	0.994	0.987	0.941	0.994	0.986	0.942
Левене	0.990	0.979	0.926	0.991	0.982	0.944
Флайне–Киллина	0.987	0.973	0.909	0.988	0.977	0.928
Блисса–Кокрена–Тьюки	0.820	0.728	0.501	0.829	0.742	0.524
Кадуэлла–Лесли–Брауна	0.795	0.691	0.444	0.783	0.675	0.432

В процессе дискуссий, связанных с обсуждением достоинств и недостатков параметрических и непараметрических критериев, можно услышать радикальные мнения, суть которых заключается в рекомендации применять только непараметрические критерии. При этом основной и вполне справедливый довод связывают с тем, что на практике закон распределения, которому подчиняются анализируемые выборки, не известен и, как правило, отличается от нормального. Это действительно так. И если обе выборки принадлежат одной и той же генеральной совокупности, распределения $G(S|H_0)$ статистик непараметрических критериев не зависят от вида закона.

Однако если при справедливости гипотезы H_0 о равенстве дисперсий выборки принадлежат разным законам, мы *наблюдаем зависимость* $G(S|H_0)$ *от этих законов*. На рис. 4.39 в качестве примера, подтверждающего этот факт, показаны распределения нормированной статистики (4.25) критерия Муда, когда две выборки с одинаковым объемом $n=10$ подчиняются различным парам законов семейства (4.3) при равенстве дисперсий этих законов.

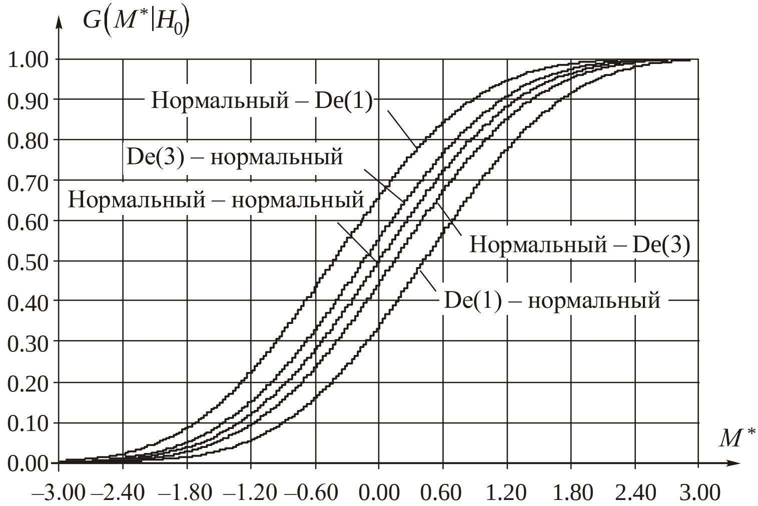

Рис. 4.39. Распределения нормированной статистики критерия Муда при справедливости H_0 в случае принадлежности пары выборок различным законам семейства (4.3)

Как видим, распределение статистики (4.25) зависит и от того, какая по порядку выборка какому закону принадлежит.

Естественно, что для параметрических критериев отмеченная зависимость также характерна, но изменения в такой ситуации, например, распределений статистики критерия Кокрена, на наш взгляд, оказываются несколько меньшими.

4.4. Мощность критериев при нарушении предположения о нормальности

В условиях нарушения стандартного предположения о нормальности мощность критериев исследовалась в ситуации принадлежности выборок обобщённому нормальному закону с плотностью (4.3) при различных значениях параметра формы θ_2. Напомним, что частными случаями этого семейства являются нормальный закон при $\theta_2 = 2$ и распределение Лапласа при $\theta_2 = 1$. Чем меньше значение параметра формы θ_2, тем «тяжелее» хвосты распределения $De(\theta_2)$, чем больше параметр, тем хвосты «легче».

Далее в тексте, таблицах и на рисунках обозначение $De(\theta_2)$ соответствует распределению вида (4.3) при соответствующем значении параметра формы θ_2.

Как и ранее, при анализе мощности критериев в качестве конкурирующих гипотез рассматривались ситуации, когда $k-1$ выборка принадлежала закону с некоторым $\sigma = \sigma_0$, а одна из выборок, например, с номером k принадлежала закону с отличающимся значением σ (H_1: $\sigma_k = 1.1\sigma_0$, H_2: $\sigma_k = 1.2\sigma_0$, H_3: $\sigma_k = 1.5\sigma_0$).

В таблицах 4.8–4.9 приведены оценки мощности 2-выборочных критериев относительно конкурирующих гипотез H_2 и H_3, полученные в случае принадлежности выборок обобщенному нормальному закону (4.3) с различными значениями параметра формы при объемах выборок $n_i = 100$, $i = \overline{1,2}$. В таблицах критерии упорядочены по убыванию мощности в случае нормального закона (см. при $De(2)$). Как можно видеть, порядок предпочтения критериев меняется в зависимости от тяжести хвостов.

Можно констатировать, что критерии Бартлетта, Кокрена, Хартли, Фишера, Неймана–Пирсона и Z–критерий Оверолла-Вудворда остаются эквивалентными по мощности в ситуации нарушения стандартного предположения о нормальности и принадлежности 2-х анализируемых выборок некоторому симметричному закону.

Аналогично, эквивалентной по мощности остаётся группа критериев Блисса–Кокрена–Тьюки, Кадуэлла–Лесли–Брауна и Линка.

В случае принадлежности выборок законам с более лёгкими (по сравнению с нормальным законом) хвостами критерии упорядочиваются по мощности практически так же, как и при нормальном законе.

При (симметричных) законах с более тяжелыми хвостами по сравнению с нормальным законом порядок предпочтения меняется. В случае тяжёлых хвостов (см., например, в таблице 4.8 при обобщенном нормальном законе $De(0.5)$) критерии располагаются следующим образом:

Флайне–Киллина $\succ$ *Клотца* $\succ$ *Муда* $\succ$ *Левене* $\succ$ *Сижела–Тьюки* $\sim$ *Ансари–Бредли* $\succ$ *Миллера* $\succ$ *О'Брайена* $\succ$ *Лайарда* $\succ$ *Модифицированный Z–критерий* $\succ$ ***группа критериев*** *(Бартлетта, Кокрена, Хартли, Фишера, Неймана–Пирсона, Z–критерий Оверолла–Вудворда)* $\succ$ *Ньюмана* $\succ$ ***группа критериев*** *(Блисса–Кокрена–Тьюки, Кадуэлла–Лесли–Брауна, Линка)*

Таблица 4.8

Мощность критериев относительно конкурирующей гипотезы H_2 в случае принадлежности выборок семейству распределений (4.3) с различными значениями параметра формы θ_2 при $k=2$, $n_i=100$, $i=\overline{1,k}$

Критерий	$De(0.5)$			$De(1)$			$De(2)$			$De(3)$			$De(4)$			$De(5)$		
	α																	
	10	05	01	10	05	01	10	05	01	10	05	01	10	05	01	10	05	01
Б, К, Х, Ф, НП, Z	162	091	022	317	213	078	**564**	**438**	**218**	**689**	**570**	**326**	754	644	**398**	791	689	446
Мр	167	097	028	309	207	075	557	429	207	687	566	321	755	645	397	793	691	450
Лд	179	106	031	322	218	079	557	428	205	681	557	307	745	630	375	783	674	423
ZM	167	096	024	310	206	073	555	427	205	685	564	319	752	642	395	790	688	446
ОБ	176	103	029	322	216	078	555	427	205	680	556	306	745	630	374	782	674	420
Кл	224	139	044	346	237	090	540	412	196	673	549	302	**760**	**649**	394	**820**	**720**	**472**
Л	215	132	040	**356**	**245**	**093**	515	388	180	588	460	232	627	500	264	649	524	283
ФК	**232**	**145**	**045**	344	234	088	503	376	173	604	477	244	669	544	300	713	593	344
М	222	138	043	324	218	081	468	344	152	558	431	214	618	492	261	659	536	298
СТ, АБ	213	131	041	296	196	070	405	287	119	470	348	157	513	388	184	542	416	204
Н	144	080	020	224	141	047	386	276	116	527	405	200	638	517	288	720	608	370
БКТ, КЛБ, ЛИ	128	069	016	173	101	028	289	190	068	417	299	127	540	415	203	650	527	292

В таблицах 4.8 – 4.10 значения α указаны в %, оценки мощности приведены в виде $(1-\beta)\times 1000$, для критериев использованы следующие обозначения: Б – Бартлетта, К – Кокрена, Х – Хартли, Ф – Фишера, НП – Неймана–Пирсона, Z – Z–критерий Оверолла–Вудворда, ZM – модифицированный Z–критерий, Лд – Лайарда, Мр – Миллера, ОБ – О’Брайена, Кл – Клотца, Л – Левене, ФК – Флайне-Киллина, М – Муда, СТ –Сижела–Тьюки, АБ – Ансари–Бредли, Н – Ньюман, БКТ – Блисса–Кокрена–Тьюки, КЛБ – Кадуэлла–Лесли–Брауна, ЛИ –Линка.

Таблица 4.9

Мощность критериев относительно конкурирующей гипотезы H_3 в случае принадлежности выборок семейству распределений (4.3) с различными значениями параметра формы θ_2 при $k=2$, $n_i=100$, $i=\overline{1,k}$

Критерий	$De(0.5)$			$De(1)$			$De(2)$			$De(3)$			$De(4)$			$De(5)$		
	α																	
	10	05	01	10	05	01	10	05	01	10	05	01	10	05	01	10	05	01
Б, К, Х, Ф, НП, Z	388	266	095	827	734	501	**991**	**980**	**924**	**999**	**997**	**985**	**1.00**	**999**	**995**	**1.00**	**1.00**	**998**
Мр	392	282	120	800	700	459	990	977	910	999	997	983	1.00	999	994	1.00	1.00	997
Лд	445	328	146	830	737	498	990	977	906	999	996	978	1.00	999	992	1.00	1.00	996
ZM	400	283	107	804	699	447	990	976	906	999	997	982	1.00	999	994	1.00	1.00	997
ОБ	430	310	129	828	730	482	990	976	903	999	996	977	1.00	999	992	1.00	1.00	996
Кл	611	486	254	869	788	565	987	971	892	998	995	974	1.00	999	992	1.00	1.00	997
Л	579	452	226	**882**	**805**	**585**	981	960	866	993	984	934	996	991	957	998	993	967
ФК	**634**	**508**	**272**	864	782	557	977	952	847	994	985	936	998	993	966	999	996	979
М	606	480	252	837	746	516	964	931	802	988	974	908	995	987	948	997	992	965
СТ, АБ	574	448	228	787	684	444	926	869	693	963	929	802	976	953	854	983	964	882
Н	299	198	070	589	473	262	901	840	667	981	963	887	997	992	967	999	998	990
БКТ, КЛБ, ЛИ	233	145	045	432	312	132	776	671	430	938	890	729	987	973	904	998	995	974

Т а б л и ц а 4.10

Мощность критериев относительно конкурирующей гипотезы H_2 в случае принадлежности выборок семейству распределений (4.3) с различными значениями параметра формы θ_2 при $k=5$, $n_i=100$, $i=\overline{1,k}$

Критерий	$De(0.5)$			$De(1)$			$De(2)$			$De(3)$			$De(4)$			$De(5)$		
	α																	
	10	05	01	10	05	01	10	05	01	10	05	01	10	05	01	10	05	01
К	134	070	015	306	208	081	**624**	**515**	**316**	**767**	**680**	**480**	**834**	**762**	**581**	**869**	**807**	**643**
ОБ	160	092	026	314	214	086	575	460	258	709	605	391	778	684	478	815	731	533
Z	141	074	016	297	197	073	565	445	241	702	592	371	772	673	457	811	722	512
ZM	148	081	019	289	190	070	554	433	228	697	587	364	770	672	454	810	721	514
Б, НП	142	075	016	293	192	070	557	434	227	695	581	355	766	664	439	806	713	495
Х	140	074	016	281	180	061	545	418	204	685	565	324	758	649	405	799	699	459
Мр	146	081	021	272	174	058	530	400	189	676	554	314	752	642	401	795	695	461
Лд	155	086	021	283	180	058	527	395	181	665	539	293	739	623	372	781	674	426
Л	197	119	036	**340**	**234**	**095**	513	390	197	591	471	260	633	516	298	657	542	323
ФК	**212**	**128**	**039**	322	217	082	498	378	187	617	499	283	693	582	363	742	641	423
БКТ	114	059	013	148	083	021	262	170	061	413	301	136	569	454	248	704	601	384
КЛБ	119	062	013	153	085	021	253	158	052	380	263	105	514	386	183	638	513	280

Но уже при законах с хвостами как, например, у распределения Лапласа (см. при $De(1)$) группа критериев (Бартлетта, Кокрена, Хартли, Фишера, Неймана–Пирсона, Z–критерий Оверолла–Вудворда) выходит на шестую позицию.

Следует отметить, что с увеличением тяжести хвостов соответственно снижается мощность всех рассматриваемых параметрических критериев.

Критерии Блисса–Кокрена–Тьюки, Кадуэлла–Лесли–Брауна, Линка при любых наблюдаемых законах (в данном случае при $n_i = 100$) уступают в мощности непараметрическим критериям, а критерий Ньюмана имеет преимущество перед непараметрическими только при очень лёгких хвостах наблюдаемых законов. При малых объёмах выборок такого преимущества непараметрических критериев нет (см. таблицы 4.2–4.4).

С увеличением числа сравниваемых выборок ситуация меняется. Практически исчезают группы эквивалентных критериев. Исключение составляет лишь пара критериев Бартлетта и Неймана–Пирсона, которые в любой ситуации остаются эквивалентными по мощности.

В таблице 4.10 относительно конкурирующей гипотезы H_2 представлены оценки мощности многовыборочных критериев, также полученные в случае принадлежности выборок обобщенному нормальному закону (4.3) при $k = 5$. В таблице критерии упорядочены по убыванию мощности, проявляемой ими в случае законов с хвостами, более легкими, чем у нормального закона (практически, как при нормальном).

В случае тяжёлых хвостов (см., например, в случае $De(0.5)$) критерии по убыванию мощности располагаются в другом порядке:

Флайне–Киллина $\succ$ *Левене* $\succ$ *О'Брайена* $\succ$ *Лайарда* $\succ$ *Модифицированный Z–критерий* $\succ$ *Миллера* $\succ$ *Бартлетта* $\sim$ *Неймана–Пирсона* $\succ$ *Z–критерий Оверолла–Вудворда* $\succ$ *Хартли* $\succ$ *Кокрена* $\succ$ *Кадуэлла–Лесли–Брауна* $\succ$ *Блисса–Кокрена–Тьюки.*

В случае $De(1)$ на первой позиции оказывается Критерий Левене.

4.5. Критерий Кокрена при законах, отличных от нормального

Сравнивая оценки мощности в табл. 4.2–4.4 для параметрических и непараметрических критериев, мы видим, что параметрические критерии имеют значительное преимущество в мощности. Причем это преимущество сохраняется и в ситуациях, когда анализируемые выборки принадлежат законам, существенно отличающимся от нормального (табл. 4.8–4.9). Ясно, что в последнем случае мы не можем использовать ставшие классическими результаты, связанные с распределениями (или процентными точками) статистик критериев Бартлетта, Кокрена, Хартли, Левене и др.

Проблема осложняется тем, что в условиях нарушения классических предположений о нормальности распределения статистик упомянутых критериев при справедливости проверяемой гипотезы зависят и от законов распределения, которым подчиняются анализируемые выборки, и от объемов выборок. В принципе, то же самое мы имеем, например, для критериев Кокрена, Хартли, Левене при нормальном законе.

В этой связи понятно, что построить (найти) модели распределения статистики критерия для любых законов, для любых объемов выборок – задача нереальная. Однако для конкретных параметрических моделей законов распределения, зарекомендовавших себя в различных приложениях в качестве хороших моделей наблюдаемых случайных величин, такая задача (как и для нормального закона) может быть (относительно) легко решена с использованием компьютерных технологий как, например, в [90, 36, 91, 37].

Результаты исследований в [95, 40] показали предпочтительность критерия Кокрена, который в двухвыборочном варианте не уступает любому другому, а в многовыборочном оказывается наиболее мощным (за исключением законов с «тяжелыми хвостами», где хорошо в этом плане зарекомендовал себя критерий Левене).

В случае принадлежности наблюдаемых величин распределениям семейства (4.3) при значениях параметра формы $\theta_2 = 1, 2, 3, 4, 5$ и ряде значений n на основании результатов статистического моделирования построены [95, 40, 18] таблицы верхних процентных точек (1, 5, 10 %) статистики (4.5) критерия Кокрена для двух – пяти выборок. Полученные результаты представлены в табл. **А.9–А.12** и могут использоваться в случае, когда есть основания считать, что распределение (4.3) с соответствующим параметром θ_2 представляет собой хорошую модель для наблюдаемых случайных величин. Построенные процентные точки уточняют некоторые результаты, представленные в [101, 35], и расширяют возможности применения критерия Кокрена.

4.6. Что надо учитывать при выборе критерия однородности дисперсий?

При выборе применяемого критерия однородности дисперсий следует учитывать следующие бесспорные факты.

Во-первых. Параметрические критерии (по крайней мере, лучшие их представители) имеют явное преимущество в мощности по сравнению с непараметрическими.

Во-вторых. Стандартным предположением, обуславливающим возможность применения параметрических критериев однородности дисперсий, является принадлежность анализируемых выборок нормальному закону распределения. В случае его нарушении распределения статистик критериев, соответствующие справедливости H_0, существенно изменяются. Это не позволяет использовать классические результаты, связанные с их применением и полученные именно при данном предположении. Исключение составляют группа устойчивых критериев (О'Брайена, Левене и модифицированный Z-критерий Оверолла–Вудворда), но и в этом случае зависимость от вида закона, которым принадлежат анализируемые выборки, также прослеживается.

В-третьих. Даже в случае выполнения стандартного предположения возможность корректного применения ряда параметрических критериев ограничена тем, что не известны распределения статистик, и имеются лишь таблицы критических значений статистик для некоторого ряда объёмов выборок. Поэтому при проверке гипотезы нельзя оценить достигнутый уровень значимости p_{value}.

В-четвёртых. При ограниченных объёмах выборок распределения статистик параметрических критериев зачастую существенно отличаются от известных асимптотических распределений этих статистик, имеющих место при выполнении стандартного предположения.

В-пятых. На непараметрические критерии однородности характеристик рассеяния, в которых по существу проверяется гипотеза о равенстве параметров масштаба, не накладывается предположения о нормальности. Однако требуется выполнение не менее сильного предположения об однородности законов анализируемых выборок [40, 95].

В-шестых. Распределения нормализованных статистик непараметрических критериев (Ансари–Бредли [1], Муда [55], Сижела–Тьюки [64]) являются дискретными и при малых объёмах выборок существенно отличаются от асимптотического стандартного нормального закона.

В-седьмых. Параметрические критерии имеют очевидное преимущество в мощности перед непараметрическими и в случае принадлежности выборок законам, отличающимся от нормального [96, 41, 99]. Это заставляет задуматься о возможности их корректного применения при использовании в условиях нарушения стандартного предположения.

Таким образом, для построения корректного статистического вывода по результатам проверки гипотезы необходимо выбрать наиболее мощный критерий и в соответствии с этим критерием оценить достигнутый уровень значимости p_{value}. Принятие решения на основе оценки p_{value} всегда более информативно, чем в результате сравнения вычисленной статистики с некоторым критическим значением.

В случае применения критериев, распределения статистик которых (при выполнении стандартного предположения) неизвестны или отличаются от известных асимптотических вследствие ограниченности объёмов анализируемых выборок, оценивание p_{value} представляет собой некоторую проблему. Однако эта проблема вполне решаема при наличии соответствующего программного обеспечения, позволяющего найти оценку p_{value} по результатам статистического моделирования.

Более того, реализация такой же возможности [19] в случае использования критериев в условиях нарушения стандартного предположения о нормальности случайных величин существенно расширяет сферу применения параметрических (и непараметрических) критериев однородности дисперсий.

В следующих разделах рассмотрены рекомендации по применению рассматриваемых критериев, связанные с вычислением p_{value} в ситуациях, когда распределения статистик критериев неизвестны. Причина неизвестности может быть связана с отсутствием информации о законе распределения статистики в условиях стандартного предположения о нормальности, с тем, что реальные распределения статистик существенно отличаются от асимптотических, или с нарушением стандартного предположения о принадлежности анализируемых выборок нормальным законам.

Приводимые результаты исследований получены при использовании программной системы ISW [111].

4.7. О вычислении достигнутого уровня значимости

Принятие решения о результатах проверки гипотезы H_0 на основании значения p_{value} всегда более обосновано, чем в результате сравнения полученного значения статистики S^* с заданными критическими значениями, извлекаемыми из соответствующей таблицы процентных точек, так как в последнем случае остаётся не ясным, насколько обосновано принимаемое решение.

В случае правостороннего критерия достигнутый уровень значимости (вероятность возможного превышения полученного значения статистики при справедливости проверяемой гипотезы H_0) определяется соотношением

$$p_{value} = P\{S > S^* | H_0\} = 1 - G(S^* | H_0), \tag{4.29}$$

где $G(S|H_0)$ – функция распределения вероятностей статистики применяемого критерия при справедливости H_0.

В случае двустороннего критерия критическая область состоит из двух частей. А достигнутый уровень значимости определяется соотношением

$$p_{value} = 2\min\left\{G(S^* | H_0), 1 - G(S^* | H_0)\right\}. \tag{4.30}$$

Вычисление достигнутых уровней значимости в соответствии с соотношениями (4.29) для правостороннего критерия или (4.30) для двустороннего не вызывает труда при известном распределении статистики критерия. Если информация о распределении статистики соответствующего критерия отсутствует и представлена лишь таблицей процентных точек, либо объёмы выборок относительно невелики и таковы, что распределение статистики существенно отличается от предельного (асимптотического), то корректное вычисление p_{value} представляет собой некоторую проблему.

К сожалению, распределения большинства параметрических критериев однородности дисперсий (даже в классическом случае принадлежности выборок нормальному закону) существенно зависят от объемов выборок. Поэтому при формировании решения о результатах проверки гипотезы H_0 приходится опираться на таблицы процентных точек, которые сформированы для ограниченных наборов n_i и, часто, подразумевают равенство объёмов сравниваемых выборок.

Каким же образом можно повысить качество статистических выводов?

В настоящее время благодаря резкому увеличению возможностей вычислительной техники в программных системах статистического анализа существенно возрастает роль использования компьютерных методов исследования закономерностей. Например, когда распределение статистики критерия, используемого для проверки некоторой гипотезы, к моменту начала проверки (в силу разных причин) оказывается неизвестным (при данном объёме выборки n), появляется возможность исследования распределения статистики в реальном времени проверки гипотезы (в интерактивном режиме) [46, 45, 86, 87, 88]. Например, в интерактивном режиме можно исследовать неизвестное распределение статистики любого критерия однородности дисперсий, зависящее от объема выборки, при тех значениях n_i, которые соответствуют анализируемым выборкам, и оценить по найденному в результате моделирования эмпирическому распределению статистики достигнутый уровень значимости.

При таком подходе необходимое для проверки гипотезы эмпирическое распределение $G_N(S_n | H_0)$ статистики соответствующего критерия строится в результате статистического моделирования с точностью, зависящей от числа экспериментов N в методе Монте-

Карло [105]. Затем по эмпирическому распределению $G_N(S_n|H_0)$ и вычисленному по анализируемой выборке значению статистики S^* критерия в соответствии с соотношением (4.29) для правостороннего критерия или по соотношению (4.30) для двустороннего критерия определяется оценка p_{value}.

Таким образом, результаты статистического моделирования, осуществляемого в интерактивном режиме (непосредственно в процессе проводимого анализа) используются при формировании вывода по итогам проверки гипотезы.

Реализация такого интерактивного режима требует наличия развитого программного обеспечения, позволяющего (как в [111]) в целях ускорения распараллеливать процессы моделирования и привлекать доступные вычислительные ресурсы. В условиях распараллеливания время построения распределения $G_N(S_n|H_0)$ статистики критерия оказывается не очень заметным на фоне полного решения задачи статистического анализа.

4.8. Применение критериев в “нестандартных” условиях

Использование интерактивного режима для исследования распределений статистик открывает возможность применения критериев в условиях нарушения стандартного предположения о принадлежности результатов измерений нормальному закону. Отклонение от нормальности приводит к существенным изменениям распределений $G(S|H_0)$ статистик критериев. В меньшей степени это касается критерия О’Брайена, модифицированного Z–критерия Оверолла–Вудворда и модификаций критерия Левене. Однако за эту устойчивость данные критерии платят некоторым снижением мощности (при выполнении стандартных предположений). В то же время распределения $G(S|H_0)$ статистик этих трёх критериев всё-таки настолько отклоняются от имеющих место при стандартных предположениях (в случае принадлежности выборок законам с тяжелыми хвостами), что пренебрегать этим нельзя. Поэтому корректность выводов зависит от того, насколько точно знания о распределении $G(S|H_0)$ соответствуют реальным условиям, характеризующим анализируемые результаты измерений.

Для рассмотренных здесь и в [40, 95, 96, 41] критериев однородности дисперсий проиллюстрируем использование интерактивного режима исследования $G(S|H_0)$ и точности оценивания p_{value} в зависимости от числа экспериментов N моделируемых эмпирических распределений статистик, в том числе при нарушении стандартного предположения.

Напомним, что для того чтобы погрешность оценивания p_{value} с доверительной вероятностью 0.99 не превышала величины 0.01, количество экспериментов имитационного моделирования N должно быть порядка 16 600, для того, чтобы погрешность не превышала 0.001 – количество экспериментов должно быть порядка 1 660 000 [105].

Пример 4.1. Пусть проверяется гипотеза о равенстве дисперсий 2-х следующих выборок объемом $n_i = 40$, $i = \overline{1,2}$, в предположении о принадлежности их нормальному закону:

0.205	0.232	-0.219	0.829	0.127	0.939	0.995	0.706	-0.450	-0.361
-0.364	-0.107	1.054	-0.095	-2.188	0.453	-1.052	0.640	-0.417	-2.144
-3.473	-0.857	-0.678	0.070	-1.139	0.574	0.409	0.206	0.184	1.273
-0.326	-1.245	0.227	0.185	0.383	0.126	0.255	1.110	-0.310	-0.178

0.269	-0.187	-0.013	-1.248	-0.247	-0.541	1.209	-2.814	0.575	-0.452
-0.427	0.337	1.138	-1.090	-0.858	-0.006	-1.212	-0.180	1.751	-0.485
-0.779	-0.752	0.342	-0.175	0.509	0.209	0.596	1.869	1.764	1.084
0.995	0.633	0.003	-0.642	-1.225	-0.115	-1.543	0.137	-1.290	2.189

В таблице 4.11 приведены значения статистик, вычисленные при проверке однородности дисперсий, соответствующих этим 2-м выборкам. В таблице представлены оценки p_{value}, полученные по смоделированным распределениям статистик рассматриваемых критериев при количестве экспериментов $N = 10^4$ и $N = 10^6$ в предположении о принадлежности случайных величин нормальному закону. Для критериев, относительно которых известны асимптотические распределения статистик, в таблице приведены также теоретические оценки p_{value}, вычисленные в соответствии с этими распределениями.

В действительности обе анализируемые выборки моделировались в соответствии с распределением Лапласа со значением $\sigma = 1$. Поэтому в последней колонке таблицы представлены оценки p_{value}, полученные по смоделированным распределениям статистик рассматриваемых критериев при количестве экспериментов $N = 10^6$ в предположении о принадлежности случайных величин закону Лапласа.

Таблица 4.11

Оценки p_{value}, полученные при проверке однородности первых 2-х выборок (при справедливости H_0)

Критерий	Значение стат-ки	p_{value}			
		При нормальном законе			При законе Лапласа
		Теор-я	$N = 10^4$	$N = 10^6$	$N = 10^6$
Бартлетта	0.268028	0.604658	0.605	0.6045	0.734
Кокрена	0.541643	–	0.605	0.6045	0.734
Фишера	0.846236	0.604671	0.596	0.6045	0.734
Хартли	1.1817	–	0.605	0.6045	0.734
Неймана–Пирсона	1.00349	0.607	0.605	0.6045	0.734
Z–критерий Оверолла–Вудворда	0.279266	0.597183	0.605	0.6045	0.734
Модифицированный Z–критерий	0.115111	0.734398	0.741	0.7348	0.732
О’Брайена	0.162623	0.687856	0.702	0.6971	0.722
Левене (со средним)	0.604953	–	0.454	0.4451	0.459
Ньюмана	4.56411	–	0.780	0.7777	0.730
Линка	0.948631	–	0.806	0.8079	0.877
Блисса–Кокрена–Тьюки	0.513181	–	0.814	0.8084	0.878
Кадуэлла–Лесли–Брауна	1.05415	–	0.814	0.8084	0.878

С одной стороны, можно заметить существенное различие в оценках p_{value} при законах Лапласа и нормальном. С другой стороны, можно отметить, что в случае устойчивых критериев Левене, О'Брайена и модифицированного Z–критерия различие в таких оценках минимально.

Необходимо подчеркнуть следующее. Если реальный закон распределения обладает более "тяжелыми" хвостами по сравнению с нормальным законом, а мы, применяя параметрический критерий однородности дисперсий, опираемся на классические результаты, связанные с выполнением предположения о нормальности, то это приводит к увеличению (по сравнению с заданной) вероятности ошибки 1-го рода и к уменьшению вероятности ошибки 2-го рода. Если же реальный закон обладает более "лёгкими" хвостами, то в аналогичной ситуации это приводит к уменьшению вероятности ошибки 1-го рода и к увеличению вероятности ошибки 2-го рода.

Пример 4.2. Проверим гипотезу о равенстве дисперсий 3-х выборок, 2 из которых взяты из предыдущего примера, а третья приведена ниже:

0.254	-0.254	-0.017	0.002	1.937	-2.476	-0.092	-0.543	2.588	1.970
1.869	0.453	-0.616	-2.806	2.382	0.476	0.641	-2.581	-0.659	-0.027
1.775	2.154	-1.801	-0.774	-0.522	1.413	-0.042	-0.175	-0.929	0.664
-0.298	0.409	0.040	0.418	0.478	-0.052	-4.354	1.521	-2.126	1.177

Эта выборка также смоделирована в соответствии с распределением Лапласа, но при $\sigma = 1.5$.

В таблице 4.12 приведены значения статистик, вычисленные при проверке гипотезы об однородности дисперсий, соответствующих 3-м рассматриваемым выборкам. В предположении о принадлежности выборок нормальному закону в таблице представлены теоретические оценки p_{value} и оценки, полученные по результатам статистического моделирования при количестве экспериментов 10^6. В предположении о принадлежности выборок закону Лапласа приведены полученные оценки p_{value} при $N = 10^6$.

В данном случае видно, что если мы проигнорируем факт нарушения стандартного предположения о нормальности, то по всем критериям (за исключением модифицированного Z-критерия и критерия О’Брайена) получим значения p_{value} меньшие по сравнению с истинными, имеющими место при законе Лапласа. Если бы реальный закон обладал более лёгкими хвостами по сравнению с нормальным, то значения p_{value}, получаемые в предположении о нормальности, превышали бы истинные значения.

Таблица 4.12

Оценки p_{value}, полученные при проверке однородности 3-х выборок (отношение стандартных отклонений 1:1:1.5)

Критерий	Значение статистики	p_{value}		
		При нормальном законе		При законе Лапласа
		теоретическая	$N=10^6$	$N=10^6$
Бартлетта	9.72943	0.0077	0.0079	0.1198
Кокрена	0.534165	–	0.0032	0.0667
Хартли	2.50172	–	0.0140	0.1508
Неймана–Пирсона	1.08774	–	0.0079	0.1198
Z–критерий Оверолла–Вудворда	5.0054	0.0067	0.0065	0.1098
Модифицированный Z–критерий	2.31571	0.0987	0.0953	0.0897
О’Брайена	3.2241	0.0434	0.0396	0.0336
Левене (со средним)	2.82473	–	0.0661	0.0713
Блисса–Кокрена–Тьюки	0.415913	–	0.0861	0.3301
Кадуэлла–Лесли–Брауна	1.46271	–	0.1899	0.5106

Замечание. В сказанное выше в таблице 4.12 не укладывается результат для модифицированного Z–критерия Оверолла–Вудворда, при построении которого авторы старались сделать его устойчивым к нарушению стандартного предположения. Этой цели авторы критерия достигли. Однако, предложенное в [69] соотношение (4.17) для c_i, по-видимому, не обладает необходимой точностью. Поэтому в случае модифицированного Z–критерия нарушается общий для всех параметрических критериев монотонный характер зависимости распределений статистик от степени (рассматриваемого в данной работе) отклонения наблюдаемого закона от нормального.

Таким образом, параметрические критерии однородности дисперсий, обладающие наибольшей мощностью, можно корректно применять как при выполнении стандартного предположения о нормальности, так и в условиях его нарушения. И в том и другом случае возможность вычисления оценок достигнутых уровней значимости повышает информативность статистических выводов.

Реализация такой процедуры применения критериев возможно только с опорой на программное обеспечение, подобное [111]. Обязательным предварительным условием перехода к ней является идентификация вида закона распределения, наилучшим образом описывающего анализируемые выборки [99, 86, 87, 88, 85].

Решение о наиболее предпочтительной модели закона может лежать за рамками задачи проверки гипотезы об однородности, а при отсутствии такой возможности, приниматься в процессе анализа совокупности исследуемых выборок (или объединённой выборки). Если при этом в качестве наилучшей модели оказывается некоторое семейство распределений (например, обобщённый нормальный закон, семейства гамма- и бета-распределений и т.п.), в случае которого конкретный вид закона определяется значением параметра (или параметров) формы, то модель должна быть идентифицирована с точностью до значения этого параметра (его оценка должна быть найдена и зафиксирована).

4.9. Выводы по разделу

В случае анализа двух выборок и выполнении стандартного предположения о нормальности наибольшей и одинаковой мощностью относительно тех же конкурирующих гипотез обладают критерии Фишера, Бартлетта, Кокрена, Хартли, Неймана–Пирсона и Z–критерий Оверолла–Вудворда.

Далее в порядке убывания мощности следует группа устойчивых критериев О`Брайена, модифицированный Z-критерий, Левене.

Наименее перспективна для применения группа параметрических критериев Ньюмана, Блисса–Кокрена–Тьюки, Кадуэлла–Лесли–Брауна, Линка, которая уступает в мощности даже непараметрическим критериям, имея перед последними некоторое преимущество в мощности лишь при очень малых объёмах выборок.

Среди рассмотренных непараметрических критериев наибольшей мощностью обладает критерий Клотца, затем идёт критерий Флайне–Киллина, потом критерий Муда, который уже заметно уступает критериям Фишера, Бартлетта, Кокрена, Хартли, Неймана–Пирсона, Z–критерию Оверолла–Вудворда, О`Брайена, модифицированному Z-критерию и Левене.

В случае нарушения стандартного предположения и принадлежности двух выборок законам с более легкими хвостами, чем у нормального закона, вышеуказанный порядок предпочтительности сохраняется.

При симметричных законах с более тяжелыми хвостами по сравнению с нормальным законом критерии упорядочиваются следующим образом:

Флайне–Киллина ≻ Клотца ≻ Муда ≻ Левене ≻ Сижела–Тьюки ~ Ансари–Бредли ≻ Лайарда ≻ О'Брайена ≻ Миллера ≻ Модифицированный Z–критерий ≻ ***группа критериев*** *(Бартлетта, Кокрена, Хартли, Фишера, Неймана–Пирсона, Z–критерий Оверолла–Вудворда) ≻ Ньюмана ≻* ***группа критериев*** *(Блисса–Кокрена–Тьюки, Кадуэлла–Лесли–Брауна, Линка)*

Если анализируется большее число выборок, то при выполнении стандартного предположения или в случае принадлежности выборок законам с более лёгкими хвостами по сравнению с нормальным законом критерии по убыванию мощности располагаются в следующем порядке:

Кокрена ≻ О'Брайена ≻ Z–критерий Оверолла–Вудворда ≻ Модифицированный Z–критерий ≻ ***группа критериев*** *(Бартлетта, Неймана–Пирсона) ≻ Хартли ≻ Миллера ≻ Лайарда ≻ Левене ≻ Флайне–Киллина ≻ Блисса–Кокрена–Тьюки ≻ Кадуэлла–Лесли–Брауна.*

Надо отметить, что при симметричных законах с более лёгкими хвостами критерий Левене уступает в мощности критерию Флайне–Киллина.

При симметричных законах с более тяжелыми хвостами ситуация меняется:

Флайне–Киллина $\succ$ *Левене* $\succ$ *О'Брайена* $\succ$ *Лайарда* $\succ$ *Модифицированный Z–критерий* $\succ$ *Миллера* $\succ$ ***группа критериев*** *(Бартлетта, Неймана–Пирсона)* $\succ$ *Z–критерий Оверолла–Вудворда* $\succ$ *Хартли* $\succ$ *Кокрена* $\succ$ *Кадуэлла–Лесли–Брауна* $\succ$ *Блисса–Кокрена–Тьюки.*

Основной недостаток параметрических критериев связан с тем, что классические результаты обеспечивают корректность применения данных критериев лишь при выполнении предположения о принадлежности анализируемых выборок нормальным законам, так как только для этой ситуации известны распределения статистик рассмотренных параметрических критериев или таблицы процентных точек. Этот недостаток можно преодолеть, используя компьютерные технологии для исследования распределений статистик и оценки p_{value} (см. разделы 4.7–4.8).

Непараметрические критерии также не свободны от недостатков. Во-первых, при их использовании, как правило, предполагается равенство средних. Во-вторых, как было показано нами, корректность их применения обеспечивается в случае принадлежности анализируемых выборок закону распределения вероятностей одного и того же вида. По существу, при справедливости проверяемой гипотезы о равенстве дисперсий, соответствующих двум выборкам, распределение статистики известно для случая однородности законов этих выборок. Выполнение этих условий несколько сужает область корректного использования непараметрических критериев. В-третьих, непараметрические критерии обладают заметно меньшей мощностью по сравнению с параметрическими.

Действие параметрических критериев при необходимости можно распространить на ситуации, когда выборки описываются законами, отличающимися от нормального, воспользовавшись, как в нашем случае (см. раздел 4.8), методикой компьютерного моделирования для исследования распределений статистик и построения для этих распределений моделей или таблиц процентных точек. Из рассмотренных критериев в наибольшей степени на эту роль подходит критерий Кокрена.

При таком подходе необходимо учитывать, что распределение статистики критерия будет зависеть от вида закона, объема выборок и во многих случаях – от конкретных значений некоторых параметров. При использовании соответствующего программного обеспечения [105] решение таких задач не вызывает принципиальных трудностей, а наличие программного обеспечения позволяет решать эти задачи по мере возникновения потребности [106].

Нелишне заметить, что специфика задач по исследованию методами компьютерного моделирования вероятностных закономерностей позволяет эффективно распараллеливать вычислительные процессы, используя ресурсы многоядерных и многопроцессорных компьютеров и компьютерных сетей и получать искомое решение практически в реальном масштабе времени.

5. Заключение

Настоящее руководство позволяет ориентироваться в множестве критериев, которые могут использоваться для проверки гипотез об однородности законов, о равенстве математических ожиданий сравниваемых выборок или о равенстве дисперсий. Приводимые результаты исследований распределений статистик критериев и сравнительного анализа мощности групп критериев, предназначенных для проверки гипотез одного вида, позволяют исследователям при проведении анализа отдать предпочтение тому или иному критерию.

Представленные в руководстве описания критериев с указанием их преимуществ и недостатков, расширенные таблицы процентных точек, оценки мощности критериев относительно некоторых конкурирующих гипотез дают возможность специалистам, решающим задачи статистического анализа в конкретной прикладной области, осознанно подходить к выбору критериев, не останавливаясь на использовании какого-то одного.

Очевидно, что в настоящем руководстве представлено не всё множество критериев, которые могут использоваться для проверки рассмотренных гипотез. Что-то упущено из существующих критериев, предлагаются новые. Это естественно. Однако приведенные в руководстве описания критериев и их свойств должны способствовать корректному применению данных критериев в приложениях и, следовательно, способствовать повышению качества статистических выводов.

Использование в процессе проверки гипотез процентных точек уже не соответствует современным требованиям к качеству статистических выводов. Существенно больше оснований для принятия того или иного решения о результатах проверки гипотезы содержится в оценке достигнутого уровня значимости. Да, оценка p_{value} требует знания распределения статистики при справедливости проверяемой гипотезы H_0, которое не всегда известно. Однако можно отметить положительную и возрастающую роль статистического моделирования и компьютерных технологий, позволяющих в интерактивном режиме исследовать распределения статистик и оценивать значение p_{value}. Подобным образом оценки p_{value} находятся в системе ISW [111], которой можно воспользоваться при необходимости.

Библиографический список

1. *Ansari A. R.* Rank-tests for dispersions / A. R. Ansari, R. A. Bradley // AMS. – 1960. – Vol. 31, № 4. – P. 1174–1189.
2. *Bartlett M. S.* Properties of sufficiency of statistical tests / M. S. Bartlett // Proc. Roy. Soc. – 1937. – A 160. – P. 268–287.
3. *Behrens W. U.* Ein Beitrag Zur Fehlerberechnung bei wenigen Beobachtungen // Landw. Jb., 1929. B. 68, – S. 807-837.
4. *Bliss C.I., Cochran W.G., Tukey J.W.* A rejection criterion based upon the range // Biometrika. 1956. Vol. 43. No. 3/4. – P. 418-422.
5. *Brown M. B.* Robust Tests for Equality of Variances / M. B. Brown, A. B. Forsythe // J. Amer. Statist. Assoc. – 1974. – Vol. 69. – P. 364–367.
6. *Capon J.* Asymptotic efficiency of certain locally most powerful rank tests / J. Capon // AMS. – 1961. – Vol. 32, № 1. – P. 88–100.
7. *Chen S., Pokojovy M.* Modern and classical *k*-sample omnibus tests // Wiley Online Library, 2017. DOI: 10.1002/wics.1418
8. *Cochran W. G.* The distribution of the largest of a set of estimated variances as a fraction of their total / W. G. Cochran // Annals of Eugenics. – 1941. – Vol. 11. – P. 47–52.
9. *Conover W. J.* Several k-sample Kolmogorov-Smirnov tests // T*he Annals of Mathematical Statistics.* – 1965. – Vol. 36, No. 3. – P.1019-1026.
10. *Conover W. J.* Practical Nonparametric Statistics / W. J. Conover. – 3d ed. – Wiley, 1999. – 584 p.
11. *Conover W.J., Johnson M.E., Johnson M.M.* A comparative study of tests for homogeneity of variances, with applications to the outer continental shelf bidding data // Technometrics. – 1981. – Vol. 23, No. 4. – P. 351-361.
12. *Cox M.G.* The evaluation of key comparison data // Metrologia.2002. Vol. 39. No. 6. – P.589-585. DOI: 10.1088/0026-1394/39/6/10
13. *Cox M.G.* The evaluation of key comparison data: determining the largest consistent subset // Metrologia. 2007. Vol. 44. No. 3. – P.187-200. DOI: 10.1088/0026-1394/44/3/005
14. *Fisher R. A.* The fiducial argument in statistical inference // Annals of Eugenics, Lond., 1935. Vol. **6**, No. 4. – P. 391-398.
15. *Fisher R. A.* The asymptotic approach to Behrens's integral, with further tables for the *d* test of significance // Annals of Eugenics, Lond., 1941. Vol. **11**. – P. 141-172.
16. *Fisher R.A., Yates F.* Statistical tables for biological, agricultural and medical research. London & Edinburgh: Oliver and Boyd, 1948.
17. *Fligner M.A., Killeen T.J.* Distribution-Free Two-Sample Tests for Scale // Journal of American Statistical Association. 1976. Vol. 71. No. 353. – P.210-213.

18. *Gorbunova A. A.* Classical tests of variances homogeneity for non-normal distributions / A. A. Gorbunova, S. B. Lemeshko, B. Yu. Lemeshko // Proceedings Third International Conference on Accelerated Life Testing, Reliability-based Analysis and Design. 19-21 May 2010. – Clermont-Ferrand, France. – P. 117–124.

19. *Gorbunova A.A., Lemeshko B.Yu.* Application of Variance Homogeneity Tests Under Violation of Normality Assumption // Proceedings of the International Workshop "Applied Methods of Statistical Analysis. Simulations and Statistical Inference" – AMSA'2011, Novosibirsk, Russia, 20-22 September, 2011. P. 28-36.

20. *Gorbunova A.A., Lemeshko B.Yu.* Application of Parametric Homogeneity of Variances Tests under Violation of Classical Assumption // Proceedings, 2nd Stochastic Modeling Techniques and Data Analysis International Conference. 5 - 8 June 2012, Chania, Crete, Greece. P.253-260. (http://www.smtda.net/images/1_SMTDA2012_Proceedings_D-J_119-338.pdf)

21. *Hartley H. O.* The maximum F-ratio as a short-cut test of heterogeneity of variance / H. O. Hartley // Biometrika. – 1950. – Vol. 37. – P. 308–312.

22. *Hines W.* Increased power with modified forms of the Levene (Med) test for heterogeneity of variance / W. Hines, R. Hines // Biometrics. – 2000. – Vol. 56. – P. 451–454.

23. *Hoeffding W.* Optimum non-parametric test // Proc.11 th Berkeley Symp., 1950. – P.83-82.

24. *Hollander M.* Non-parametric Statistical Methods / M. Hollander, D. A. Wolfe. – 2nd ed. – New York : Wiley, 1999.

25. *Kiefer J.* K-Sample Analogues of the Kolmogorov-Smirnov and Cramer-v. Mises Tests // Annals of Mathematical Statistics**,** 1959. Vol. 30. No. 2. – P. 420-447.

26. *Klotz J.* Nonparametric tests for scale / J. Klotz // AMS. – 1962. – Vol. 33. – P. 498–512.

27. *Kruskal W. H.* Use of ranks in one-criterion variance analysis / W. H. Kruskal, W. A. Wallis // J. Amer. Statist. Assoc. – 1952. – Vol. 47. – P. 583–621.

28. *Kruskal W. H.* Use of ranks in one-criterion variance analysis / W. H. Kruskal, W. A. Wallis // J. Amer. Statist. Assoc. – 1953. – Vol. 48. – P. 907–911.

29. *Laubsher N. F.* Exact critical Values for Mood`s distribution-free test statistic for dispersion and its normal approximation / N. F. Laubsher, F. E. Steffens, E. M. De Lange // Technometrics. – 1968. – Vol. 10, № 3. – P. 497–508.

30. *Layard M.W.J.* Robust large-sample tests for homogeneity of variances // Journal of the American Statistical Association. – 1973. – Vol. 68. – P. 195–198.

31. *Lee H.B., Katz G.S., Restori A.F.* A Monte Carlo Study of Seven Homogeneity of Variance Tests // Journal of Mathematics and Statistics. 2010. Vol. 6, No. 3. P. 359-366.

32. *Lehman S.* Exact and approximate distributions for the Wilcoxon statistic with ties // Journal of the American Statistical Association. 1961. Vol. 56. – P. 293-988.

33. *Lehmann E. L.* Consistency and unbiasedness of certain nonparametric tests / E. L. Lehmann // Ann. Math. Statist. – 1951. – Vol. 22, № 1. – P. 165–179.

34. *Lemeshko B. Y.* Application of Homogeneity Tests: Problems and Solution / B. Y. Lemeshko, I. V. Veretelnikova, S. B. Lemeshko, A. Y. Novikova // In: Rykov V., Singpurwalla N., Zubkov A. (eds) Analytical and Computational Methods in Probability Theory. ACMPT 2017. Lecture Notes in Computer Science. : monograph. - Cham : Springer, 2017. - 10684. - P. 461-475.

35. *Lemeshko B.* Bartlett and Cochran tests in measurements with probability laws different from normal / B. Lemeshko, E. Mirkin // Measurement Techniques. – 2004. – Vol. 47, № 10. – P. 960–968.

36. *Lemeshko B. Yu.* Distribution models for nonparametric tests for fit in verifying complicated hypotheses and maximum-likelihood estimators. P. 1 / B. Yu. Lemeshko, S. B. Lemeshko // Measurement Techniques. – 2009. – Vol. 52, № 6. – P. 555–565.

37. *Lemeshko B. Yu.* Models for statistical distributions in nonparametric fitting tests on composite hypotheses based on maximum-likelihood estimators. P. II / B. Yu. Lemeshko, S. B. Lemeshko // Measurement Techniques. – 2009. – Vol. 52, № 8. – P. 799–812.

38. *Lemeshko B. Yu.* Power and robustness of criteria used to verify the homogeneity of means / B. Yu. Lemeshko, S. B. Lemeshko // Measurement Techniques. – 2008. – Vol. 51, № 9. – P. 950–959.

39. *Lemeshko B. Yu.* Statistical distribution convergence and homogeneity test power for Smirnov and Lehmann–Rosenblatt tests / B. Yu. Lemeshko, S. B. Lemeshko // Measurement Techniques – 2005. – Vol. 48, № 12. – P. 1159–1166.

40. *Lemeshko B.Yu.* Application and power of criteria for testing the homogeneity of variances. Part I. Parametric criteria / B. Yu. Lemeshko, S. B. Lemeshko, A. A. Gorbunova // Measurement Techniques. – 2010. – Vol. 53, № 3. – P. 237–246.

41. *Lemeshko B.Yu., Lemeshko S.B., and A.A. Gorbunova*. Application and power of criteria for testing the homogeneity of variances. Part II. Nonparametric criteria // Measurement Techniques, Vol. 53, No. 5, 2010. P.476-486. DOI: 10.1007/s11018-010-9530-x

42. *Lemeshko B.Y., Sataeva T.S.* Application and Power of Parametric Criteria for Testing the Homogeneity of Variances. Part III // Measurement Techniques, 2017. Vol. 60. No. 1. – P. 7-14. DOI: 10.1007/s11018-017-1141-3

43. *Lemeshko B.Y., Sataeva T.S.* Application and Power of Parametric Criteria for Testing the Homogeneity of Variances. Part IV // Measurement Techniques, 2017. Vol. 60. No. 5. – P. 425-431. DOI: 10.1007/s11018-017-1213-4

44. *Lemeshko B.Yu., Sataeva T.S.* On the Properties and Application of Tests for Homogeneity of Variances in the Problems of Metrology and Control // Advances in Intelligent Systems and Computing, Vol. 543, 2017. – P. 784-798. DOI: 10.1007/978-3-319-48923-0_84

45. *Lemeshko B.Yu., Gorbunova A.A., Lemeshko S.B., Rogozhnikov A.P.* Application of Nonparametric Goodness-of-fit tests for Composite Hypotheses in Case of Unknown Distributions of Statistics // Proceedings of the International Workshop "Applied Methods of Statistical Analysis. Applications in Survival Analysis, Reliability and Quality Control" – AMSA'2013, Novosibirsk, Russia, 25-27 September, 2013. P. 8-24.

46. *Lemeshko B.Yu., Lemeshko S.B., Rogozhnikov A.P.* Real-Time Studying of Statistic Distributions of Non-Parametric Goodness-of-Fit Tests when Testing Complex Hypotheses // Proceedings of the International Workshop "Applied Methods of Statistical Analysis. Simulations and Statistical Inference" – AMSA'2011, Novosibirsk, Russia, 20-22 September, 2011. P. 19-27.

47. *Leslie R.T., Brown B.M.* Use of range in testing heterogeneity of variance // Biometrika. 1966. Vol. 53. No.1/2. – P. 221-227.

48. *Levene H.* Robust tests for equality of variances // Contributions to Probability and Statistics: Essays in Honor of Harold Hotelling. – 1960. – P. 278-292.

49. *Levene* Test for Equality of Variances [Электронный ресурс] // e-Handbook of Statistical Methods. – Режим доступа : http://www.itl.nist.gov/div898/handbook/ eda/section3/eda35a.htm. –Загл. с экрана.

50. *Lim T.-S., Loh W.-Y.* A comparison of tests of equality of variances // Computational Statistics & Data Analysis. 1996. Vol. 22, No. 5. P. 287-301.

51. *Link R.F.* The sampling distribution of the ratio of two ranges from independent samples // The annals of mathematical statistics. 1950. Vol. 21, No. 1. – P. 112-116.

52. *Mann H. B.* On a test of whether one of two random variables is stochastically larger than the other / H. B. Mann, D. R. Whitney // Ann. Math. Statist. – 1947. – Vol. 18. – P. 50–60.

53. *Miller R.G.* Jackknifing variances // The Annals of Mathematical Statistics – 1968. – Vol. 39. – P. 567–582.

54. *Milton R. C.* An extended table of critical values for the Mann –Whitney (Wilcoxon) two-sample statistic / R. C. Milton // J. Amer. Statist. Ass. – 1964. – Vol. 59. – P. 925–934.

55. *Mood A.* On the asymptotic efficiency of certain nonparametric tests / A. Mood // AMS. – 1954. – Vol. 25. No. 3. – P. 514–522.

56. *Neel J. H.* A Monte Carlo Study of Levene`s Test of Homogeneity of Variance: Empirical Frequencies of Type I Error in Normal Distributions Paper : presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association Convention / J. H. Neel, W. M. Stallings. – Chicago, Illinois, 1974. – April.

57. *Newman D.* The distribution of range in samples from a normal population, expressed in terms of an independent estimate of standard deviation // Biometrika. 1939. Vol. 31. No.1/2. – P. 20-30.

58. *Pettitt A.N.* A two-sample Anderson-Darling rank statistic // Biometrika. 1976. Vol. 63. No.1. P. 161-168.

59. *Rosenblatt M.* Limit theorems associated with variants of the von Mises statistic / M. Rosenblatt // Ann. Math. Statist. – 1952. – Vol. 23. – P. 617–623.

60. *Sataeva T. S., Lemeshko B.Yu.* About properties and power of classical tests of homogeneity of variances // Proceedings 2016 11th International Forum on Strategic Technology (IFOST), June 1-3, 2016, Novosibirsk, Russia. Part 1. – P. 350-354. DOI: 10.1109/IFOST.2016.7884125

61. *Scheffe H.* On Solutions of the Behrens-Fisher Problem, Based on the t-Distribution // The Annals of Mathematical Statistics. 1943. Vol. 14, No. 1. – P. 35-44.

62. *Scheffe H.* Practical Solutions of the Behrens-Fisher Problem // Journal of the American Statistical Association. 1970. Vol. 65. No. 332. – P. 1501-1508.

63. *Scholz F.W., Stephens M.A.* K-Sample Anderson–Darling Tests // Journal of the American Statistical Association. 1987. Vol. 82. No. 399. – P. 918-924.

64. *Siegel S.* A nonparametric sum of rank procedure for relative spread in unpaired samples / S. Siegel, J. W. Tukey // JASA. – 1960. – Vol. 55, № 291. – P. 429–445.

65. *Sukhatme B. V.* On certain Two-sample nonparametric tests for variances / B. V. Sukhatme // AMS. – 1957. – Vol. 28, № 1. – P. 188–194.

66. *Terry M.E.* Some rank order test which are most powerful against specific parametric alternatives // The Annals of Mathematical Statistics. 1952. Vol. 23. – P.346-366.

67. *O'Brien R.G.* Robust techniques for testing heterogeneity of variance effects in factorial designs // Psychometrika. 1978. Vol. 43, No. 3. P. 327-342.

68. *Overall J.E., Woodward J.A.* A simple test for heterogeneity of variance in complex factorial design // Psychometrika. 1974. Vol. 39. No. 3. – P. 311-318.

69. *Overall J.E., Woodward J.A.* A robust and powerful test for heterogeneity of variance // University of Texas Medical Branch Psychometric Laboratory. 1976.

70. *Parra-Frutos I.* The behaviour of the modified Levene's test when data are not normally distributed // Computational Statistics. – 2009. – Vol. 24. – P. 671–693.

71. *Welch B. L.* The Significance of the Difference Between Two Means when the Population Variances are Unequal // Biometrika. 1938. Vol. 29, No. 3/4. – P. 350-362.

72. *Welch B. L.* The generalization of "Student's" problem when several different population variances are involved // Biometrika. 1947. Vol. 34, No. 1/2. – P. 28-35.

73. *Wilcoxon F.* Individual comparisons by ranking methods / F. Wilcoxon // Biometrics Bulletin. – 1945. – № 1. – P. 80–83.

74. *Zhang J.* Powerful goodness-of-fit and multi-sample tests / J. Zhang // PhD Thesis. York University, Toronto. 2001. – 113 p. URL:

http://www.collectionscanada.gc.ca/obj/s4/f2/dsk3/ftp05/NQ66371.pdf (дата обращения 28.01.2013).

75. *Zhang J.* Powerful Two-Sample Tests Based on the Likelihood Ratio / J. Zhang // Technometrics. – 2006. – V. 48. – No. 1. – P.95-103. DOI 10.1198/004017005000000328

76. *Zhang J., Wu Y.* k-Sample tests based on the likelihood ratio // Computational Statistics & Data Analysis. – 2007. – V. 51. – No. 9. – P. 4682-4691.

77. *Большев Л. Н.* Таблицы математической статистики / Л. Н. Большев, Н. В. Смирнов. – М. : Наука, 1983. – 416 с.

78. *Боровков А. А.* К задаче о двух выборках / А. А. Боровков // Изв. АН СССР, Сер. матем. – 1962. – Т. 26. – С. 605–624.

79. *Ван дер Варден Б.Л.* Математическая статистика. – М.: Иностранная литература, 1960. – 435 с.

80. *Гаек Я., Шидак З.* Теория ранговых критериев. – Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1971. – 376 с.

81. *Закс Л.* Статистическое оценивание / Л. Закс. – М. : Статистика, 1976. – 598 с.

82. *Кобзарь А. И.* Прикладная математическая статистика. Для инженеров и научных работников / А. И. Кобзарь. – М. : Физматлит, 2006. – 816 с.

83. *Королюк В. С.* Асимптотический анализ распределений максимальных уклонений в схеме Бернулли // Теория вероятностей и ее применения. – 1959. – Т.4. – С. 369-397.

84. Крамер Г. Математические методы статистики. – М.: Мир, 1975. – 648 с.

85. *Лемешко Б.Ю.* О задаче идентификации закона распределения случайной составляющей погрешности измерений // Метрология. 2004. № 7. - С. 8-17.

86. *Лемешко Б.Ю.* Непараметрические критерии согласия. Руководство по применению. М.: ИНФРА-М, 2014. 163 с. DOI: 10.12737/11873

87. *Лемешко Б.Ю.* Критерии проверки отклонения распределения от нормального закона. Руководство по применению. М.: ИНФРА-М, 2015. 160 с. (Научная мысль). DOI: 10.12737/6086

88. *Лемешко Б.Ю., Блинов П.Ю.* Критерии проверки отклонения распределения от равномерного закона. Руководство по применению. М.: ИНФРА-М, 2015. 183 с. (Научная мысль). DOI: 10.12737/11304

89. *Лемешко Б. Ю.* Статистический анализ одномерных наблюдений случайных величин : программная система / Б. Ю. Лемешко. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 1995. – 125 с.

90. *Лемешко Б. Ю.* Модели распределений статистик непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез с

использованием оценок максимального правдоподобия. Ч. I / Б. Ю. Лемешко, С. Б. Лемешко // Измерительная техника. – 2009. – № 6. – С. 3–11.

91. *Лемешко Б. Ю.* Модели распределений статистик непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез с использованием оценок максимального правдоподобия. Ч. II / Б. Ю. Лемешко, С. Б. Лемешко // Измерительная техника. – 2009. – № 8. – С. 17–26.

92. *Лемешко Б. Ю.* О сходимости распределений статистик и мощности критериев однородности Смирнова и Лемана–Розенблатта / Б. Ю. Лемешко, С. Б. Лемешко // Измерительная техника. – 2005. – № 12. – С. 9–14.

93. *Лемешко Б.Ю.* О применении критериев проверки однородности законов распределения / Б.Ю. Лемешко, С.Б. Лемешко, И.В. Веретельникова // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2017. – № 41. – С. 24-31.

94. *Лемешко Б. Ю.* Об устойчивости и мощности критериев проверки однородности средних / Б. Ю. Лемешко, С. Б. Лемешко // Измерительная техника. – 2008. – № 9. – С. 23–28.

95. *Лемешко Б. Ю.* О применении и мощности критериев проверки однородности дисперсий. Ч. I. Параметрические критерии / Б. Ю. Лемешко, С. Б. Лемешко, А. А. Горбунова // Измерительная техника. – 2010. – № 3. – С. 10–16.

96. *Лемешко Б. Ю.* О применении и мощности критериев проверки однородности дисперсий. Ч. II. Непараметрические критерии / Б. Ю. Лемешко, С. Б. Лемешко, А. А. Горбунова // Измерительная техника. – 2010. – № 5. – С. 11–18.

97. *Лемешко Б.Ю., Сатаева Т.С.* Применение и мощность параметрических критериев проверки однородности дисперсий. Ч. 4 // Измерительная техника. – 2017. – № 5. – С. 12-17.

98. *Лемешко Б.Ю., Сатаева Т.С.* Применение и мощность параметрических критериев проверки однородности дисперсий. Ч. 4 // Измерительная техника. – 2017. – № 5. – С. 12-17.

99. *Лемешко Б.Ю., Лемешко С.Б., Постовалов С.Н., Чимитова Е.В.* Статистический анализ данных, моделирование и исследование вероятностных закономерностей. Компьютерный подход: Монография. Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2011. 888 с.

100. *Лемешко Б. Ю.* Исследование критериев проверки гипотез, используемых в задачах управления качеством / Б. Ю. Лемешко, С. Б. Лемешко, Е. П. Миркин // АПЭП-2004. Актуальные проблемы электронного приборостроения : материалы VII междунар. конф. – Новосибирск, 2004. – Т. 6. – С. 269–272.

101. *Лемешко Б. Ю.* Критерии Бартлетта и Кокрена в измерительных задачах при вероятностных законах, отличающихся от нормального / Б. Ю. Лемешко, Е. П. Миркин // Измерительная техника. – 2004. – № 10. – С. 10–16.

102. *Лемешко Б. Ю.* Корреляционный анализ наблюдений многомерных случайных величин при нарушении предположений о нормальности / Б. Ю. Лемешко, С. С. Помадин // Сибирский журнал индустриальной математики. 2002. – Т. 5, № 3. – С. 115–130.

103. *Лемешко Б. Ю.* Проверка гипотез о математических ожиданиях и дисперсиях в задачах метрологии и контроля качества при вероятностных законах, отличающихся от нормального / Б. Ю. Лемешко, С. С. Помадин // Метрология, 2004. – № 3. – С. 3–15.

104. *Лемешко Б. Ю.* Исследование распределений статистик, используемых для проверки гипотез о равенстве дисперсий при законах ошибок, отличных от нормального / Б. Ю. Лемешко, В. М. Пономаренко // Науч. вест. НГТУ. – 2006. – № 2(23). – С. 21–33.

105. *Лемешко Б. Ю.* Компьютерные технологии анализа данных и исследования статистических закономерностей : учеб. пособие / Б. Ю. Лемешко, С. Н. Постовалов. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2004. – 120 с.

106. *Лемешко Б. Ю.* Компьютерные технологии анализа данных и исследования статистических закономерностей : метод. указания к выполнению лаб. работ / Б. Ю. Лемешко, С. Н. Постовалов, С. Б. Лемешко. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2007. – 71 с.

107. *Макаров А.А., Симонова Г.И.* Исследование мощности двухвыборочного критерия Андерсена–Дарлинга в случае засорения одной из выборок. // Статистические методы оценивания и проверки гипотез. Межвуз. сб. науч. тр. № 20, Перм. ун-т. – Пермь, 2007 – с. 40-52.

108. *Миттаг Х.-Й.* Статистические методы обеспечения качества / Х.-Й. Миттаг, Х. Ринне. – М. : Машиностроение. 1995. – 600 с.

109. *Орлов А. И.* О проверке однородности двух независимых выборок / А. И. Орлов // Завод. лаб. – 2003. – Т. 69, №. 1. – С. 55–60.

110. *Постовалов С.Н.* Применение компьютерного моделирования для расширения прикладных возможностей классических методов проверки статистических гипотез. Диссертация на соискание ученой степени доктора технических наук. Новосибирск. 2013. 298 с.

111. Программная система статистического анализа одномерных случайных величин – ISW. URL: http://ami.nstu.ru/~headrd/ISW.htm (дата обращения 12.07.2016)

112. Р 50.1.033–2001. Рекомендации по стандартизации. Прикладная статистика. Правила проверки согласия опытного распределения с теоретическим. Ч. I. Критерии типа хи-квадрат. – М. : Изд-во стандартов, 2002. – 87 с.

113. Р 50.1.037–2002. Рекомендации по стандартизации. Прикладная статистика. Правила проверки согласия опытного распределения с теоретическим. Ч. II. Непараметрические критерии. – М. : Изд-во стандартов, 2002. – 64 с.

114. *Смирнов Н. В.* Вероятности больших значений непараметрических односторонних критериев согласия / Н. В. Смирнов // Тр. матем. ин-та АН СССР. – 1961. – Т. 64. – С. 185–210.

115. *Смирнов Н. В.* Оценка расхождения между эмпирическими кривыми распределения в двух независимых выборках / Н. В. Смирнов // Бюл. МГУ, Серия А. – 1939. – Т. 2, № 2. – С. 3–14.

Приложение А

Таблица А.1

Функция распределения Колмогорова K(S)

S	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.2	0.000000	000 000	000 000	000 000	000 000	000 000	000 000	000 000	000 001	000 004
0.3	0.000009	000 021	000 046	000 091	000 171	000 303	000 511	000 826	001 285	001 929
0.4	0.002808	003 972	005 476	007 377	009 730	012 589	016 005	020 022	024 682	030 017
0.5	0.036055	042 814	050 306	058 534	067 497	077 183	087 577	098 656	110 394	122 760
0.6	0.135718	149 229	163 255	177 752	192 677	207 987	223 637	239 582	255 780	272 188
0.7	0.288765	305 471	322 265	339 114	355 981	372 833	389 640	406 372	423 002	439 505
0.8	0.455858	472 039	488 028	503 809	519 365	534 682	549 745	564 545	579 071	593 315
0.9	0.607269	620 928	634 285	647 337	660 081	672 515	684 836	696 445	707 941	719 126
1.0	0.730000	740 566	750 825	760 781	770 436	779 794	788 860	797 637	806 130	814 343
1.1	0.822282	829 951	837 356	844 502	851 395	858 040	864 443	870 610	876 546	882 258
1.2	0.887750	893 030	898 102	903 973	907 648	912 134	916 435	920 557	924 506	928 288
1.3	0.931908	935 371	938 682	941 847	944 871	947 758	950 514	953 144	955 651	958 041
1.4	0.960318	962 487	964 551	966 515	968 383	970 159	971 846	973 448	974 969	976 413
1.5	0.977782	979 080	980 310	981 475	982 579	983 623	984 610	985 544	986 427	987 261
1.6	0.988048	988 791	989 492	990 154	990 777	991 364	991 917	992 438	992 928	993 389
1.7	0.993823	994 230	994 612	994 972	995 309	995 625	995 922	996 200	996 460	996 704
1.8	0.996932	997 146	997 346	997 533	997 707	997 870	998 023	998 165	998 297	998 421
1.9	0.998536	998 644	998 744	998 837	998 924	999 004	999 079	999 149	999 213	999 273
2.0	0.999329	999 381	999 429	999 473	999 514	999 553	999 588	999 620	999 651	999 679
2.1	0.999705	999 728	999 750	999 771	999 790	999 807	999 823	999 837	999 851	999 863
2.2	0.999874	999 886	999 895	999 904	999 912	999 920	999 927	999 933	999 939	999 944
2.3	0.999949	999 954	999 958	999 961	999 965	999 968	999 971	999 974	999 976	999 978
2.4	0.999980	999 982	999 984	999 985	999 987	999 988	999 989	999 990	999 991	999 992

Таблица А.2

Функция распределения a1(S)

S	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.00000	00 001	00 300	02 568	06 685	12 372	18 602	24 844	30 815	36 386
0.1	0.41513	46 196	50 457	54 329	57 846	61 042	63 951	66 600	69 019	71 229
0.2	0.73253	75 109	76 814	78 383	79 829	81 163	82 396	83 536	84 593	85 573
0.3	0.86483	87 329	88 115	88 848	89 531	90 167	90 762	91 317	91 836	92 321
0.4	0.92775	93 201	93 599	93 972	94 323	94 651	94 960	95 249	95 521	95 777
0.5	0.96017	96 242	96 455	96 655	96 843	97 020	97 186	97 343	97 491	97 630
0.6	0.97762	97 886	98 002	98 112	98 216	98 314	98 406	98 493	98 575	98 653
0.7	0.98726	98 795	98 861	98 922	98 981	99 036	99 088	99 137	99 183	99 227
0.8	0.99268	99 308	99 345	99 380	99 413	99 444	99 474	99 502	99 528	99 553
0.9	0.99577	99 599	99 621	99 641	99 660	99 678	99 695	99 711	99 726	99 740
1.0	0.99754	99 764	99 776	99 787	99 799	99 812	99 820	99 828	99 837	99 847
1.1	0.99856	99 862	99 869	99 876	99 883	99 890	99 895	99 900	99 905	99 910
1.2	0.99916	99 919	99 923	99 927	99 931	99 935	99 938	99 941	99 944	99 947
1.3	0.99950	99 953	99 955	99 957	99 959	99 962	99 964	99 965	99 967	99 969
1.4	0.99971	99 972	99 973	99 975	99 976	99 978	99 978	99 979	99 980	99 980

Таблица А.3

Функция распределения *a*2(*S*)

S	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.00000	00 000	00 000	00 000	00 000	00 000	00 000	00 000	00 000	00 001
0.1	0.00003	00 008	00 020	00 043	00 081	00 141	00 228	00 349	00 508	00 710
0.2	0.00959	01 256	01 605	02 005	02 457	02 961	03 514	04 115	04 762	05 453
0.3	0.06184	06 954	07 759	08 596	09 463	10 356	11 273	12 211	13 168	14 140
0.4	0.15127	16 124	17 132	18 146	19 166	20 190	21 217	22 244	23 271	24 296
0.5	0.25319	26 337	27 351	28 359	29 360	30 355	31 342	32 320	33 290	34 250
0.6	0.35200	36 141	37 071	37 991	38 900	39 798	40 684	41 560	42 424	43 277
0.7	0.44118	44 947	45 765	46 572	47 367	48 150	48 922	49 683	50 432	51 170
0.8	0.51897	52 613	53 318	54 012	54 695	55 368	56 030	56 682	57 324	57 956
0.9	0.58577	59 189	59 791	60 383	60 966	61 540	62 104	62 660	63 206	63 744
1.0	0.64273	64 794	65 306	65 811	66 307	66 795	67 275	67 748	68 213	68 670
1.1	0.69120	69 563	69 999	70 428	70 851	71 266	71 675	72 077	72 473	72 863
1.2	0.73247	73 624	73 996	74 361	74 721	75 075	75 424	75 767	76 105	76 438
1.3	0.76765	77 088	77 405	77 717	78 025	78 328	78 626	78 919	79 209	79 493
1.4	0.79773	80 049	80 321	80 589	80 852	81 112	81 368	81 620	81 868	82 112
1.5	0.82352	82 589	82 823	83 053	83 279	83 503	83 723	83 939	84 153	84 363
1.6	0.84570	84 774	84 975	85 173	85 369	85 561	85 751	85 938	86 122	86 303
1.7	0.86482	86 659	86 832	87 004	87 173	87 339	87 503	87 665	87 824	87 981

Окончание табл. А.3

S	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.8	0.88136	88 289	88 439	88 588	88 734	88 878	89 021	89 161	89 299	89 435
1.9	0.89570	89 703	89 833	89 962	90 089	90 215	90 338	90 460	90 581	90 699
2.0	0.90816	90 932	91 046	91 158	91 269	91 378	91 486	91 592	91 697	91 800
2.1	0.91902	92 003	92 102	92 200	92 297	92 392	92 486	92 579	92 671	92 761
2.2	0.92851	92 939	93 025	93 111	93 196	93 279	93 361	93 443	93 523	93 602
2.3	0.93680	93 757	93 833	93 908	93 983	94 056	94 128	94 199	94 269	94 339
2.4	0.94407	94 475	94 542	94 608	94 673	94 737	94 800	94 863	94 925	94 986
2.5	0.95046	95 105	95 164	95 222	95 279	95 336	95 391	95 446	95 501	95 554
2.6	0.95607	95 660	95 711	95 762	95 813	95 862	95 912	95 960	96 008	96 055
2.7	0.96102	96 148	96 194	96 239	96 283	96 327	96 370	96 413	96 455	96 497
2.8	0.96538	96 579	96 619	96 659	96 698	96 737	96 775	96 813	96 850	96 887
2.9	0.96923	96 959	96 995	97 030	97 064	97 099	97 132	97 166	97 199	97 231
3.0	0.97263	97 295	97 327	97 358	97 388	97 419	97 449	97 478	97 507	97 536
3.1	0.97565	97 593	97 621	97 648	97 675	97 702	97 729	97 755	97 781	97 806
3.2	0.97831	97 856	97 881	97 905	97 929	97 953	97 977	98 000	98 023	98 046
3.3	0.98068	98 090	98 112	98 134	98 155	98 176	98 197	98 217	98 238	98 258
3.4	0.98278	98 297	98 317	98 336	98 355	98 374	98 392	98 410	98 429	98 447
3.5	0.98464	98 482	98 499	98 516	98 533	98 549	98 566	98 582	98 598	98 614
3.6	0.98630	98 645	98 660	98 676	98 691	98 705	98 720	98 734	98 749	98 763
3.7	0.98777	98 791	98 804	98 818	98 831	98 844	98 857	98 870	98 883	98 895
3.8	0.98908	98 920	98 932	98 944	98 956	98 968	98 979	98 991	99 002	99 013
3.9	0.99024	99 035	99 046	99 057	99 067	99 078	99 088	99 098	99 108	99 118
4.0	0.99128	99 221	99 303	99 377	99 442	99 501	99 553	99 600	99 642	99 679
5.0	0.99713	99 742	99 769	99 793	99 814	99 834	99 851	99 866	99 880	99 892
6.0	0.99903	99 913	99 922	99 930	99 937	99 944	99 949	99 954	99 959	99 963
7.0	0.99967	99 970	99 973	99 976	99 978	99 981	99 983	99 984	99 986	99 987
8.0	0.99989	99 990	99 991	99 992	99 993	99 993	99 994	99 995	99 995	99 996
9.0	0.99996	–	–	–	–	–	–	–	–	–

Таблица А.4

Процентные точки распределения Колмогорова

Функция распределения	Верхние процентные точки				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
$K(S)$	1.1379	1.2238	1.3581	1.4802	1.6276

Таблица А.5

Процентные точки распределения a1(S)

Функция распределения	Верхние процентные точки				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
$a1(S)$	0.2841	0.3473	0.4614	0.5806	0.7434

Таблица А.6

Процентные точки распределения $a2(S)$

Функция распределения	Верхние процентные точки				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
$a2(S)$	1.6212	1.9330	2.4924	3.0775	3.8781

Таблица А.7

Верхние процентные точки для статистики критерия Бартлетта при нормальном законе и $n_i = n$

n	$k=2$			$k=3$			$k=4$			$k=5$			$k=6$		
	α			α			α			α			α		
	0.1	0.05	0.01	0.1	0.05	0.01	0.1	0.05	0.01	0.1	0.05	0.01	0.1	0.05	0.01
3	2.654	3.721	6.271	4.506	5.788	8.749	6.126	7.552	10.807	7.604	9.161	12.700	9.000	10.681	14.494
4	2.692	3.801	6.482	4.622	5.980	9.079	6.271	7.788	11.176	7.794	9.442	13.104	9.226	10.988	14.899
5	2.701	3.823	6.535	4.637	6.022	9.205	6.300	7.861	11.343	7.845	9.540	13.252	9.301	11.110	15.039
6	2.705	3.832	6.588	4.646	6.045	9.271	6.313	7.892	11.414	7.855	9.573	13.344	9.328	11.169	15.161
7	2.709	3.839	6.597	4.644	6.049	9.307	6.313	7.897	11.462	7.863	9.594	13.396	9.331	11.186	15.214
8	2.703	3.829	6.607	4.643	6.054	9.309	6.308	7.897	11.474	7.860	9.602	13.432	9.331	11.191	15.233
9	2.702	3.832	6.608	4.643	6.050	9.318	6.309	7.894	11.475	7.859	9.597	13.432	9.325	11.187	15.236
10	2.704	3.837	6.619	4.635	6.040	9.318	6.305	7.897	11.487	7.856	9.592	13.442	9.321	11.183	15.258
15	2.704	3.837	6.619	4.630	6.035	9.307	6.291	7.884	11.481	7.833	9.578	13.440	9.298	11.168	15.266
20	2.704	3.838	6.621	4.625	6.026	9.300	6.282	7.874	11.464	7.823	9.561	13.429	9.290	11.157	15.227
30	2.708	3.844	6.333	4.622	6.019	9.262	6.270	7.854	11.437	7.811	9.543	13.375	9.270	11.134	15.197
χ^2_{k-1}	2.706	3.841	6.635	4.605	5.991	9.210	6.251	7.815	11.345	7.779	9.488	13.277	9.236	11.070	15.086

Таблица А.8

Верхние процентные точки для статистики критерия Кокрена при нормальном законе и $n_i = n$

n	$k=2$			$k=3$			$k=4$			$k=5$			$k=6$		
	α			α			α			α			α		
	0.1	0.05	0.01	0.1	0.05	0.01	0.1	0.05	0.01	0.1	0.05	0.01	0.1	0.05	0.01
5	0.865	0.906	0.959	0.700	0.752	0.839	0.584	0.634	0.727	0.503	0.550	0.641	0.443	0.485	0.570
8	0.791	0.833	0.899	0.614	0.658	0.741	0.501	0.541	0.619	0.426	0.461	0.532	0.370	0.402	0.466
10	0.761	0.801	0.868	0.581	0.622	0.698	0.470	0.506	0.576	0.397	0.428	0.491	0.344	0.371	0.427
15	0.713	0.748	0.811	0.531	0.564	0.628	0.424	0.453	0.510	0.355	0.379	0.429	0.306	0.327	0.370
20	0.684	0.716	0.774	0.502	0.531	0.588	0.399	0.422	0.471	0.332	0.352	0.394	0.284	0.302	0.339
25	0.665	0.694	0.748	0.484	0.509	0.560	0.382	0.403	0.445	0.316	0.334	0.371	0.270	0.286	0.318
30	0.650	0.677	0.727	0.470	0.493	0.539	0.369	0.388	0.427	0.305	0.321	0.354	0.260	0.274	0.302
40	0.630	0.654	0.699	0.450	0.470	0.510	0.352	0.368	0.401	0.290	0.303	0.331	0.247	0.258	0.282
50	0.617	0.638	0.679	0.437	0.455	0.490	0.340	0.355	0.384	0.280	0.291	0.316	0.237	0.247	0.268
60	0.606	0.626	0.664	0.428	0.444	0.476	0.332	0.345	0.371	0.272	0.283	0.305	0.231	0.240	0.258
70	0.598	0.617	0.652	0.421	0.435	0.465	0.326	0.337	0.361	0.266	0.276	0.296	0.226	0.234	0.251
80	0.592	0.609	0.642	0.415	0.429	0.456	0.320	0.331	0.354	0.262	0.271	0.289	0.221	0.229	0.245
90	0.587	0.603	0.634	0.410	0.423	0.449	0.316	0.326	0.348	0.258	0.266	0.284	0.218	0.225	0.240
100	0.582	0.598	0.628	0.406	0.418	0.443	0.313	0.322	0.342	0.255	0.263	0.279	0.215	0.222	0.236

Таблица А.9

Верхние процентные точки для статистики Кокрена в случае семейства законов (4.3) при $k = 2$ и $n_i = n$

n	De(1)			De(2)			De(3)			De(4)			De(5)		
	α			α			α			α			α		
	0.1	0.05	0.01	0.1	0.05	0.01	0.1	0.05	0.01	0.1	0.05	0.01	0.1	0.05	0.01
5	0.917	0.947	0.980	0.865	0.906	0.959	0.845	0.890	0.950	0.836	0.883	0.947	0.831	0.879	0.945
8	0.862	0.900	0.949	0.791	0.833	0.899	0.764	0.807	0.877	0.751	0.794	0.866	0.744	0.787	0.861
10	0.836	0.875	0.930	0.761	0.801	0.868	0.733	0.773	0.842	0.720	0.759	0.829	0.713	0.751	0.822
15	0.789	0.829	0.890	0.713	0.748	0.811	0.686	0.719	0.780	0.674	0.706	0.765	0.667	0.698	0.757
20	0.759	0.797	0.858	0.684	0.716	0.774	0.660	0.689	0.743	0.648	0.676	0.728	0.642	0.669	0.720
25	0.736	0.772	0.834	0.665	0.694	0.748	0.642	0.668	0.717	0.632	0.656	0.703	0.626	0.649	0.695
30	0.718	0.753	0.814	0.650	0.677	0.727	0.629	0.653	0.699	0.619	0.642	0.685	0.614	0.635	0.677
40	0.693	0.725	0.782	0.630	0.654	0.699	0.611	0.632	0.672	0.603	0.622	0.660	0.598	0.616	0.653
50	0.674	0.704	0.758	0.617	0.638	0.679	0.599	0.618	0.654	0.591	0.609	0.642	0.587	0.604	0.636
60	0.660	0.689	0.740	0.606	0.626	0.664	0.591	0.608	0.640	0.583	0.599	0.630	0.579	0.594	0.624
70	0.649	0.676	0.724	0.598	0.617	0.652	0.584	0.599	0.630	0.577	0.591	0.620	0.573	0.587	0.614
80	0.640	0.665	0.712	0.592	0.609	0.642	0.578	0.593	0.621	0.572	0.585	0.612	0.568	0.581	0.607
90	0.632	0.657	0.701	0.587	0.603	0.634	0.573	0.587	0.614	0.567	0.580	0.605	0.564	0.576	0.600
100	0.626	0.649	0.692	0.582	0.598	0.628	0.570	0.583	0.609	0.564	0.576	0.600	0.561	0.572	0.595

Таблица А.10

Верхние процентные точки для статистики Кокрена в случае семейства законов (4.3) при $k = 3$ **и** $n_i = n$

n	De(1)			De(2)			De(3)			De(4)			De(5)		
	α			α			α			α			α		
	0.1	0.05	0.01	0.1	0.05	0.01	0.1	0.05	0.01	0.1	0.05	0.01	0.1	0.05	0.01
5	0.794	0.847	0.918	0.700	0.752	0.839	0.665	0.717	0.806	0.649	0.700	0.790	0.641	0.690	0.781
8	0.716	0.768	0.852	0.614	0.658	0.741	0.579	0.620	0.698	0.563	0.602	0.677	0.554	0.591	0.665
10	0.681	0.732	0.817	0.581	0.622	0.698	0.548	0.584	0.654	0.533	0.567	0.634	0.524	0.557	0.622
15	0.623	0.669	0.751	0.531	0.564	0.628	0.503	0.531	0.588	0.489	0.516	0.569	0.482	0.508	0.558
20	0.587	0.629	0.707	0.502	0.531	0.588	0.477	0.501	0.550	0.466	0.488	0.533	0.459	0.480	0.524
25	0.562	0.600	0.673	0.484	0.509	0.560	0.461	0.482	0.526	0.450	0.470	0.510	0.444	0.463	0.501
30	0.543	0.578	0.647	0.470	0.493	0.539	0.449	0.468	0.507	0.439	0.457	0.493	0.434	0.451	0.485
40	0.515	0.547	0.608	0.450	0.470	0.510	0.432	0.449	0.482	0.424	0.439	0.470	0.419	0.434	0.463
50	0.496	0.525	0.581	0.437	0.455	0.490	0.421	0.436	0.465	0.414	0.427	0.454	0.410	0.422	0.448
60	0.482	0.508	0.560	0.428	0.444	0.476	0.413	0.426	0.453	0.406	0.418	0.443	0.402	0.414	0.437
70	0.471	0.495	0.543	0.421	0.435	0.465	0.407	0.419	0.444	0.401	0.412	0.434	0.397	0.408	0.429
80	0.462	0.485	0.530	0.415	0.429	0.456	0.402	0.413	0.436	0.396	0.406	0.427	0.393	0.403	0.422
90	0.455	0.476	0.518	0.410	0.423	0.449	0.398	0.408	0.430	0.392	0.402	0.422	0.389	0.398	0.417
100	0.449	0.469	0.509	0.406	0.418	0.443	0.394	0.405	0.425	0.389	0.398	0.417	0.386	0.395	0.413

Таблица А.11

Верхние процентные точки для статистики Кокрена в случае семейства законов (4.3) при $k = 4$ **и** $n_i = n$

n	De(1)			De(2)			De(3)			De(4)			De(5)		
	α			α			α			α			α		
	0.1	0.05	0.01	0.1	0.05	0.01	0.1	0.05	0.01	0.1	0.05	0.01	0.1	0.05	0.01
5	0.696	0.755	0.848	0.584	0.634	0.727	0.545	0.591	0.679	0.527	0.571	0.656	0.517	0.560	0.643
8	0.611	0.666	0.761	0.501	0.541	0.619	0.466	0.500	0.569	0.450	0.482	0.546	0.441	0.471	0.533
10	0.575	0.626	0.720	0.470	0.506	0.576	0.438	0.468	0.529	0.423	0.451	0.507	0.415	0.441	0.495
15	0.517	0.561	0.646	0.424	0.453	0.510	0.397	0.421	0.468	0.385	0.406	0.450	0.378	0.398	0.439
20	0.482	0.521	0.598	0.399	0.422	0.471	0.375	0.395	0.435	0.364	0.382	0.419	0.358	0.375	0.410
25	0.457	0.493	0.563	0.382	0.403	0.445	0.360	0.378	0.413	0.351	0.366	0.398	0.346	0.360	0.390
30	0.439	0.471	0.536	0.369	0.388	0.427	0.350	0.365	0.397	0.341	0.355	0.384	0.336	0.349	0.377
40	0.413	0.441	0.498	0.352	0.368	0.401	0.335	0.348	0.348	0.328	0.340	0.364	0.324	0.335	0.358
50	0.395	0.420	0.470	0.340	0.355	0.384	0.326	0.337	0.361	0.319	0.329	0.351	0.315	0.325	0.345
60	0.382	0.404	0.451	0.332	0.345	0.371	0.319	0.329	0.350	0.313	0.322	0.341	0.309	0.318	0.336
70	0.372	0.392	0.435	0.326	0.337	0.361	0.313	0.323	0.342	0.308	0.316	0.334	0.305	0.313	0.329
80	0.364	0.383	0.422	0.320	0.331	0.354	0.309	0.318	0.336	0.304	0.312	0.328	0.301	0.309	0.324
90	0.357	0.375	0.412	0.316	0.326	0.348	0.305	0.314	0.331	0.300	0.308	0.324	0.298	0.305	0.320
100	0.352	0.368	0.403	0.313	0.322	0.342	0.302	0.310	0.327	0.298	0.305	0.320	0.295	0.302	0.316

Т а б л и ц а А . 1 2

Верхние процентные точки для статистики Кокрена в случае семейства законов (4.3) при $k = 5$ и $n_i = n$

n	De(1)			De(2)			De(3)			De(4)			De(5)		
	α			α			α			α			α		
	0.1	0.05	0.01	0.1	0.05	0.01	0.1	0.05	0.01	0.1	0.05	0.01	0.1	0.05	0.01
5	0.623	0.684	0.787	0.504	0.551	0.642	0.464	0.505	0.588	0.446	0.484	0.562	0.436	0.472	0.548
8	0.537	0.591	0.690	0.426	0.461	0.533	0.392	0.421	0.482	0.376	0.403	0.458	0.367	0.393	0.446
10	0.501	0.550	0.645	0.397	0.428	0.491	0.366	0.392	0.444	0.352	0.375	0.422	0.344	0.366	0.411
15	0.445	0.485	0.567	0.355	0.379	0.429	0.330	0.349	0.390	0.318	0.336	0.372	0.312	0.329	0.363
20	0.412	0.447	0.520	0.332	0.352	0.394	0.310	0.326	0.360	0.300	0.315	0.345	0.295	0.308	0.337
25	0.388	0.420	0.485	0.316	0.334	0.371	0.297	0.311	0.341	0.288	0.301	0.328	0.283	0.295	0.320
30	0.370	0.399	0.459	0.305	0.321	0.354	0.287	0.300	0.327	0.279	0.291	0.315	0.275	0.286	0.308
40	0.347	0.371	0.371	0.290	0.303	0.331	0.275	0.285	0.308	0.268	0.278	0.298	0.264	0.273	0.292
50	0.330	0.352	0.397	0.280	0.291	0.316	0.266	0.276	0.295	0.260	0.269	0.286	0.257	0.265	0.281
60	0..318	0.337	0.378	0.272	0.283	0.304	0.220	0.227	0.242	0.254	0.262	0.278	0.252	0.259	0.274
70	0.309	0.326	0.363	0.266	0.276	0.296	0.255	0.263	0.279	0.250	0.257	0.272	0.247	0.254	0.268
80	0.301	0.318	0.352	0.262	0.271	0.289	0.251	0.259	0.274	0.247	0.253	0.267	0.244	0.250	0.263
90	0.295	0.310	0.342	0.258	0.266	0.284	0.248	0.255	0.269	0.244	0.250	0.263	0.242	0.247	0.259
100	0.290	0.304	0.334	0.255	0.263	0.279	0.246	0.252	0.265	0.242	0.247	0.259	0.239	0.245	0.256

Таблица А.13

Верхние процентные точки для статистики критерия Хартли при нормальном законе и $n_i = n$

n	$k=2$			$k=3$			$k=4$			$k=5$			$k=6$		
	α			α			α			α			α		
	0.1	0.05	0.01	0.1	0.05	0.01	0.1	0.05	0.01	0.1	0.05	0.01	0.1	0.05	0.01
5	6.382	9.602	23.26	10.42	15.58	37.07	13.95	20.70	49.10	17.19	25.43	59.40	20.19	29.80	69.67
8	3.777	4.986	8.856	5.335	6.960	12.07	6.533	8.464	14.59	7.548	9.746	16.70	8.441	10.84	18.50
10	3.177	4.026	6.551	4.278	5.365	8.569	5.089	6.336	9.989	5.757	7.140	11.17	6.331	7.820	12.15
15	2.484	2.979	4.305	3.127	3.715	5.278	3.581	4.230	5.943	3.937	4.628	6.440	4.237	4.966	6.873
20	2.167	2.525	3.432	2.637	3.045	4.068	2.956	3.394	4.487	3.199	3.659	4.801	3.405	3.884	5.069
25	1.983	2.270	2.965	2.355	2.672	3.443	2.606	2.942	3.754	2.798	3.148	3.995	2.956	3.318	4.189
30	1.861	2.100	2.670	2.175	2.435	2.054	2.381	2.654	3.298	2.539	2.821	3.487	2.667	2.959	3.638
40	1.705	1.890	2.323	1.947	2.147	2.600	2.105	2.308	2.778	2.224	2.434	2.912	2.320	2.533	3.018
50	1.607	1.763	2.113	1.809	1.971	2.337	1.938	2.105	2.478	2.036	2.205	2.583	2.115	2.285	2.667
60	1.540	1.674	1.975	1.715	1.854	2.160	1.826	1.968	2.281	1.910	2.052	2.366	1.975	2.119	2.437
70	1.490	1.609	1.871	1.645	1.767	2.034	1.744	1.867	2.138	1.817	1.942	2.214	1.875	2.000	2.275
80	1.451	1.559	1.796	1.592	1.702	1.941	1.681	1.791	2.031	1.746	1.857	2.098	1.799	1.910	2.152
90	1.419	1.519	1.735	1.549	1.649	1.866	1.630	1.731	1.949	1.690	1.791	2.009	1.737	1.839	2.056
100	1.394	1.486	1.686	1.514	1.606	1.807	1.590	1.682	1.882	1.645	1.738	1.935	1.688	1.781	1.980

Т а б л и ц а А . 1 4

Верхние процентные точки для статистики критерия Левене при нормальном законе и $n_i = n$

n	$k=2$			$k=3$			$k=4$			$k=5$			$k=6$		
	α			α			α			α			α		
	0.1	0.05	0.01	0.1	0.05	0.01	0.1	0.05	0.01	0.1	0.05	0.01	0.1	0.05	0.01
5	4.36	6.65	13.59	3.57	4.98	9.04	2.95	3.91	6.56	2.88	3.71	5.88	2.25	2.82	4.30
8	3.52	5.16	9.79	2.79	3.76	6.35	2.53	3.25	5.13	2.21	2.78	4.19	2.17	2.67	3.90
10	3.32	4.83	8.95	2.68	3.58	5.92	2.49	3.19	4.94	2.25	2.81	4.17	2.02	2.47	3.54
15	3.09	4.46	8.01	2.60	3.44	5.54	2.25	2.86	4.33	2.11	2.61	3.80	1.96	2.38	3.35
20	2.98	4.27	7.59	2.48	3.26	5.19	2.24	2.83	4.24	2.04	2.52	3.62	1.93	2.23	3.27
25	2.92	4.18	7.41	2.47	3.25	5.12	2.23	2.81	4.18	2.07	2.55	3.65	1.91	2.31	3.22
30	2.88	4.12	7.25	2.42	3.16	4.97	2.17	2.73	4.04	2.04	2.50	3.57	1.90	2.29	3.17
40	2.84	4.05	7.11	2.39	3.13	4.87	2.17	2.73	4.03	1.99	2.44	3.46	1.89	2.27	3.14
50	2.81	4.01	7.00	2.37	3.09	4.82	2.14	2.69	3.95	2.00	2.45	3.46	1.88	2.26	3.12
60	2.79	3.99	6.94	2.36	3.08	4.78	2.13	2.67	3.91	1.98	2.42	3.42	1.87	2.25	3.09
70	2.78	3.96	6.88	2.35	3.07	4.76	2.13	2.67	3.91	1.98	2.43	3.42	1.87	2.25	3.09
80	2.76	3.93	6.85	2.34	3.06	4.73	2.12	2.66	3.88	1.97	2.41	3.39	1.87	2.24	3.08
90	2.76	3.93	6.84	2.34	3.05	4.72	2.12	2.65	3.87	1.97	2.41	3.40	1.86	2.24	3.08
100	2.75	3.93	6.82	2.33	3.05	4.71	2.12	2.65	3.87	1.97	2.40	3.37	1.86	2.24	3.07

Таблица А.15

Критические значения $h_{1-\alpha}$ для статистики критерия Неймана-Пирсона

k	n																
	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	30	40	50	60	80	100
$\alpha = 0.1$																	
2	2.295	1.687	1.461	1.346	1.276	1.229	1.197	1.172	1.137	1.105	1.076	1.049	1.036	1.028	1.023	1.017	1.014
3	2.507	1.801	1.536	1.400	1.318	1.265	1.226	1.197	1.157	1.120	1.086	1.055	1.041	1.032	1.027	1.020	1.016
4	2.523	1.813	1.545	1.408	1.324	1.270	1.230	1.201	1.160	1.123	1.088	1.056	1.041	1.033	1.027	1.020	1.016
5	2.491	1.801	1.539	1.404	1.323	1.268	1.229	1.200	1.159	1.122	1.088	1.056	1.041	1.033	1.027	1.020	1.016
10	2.311	1.722	1.494	1.373	1.299	1.249	1.213	1.187	1.149	1.114	1.082	1.053	1.039	1.031	1.025	1.019	1.015
20	2.131	1.641	1.443	1.337	1.272	1.227	1.195	1.171	1.137	1.105	1.076	1.049	1.036	1.028	1.024	1.017	1.014
$\alpha = 0.05$																	
2	3.199	2.091	1.712	1.524	1.412	1.340	1.290	1.252	1.200	1.152	1.109	1.070	1.051	1.040	1.033	1.025	1.020
3	3.251	2.142	1.747	1.550	1.434	1.358	1.304	1.265	1.210	1.160	1.114	1.073	1.053	1.042	1.035	1.026	1.020
4	3.130	2.095	1.721	1.533	1.421	1.348	1.296	1.258	1.204	1.156	1.111	1.071	1.052	1.041	1.034	1.025	1.020
5	3.004	2.041	1.690	1.512	1.406	1.337	1.286	1.249	1.197	1.151	1.108	1.069	1.051	1.040	1.033	1.024	1.019
10	2.625	1.865	1.584	1.439	1.351	1.292	1.250	1.218	1.174	1.133	1.096	1.061	1.045	1.036	1.029	1.022	1.017
20	2.334	1.733	1.500	1.379	1.304	1.254	1.218	1.191	1.153	1.117	1.085	1.054	1.040	1.032	1.026	1.019	1.015
$\alpha = 0.01$																	
2	7.052	3.515	2.516	2.062	1.814	1.656	1.550	1.474	1.370	1.278	1.196	1.123	1.090	1.071	1.059	1.043	1.034
3	5.940	3.181	2.354	1.960	1.741	1.599	1.507	1.436	1.340	1.256	1.181	1.114	1.083	1.066	1.054	1.040	1.032
4	5.116	2.887	2.191	1.856	1.667	1.544	1.460	1.397	1.311	1.235	1.166	1.105	1.077	1.060	1.050	1.037	1.029
5	4.582	2.689	2.075	1.781	1.610	1.501	1.424	1.367	1.288	1.219	1.155	1.098	1.072	1.057	1.047	1.035	1.027
10	3.514	2.231	1.803	1.592	1.468	1.388	1.330	1.288	1.228	1.174	1.124	1.079	1.058	1.046	1.038	1.028	1.022
20	2.980	1.962	1.635	1.472	1.376	1.313	1.267	1.234	1.186	1.143	1.102	1.065	1.048	1.038	1.031	1.023	1.019

Таблица А.16

Критические значения $V_{1-\alpha}$ для статистики критерия О’Брайена

k	n															
	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	30	40	50	60	80
$\alpha = 0.1$																
2	1.591	2.466	2.744	2.775	2.784	2.784	2.793	2.796	2.796	2.789	2.780	2.767	2.763	2.753	2.753	2.738
3	1.387	2.085	2.294	2.308	2.313	2.319	2.323	2.326	2.320	2.320	2.321	2.319	2.317	2.311	2.315	2.309
4	1.283	1.889	2.066	2.089	2.095	2.097	2.102	2.099	2.095	2.095	2.093	2.092	2.093	2.088	2.091	2.086
5	1.239	1.776	1.932	1.956	1.963	1.964	1.964	1.967	1.961	1.961	1.957	1.954	1.955	1.951	1.951	1.948
10	1.145	1.520	1.620	1.644	1.650	1.654	1.655	1.656	1.652	1.652	1.648	1.643	1.642	1.639	1.640	1.637
20	1.082	1.355	1.421	1.441	1.447	1.450	1.451	1.451	1.452	1.450	1.446	1.444	1.442	1.439	1.439	1.437
$\alpha = 0.05$																
2	1.686	4.122	3.965	3.852	3.819	3.823	3.826	3.845	3.833	3.832	3.842	3.859	3.862	3.854	3.864	3.856
3	1.509	3.212	3.163	3.068	3.047	3.034	3.035	3.026	3.014	3.008	2.995	2.997	2.995	2.997	2.997	2.995
4	1.407	2.710	2.740	2.692	2.677	2.665	2.662	2.652	2.645	2.634	2.622	2.613	2.612	2.608	2.607	2.608
5	1.356	2.444	2.497	2.467	2.454	2.446	2.439	2.433	2.422	2.413	2.401	2.389	2.388	2.384	2.379	2.378
10	1.236	1.885	1.951	1.956	1.951	1.948	1.944	1.940	1.932	1.926	1.917	1.905	1.900	1.896	1.895	1.890
20	1.156	1.566	1.624	1.636	1.636	1.636	1.633	1.631	1.627	1.623	1.616	1.607	1.603	1.600	1.599	1.596
$\alpha = 0.01$																
2	1.759	13.92	7.186	6.726	6.710	6.571	6.480	6.503	6.422	6.384	6.378	6.419	6.487	6.476	6.509	6.534
3	1.663	8.876	5.551	5.137	5.062	4.983	4.897	4.868	4.778	4.716	4.665	4.607	4.605	4.579	4.606	4.595
4	1.586	6.391	4.603	4.297	4.217	4.157	4.094	4.065	4.012	3.939	3.893	3.849	3.825	3.806	3.809	3.801
5	1.540	5.226	4.064	3.821	3.735	3.693	3.643	3.609	3.564	3.497	3.453	3.400	3.392	3.368	3.352	3.353
10	1.402	3.094	2.840	2.746	2.694	2.657	2.638	2.619	2.591	2.554	2.521	2.484	2.467	2.454	2.446	2.441
20	1.298	2.183	2.138	2.104	2.079	2.068	2.050	2.043	2.024	2.006	1.982	1.958	1.945	1.940	1.932	1.927

Таблица А.17

Нижние критические значения $F_{\alpha/2}$ статистики критерия Линка (отношения размахов)

n_1	n_2	$\alpha = 0.1$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.01$	n_1	n_2	$\alpha = 0.1$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.01$
2	2	0.079	0.039	0.008	9	10	0.551	0.486	0.377
	3	0.314	0.217	0.097		11	0.580	0.514	0.403
	4	0.494	0.377	0.212		12	0.606	0.539	0.427
	5	0.814	0.496	0.309		13	0.628	0.561	0.448
	6	0.724	0.587	0.387		14	0.649	0.581	0.469
	7	0.802	0.660	0.450		15	0.668	0.600	0.484
	8	0.870	0.722	0.505		20	0.743	0.673	0.554
	9	0.924	0.773	0.551	10	2	0.029	0.014	0.003
	10	0.973	0.817	0.591		3	0.137	0.096	0.042
	11	1.014	0.857	0.625		4	0.234	0.183	0.105
	12	1.052	0.889	0.652		5	0.312	0.256	0.166
	13	1.085	0.920	0.680		6	0.375	0.316	0.218
	14	1.115	0.948	0.707		7	0.425	0.365	0.264
	15	1.142	0.974	0.727		8	0.469	0.407	0.304
	20	1.253	1.072	0.813		9	0.505	0.442	0.338
3	2	0.053	0.026	0.005		10	0.537	0.474	0.367
	3	0.229	0.160	0.072		11	0.566	0.502	0.395
	4	0.376	0.290	0.165		12	0.590	0.526	0.417
	5	0.485	0.391	0.249		13	0.613	0.548	0.439
	6	0.572	0.473	0.321		14	0.633	0.568	0.457
	7	0.639	0.537	0.377		15	0.652	0.586	0.474
	8	0.696	0.590	0.427		20	0.726	0.658	0.546

Продолжение таблицы А.17

n_1	n_2	$\alpha = 0.1$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.01$	n_1	n_2	$\alpha = 0.1$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.01$
3	9	0.744	0.636	0.468	11	2	0.028	0.014	0.003
	10	0.785	0.675	0.504		3	0.133	0.093	0.041
	11	0.822	0.709	0.536		4	0.228	0.178	0.103
	12	0.856	0.740	0.562		5	0.305	0.249	0.162
	13	0.883	0.767	0.586		6	0.366	0.309	0.214
	14	0.909	0.791	0.609		7	0.416	0.357	0.259
	15	0.932	0.813	0.630		8	0.458	0.399	0.299
	20	1.028	0.902	0.708		9	0.494	0.434	0.331
4	2	0.043	0.022	0.004		10	0.525	0.465	0.360
	3	0.195	0.137	0.060		11	0.553	0.491	0.387
	4	0.325	0.252	0.143		12	0.578	0.516	0.408
	5	0.426	0.345	0.220		13	0.600	0.538	0.431
	6	0.503	0.419	0.286		14	0.620	0.556	0.449
	7	0.567	0.480	0.342		15	0.638	0.574	0.467
	8	0.619	0.530	0.387		20	0.711	0.645	0.536
	9	0.663	0.572	0.425	12	2	0.027	0.014	0.003
	10	0.702	0.609	0.460		3	0.129	0.091	0.040
	11	0.735	0.641	0.491		4	0.223	0.174	0.100
	12	0.765	0.669	0.517		5	0.298	0.244	0.158
	13	0.792	0.696	0.542		6	0.358	0.302	0.209
	14	0.817	0.717	0.561		7	0.407	0.350	0.254
	15	0.839	0.740	0.580		8	0.449	0.390	0.292
	20	0.926	0.823	0.658		9	0.484	0.425	0.325

Продолжение таблицы А.17

n_1	n_2	$\alpha = 0.1$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.01$	n_1	n_2	$\alpha = 0.1$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.01$
5	2	0.038	0.019	0.004	12	10	0.515	0.455	0.353
	3	0.175	0.123	0.055		11	0.542	0.482	0.381
	4	0.296	0.229	0.132		12	0.567	0.507	0.404
	5	0.389	0.317	0.203		13	0.589	0.528	0.424
	6	0.462	0.386	0.264		14	0.608	0.547	0.442
	7	0.522	0.444	0.317		15	0.626	0.565	0.461
	8	0.572	0.492	0.363		20	0.698	0.635	0.527
	9	0.614	0.532	0.401	13	2	0.027	0.013	0.003
	10	0.651	0.568	0.432		3	0.126	0.089	0.040
	11	0.682	0.598	0.462		4	0.219	0.170	0.098
	12	0.711	0.625	0.486		5	0.292	0.240	0.155
	13	0.736	0.650	0.511		6	0.352	0.297	0.205
	14	0.759	0.672	0.531		7	0.399	0.343	0.250
	15	0.780	0.693	0.552		8	0.441	0.384	0.287
	20	0.864	0.773	0.625		9	0.476	0.418	0.321
6	2	0.035	0.017	0.004		10	0.507	0.448	0.349
	3	0.162	0.114	0.051		11	0.533	0.474	0.375
	4	0.276	0.214	0.123		12	0.557	0.498	0.397
	5	0.365	0.297	0.191		13	0.579	0.519	0.418
	6	0.434	0.364	0.250		14	0.598	0.538	0.436
	7	0.491	0.419	0.301		15	0.616	0.556	0.452
	8	0.540	0.465	0.343		20	0.687	0.625	0.521

n_1	n_2	$\alpha = 0.1$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.01$	n_1	n_2	$\alpha = 0.1$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.01$
6	9	0.579	0.504	0.380	14	2	0.026	0.013	0.003
	10	0.615	0.539	0.412		3	0.124	0.087	0.039
	11	0.645	0.568	0.441		4	0.215	0.168	0.097
	12	0.673	0.595	0.466		5	0.287	0.236	0.153
	13	0.698	0.618	0.489		6	0.345	0.291	0.203
	14	0.719	0.639	0.509		7	0.393	0.338	0.245
	15	0.740	0.659	0.527		8	0.434	0.377	0.284
	20	0.821	0.737	0.600		9	0.468	0.412	0.316
7	2	0.033	0.016	0.003		10	0.498	0.441	0.344
	3	0.153	0.108	0.048		11	0.525	0.467	0.370
	4	0.262	0.204	0.116		12	0.548	0.491	0.392
	5	0.347	0.283	0.183		13	0.570	0.512	0.413
	6	0.414	0.348	0.240		14	0.589	0.531	0.430
	7	0.469	0.401	0.289		15	0.607	0.548	0.448
	8	0.516	0.446	0.331		20	0.677	0.616	0.513
	9	0.554	0.483	0.366	15	2	0.026	0.013	0.003
	10	0.589	0.517	0.397		3	0.122	0.086	0.038
	11	0.618	0.546	0.426		4	0.211	0.165	0.095
	12	0.646	0.572	0.450		5	0.282	0.232	0.150
	13	0.669	0.596	0.473		6	0.340	0.286	0.199
	14	0.691	0.617	0.494		7	0.387	0.333	0.242
	15	0.710	0.635	0.512		8	0.427	0.372	0.279
	20	0.789	0.711	0.583		9	0.461	0.405	0.312

Продолжение таблицы А.17

n_1	n_2	$\alpha = 0.1$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.01$	n_1	n_2	$\alpha = 0.1$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.01$
8	2	0.031	0.016	0.003	15	10	0.491	0.435	0.340
	3	0.146	0.103	0.046		11	0.517	0.460	0.365
	4	0.251	0.195	0.112		12	0.541	0.483	0.386
	5	0.333	0.273	0.177		13	0.562	0.504	0.407
	6	0.398	0.335	0.231		14	0.580	0.524	0.426
	7	0.452	0.387	0.280		15	0.599	0.541	0.443
	8	0.497	0.430	0.320		20	0.668	0.610	0.508
	9	0.534	0.467	0.356	20	2	0.024	0.012	0.002
	10	0.568	0.500	0.385		3	0.114	0.080	0.036
	11	0.597	0.528	0.415		4	0.197	0.154	0.089
	12	0.623	0.554	0.437		5	0.265	0.218	0.141
	13	0.647	0.577	0.460		6	0.319	0.270	0.188
	14	0.668	0.597	0.478		7	0.364	0.314	0.229
	15	0.687	0.616	0.498		8	0.402	0.351	0.263
	20	0.764	0.691	0.566		9	0.435	0.383	0.295
9	2	0.030	0.015	0.003		10	0.463	0.411	0.321
	3	0.141	0.099	0.044		11	0.488	0.436	0.347
	4	0.242	0.188	0.108		12	0.511	0.459	0.368
	5	0.321	0.263	0.171		13	0.531	0.479	0.388
	6	0.386	0.325	0.225		14	0.550	0.497	0.404

Окончание таблицы А.17

n_1	n_2	$\alpha = 0.1$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.01$	n_1	n_2	$\alpha = 0.1$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.01$
9	7	0.438	0.375	0.271	20	15	0.566	0.513	0.421
	8	0.481	0.418	0.311		20	0.633	0.579	0.486
	9	0.519	0.454	0.346					

Таблица А.18

Верхние критические значения $F_{1-\alpha/2}$ статистики критерия Линка (отношения размахов)

n_1	n_2	$\alpha = 0.1$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.01$	n_1	n_2	$\alpha = 0.1$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.01$
2	2	12.65	25.29	130.3	9	10	1.980	2.258	2.955
	3	19.07	38.01	193.3		11	2.025	2.308	3.008
	4	23.12	46.30	234.9		12	2.068	2.353	3.067
	5	26.16	52.36	265.0		13	2.103	2.392	3.116
	6	28.68	57.12	289.4		14	2.135	2.430	3.158
	7	30.45	61.17	306.1		15	2.169	2.467	3.204
	8	32.16	64.25	323.6		20	2.299	2.611	3.380
	9	33.52	66.98	335.8	10	2	1.029	1.226	1.695
	10	34.63	69.16	350.6		3	1.275	1.484	1.988
	11	35.84	71.49	360.8		4	1.428	1.647	2.188
	12	36.73	73.45	372.4		5	1.541	1.767	2.317
	13	37.73	75.14	382.0		6	1.629	1.861	2.421
	14	38.47	76.94	386.4		7	1.700	1.937	2.516
	15	39.16	78.20	393.0		8	1.762	2.002	2.603
	20	42.01	84.17	422.4		9	1.818	2.065	2.670

Продолжение таблицы А.18

n_1	n_2	$\alpha = 0.1$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.01$	n_1	n_2	$\alpha = 0.1$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.01$
3	2	3.188	4.604	10.40	10	10	1.860	2.109	2.731
	3	4.362	6.242	14.16		11	1.907	2.161	2.783
	4	5.153	7.344	16.56		12	1.944	2.201	2.839
	5	5.703	8.145	18.31		13	1.979	2.236	2.872
	6	6.160	8.800	19.71		14	2.012	2.271	2.925
	7	6.532	9.306	20.88		15	2.040	2.303	2.952
	8	6.865	9.758	21.93		20	2.160	2.434	3.117
	9	7.138	10.15	22.71	11	2	0.985	1.169	1.604
	10	7.358	10.48	23.40		3	1.218	1.411	1.866
	11	7.555	10.75	24.20		4	1.362	1.562	2.029
	12	7.757	11.07	24.75		5	1.467	1.672	2.159
	13	7.927	11.28	25.26		6	1.549	1.761	2.266
	14	8.082	11.49	25.57		7	1.617	1.832	2.352
	15	8.238	11.70	26.24		8	1.677	1.893	2.413
	20	8.828	12.55	28.03		9	1.726	1.949	2.483
4	2	2.023	2.653	4.763		10	1.770	1.994	2.536
	3	2.663	3.452	6.058		11	1.808	2.034	2.584
	4	3.070	3.964	6.942		12	1.844	2.071	2.635
	5	3.380	4.353	7.600		13	1.878	2.109	2.668
	6	3.632	4.670	8.131		14	1.907	2.142	2.710
	7	3.822	4.917	8.549		15	1.934	2.169	2.741
	8	3.984	5.113	8.913		20	2.047	2.294	2.884
	9	4.139	5.312	9.213	12	2	0.951	1.126	1.528
	10	4.263	5.470	9.481		3	1.172	1.354	1.782

n_1	n_2	$\alpha = 0.1$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.01$	n_1	n_2	$\alpha = 0.1$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.01$
4	11	4.383	5.627	9.733	12	4	1.309	1.496	1.936
	12	4.486	5.738	9.960		5	1.409	1.601	2.057
	13	4.582	5.874	10.18		6	1.487	1.682	2.144
	14	4.658	5.973	10.37		7	1.551	1.751	2.222
	15	4.742	6.070	10.54		8	1.605	1.808	2.291
	20	5.061	6.488	11.19		9	1.654	1.859	2.353
5	2	1.599	2.022	3.236	12	10	1.694	1.899	2.390
	3	2.058	2.557	4.050		11	1.735	1.945	2.441
	4	2.353	2.906	4.538		12	1.768	1.979	2.480
	5	2.570	3.160	4.926		13	1.797	2.013	2.522
	6	2.747	3.367	5.226		14	1.826	2.041	2.554
	7	2.894	3.534	5.477		15	1.853	2.067	2.579
	8	3.004	3.662	5.698		20	1.960	2.184	2.712
	9	3.108	3.802	5.885	13	2	0.922	1.088	1.474
	10	3.201	3.910	6.077		3	1.135	1.305	1.705
	11	3.285	4.015	6.190		4	1.265	1.440	1.854
	12	3.363	4.108	6.312		5	1.361	1.541	1.962
	13	3.425	4.180	6.461		6	1.435	1.617	2.047
	14	3.490	4.251	6.565		7	1.497	1.682	2.120
	15	3.550	4.331	6.662		8	1.546	1.732	2.183
	20	3.778	4.612	7.077		9	1.593	1.783	2.225
6	2	1.381	1.708	2.580		10	1.633	1.827	2.283
	3	1.750	2.113	3.120		11	1.668	1.860	2.315
	4	1.986	2.388	3.505		12	1.701	1.898	2.358

Продолжение таблицы А.18

n_1	n_2	$\alpha = 0.1$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.01$	n_1	n_2	$\alpha = 0.1$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.01$
6	5	2.160	2.584	3.774	13	13	1.729	1.926	2.394
	6	2.301	2.746	3.989		14	1.759	1.959	2.428
	7	2.413	2.876	4.174		15	1.783	1.983	2.463
	8	2.510	2.981	4.298		20	1.885	2.089	2.578
	9	2.591	3.081	4.446	14	2	0.896	1.056	1.420
	10	2.664	3.165	4.576		3	1.100	1.264	1.646
	11	2.736	3.244	4.686		4	1.227	1.392	1.781
	12	2.793	3.308	4.775		5	1.319	1.489	1.883
	13	2.847	3.367	4.837		6	1.391	1.567	1.966
	14	2.896	3.429	4.962		7	1.449	1.625	2.032
	15	2.942	3.479	5.009		8	1.500	1.678	2.088
	20	3.131	3.705	5.315		9	1.542	1.722	2.148
7	2	1.244	1.513	2.213		10	1.581	1.763	2.189
	3	1.565	1.867	2.647		11	1.616	1.801	2.229
	4	1.767	2.085	2.924		12	1.645	1.831	2.259
	5	1.916	2.254	3.148		13	1.673	1.860	2.293
	6	2.034	2.386	3.317		14	1.700	1.886	2.320
	7	2.130	2.497	3.454		15	1.725	1.913	2.351
	8	2.214	2.587	3.562		20	1.819	2.012	2.467
	9	2.284	2.666	3.674	15	2	0.875	1.029	1.375
	10	2.348	2.733	3.761		3	1.074	1.232	1.586
	11	2.406	2.801	3.854		4	1.193	1.350	1.717
	12	2.457	2.859	3.922		5	1.282	1.444	1.818
	13	2.504	2.914	3.995		6	1.353	1.519	1.894

n_1	n_2	$\alpha = 0.1$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.01$	n_1	n_2	$\alpha = 0.1$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.01$
7	14	2.543	2.956	4.045	15	7	1.409	1.574	1.956
	15	2.584	3.003	4.109		8	1.457	1.625	2.010
	20	2.745	3.188	4.364		9	1.500	1.668	2.059
8	2	1.150	1.387	1.979		10	1.535	1.706	2.105
	3	1.438	1.694	2.342		11	1.570	1.742	2.141
	4	1.616	1.887	2.586		12	1.598	1.769	2.173
	5	1.751	2.034	2.759		13	1.624	1.802	2.206
	6	1.857	2.151	2.909		14	1.651	1.827	2.238
	7	1.940	2.241	3.015		15	1.673	1.849	2.259
	8	2.014	2.324	3.105		20	1.767	1.948	2.366
	9	2.076	2.391	3.195	20	2	0.798	0.932	1.230
	10	2.134	2.458	3.282		3	0.974	1.110	1.409
	11	2.183	2.511	3.346		4	1.081	1.217	1.516
	12	2.229	2.562	3.419		5	1.158	1.295	1.600
	13	2.267	2.606	3.474		6	1.218	1.356	1.665
	14	2.311	2.651	3.526		7	1.270	1.408	1.718
	15	2.341	2.685	3.570		8	1.310	1.449	1.762
	20	2.485	2.843	3.782		9	1.347	1.486	1.801
9	2	1.080	1.297	1.818		10	1.379	1.521	1.840
	3	1.345	1.573	2.134		11	1.410	1.551	1.866
	4	1.510	1.749	2.337		12	1.433	1.573	1.899

Окончание таблицы А.18

n_1	n_2	$\alpha = 0.1$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.01$	n_1	n_2	$\alpha = 0.1$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.01$
9	5	1.633	1.881	2.509	20	13	1.455	1.598	1.923
	6	1.725	1.986	2.629		14	1.479	1.622	1.944
	7	1.806	2.067	2.724		15	1.498	1.642	1.964
	8	1.870	2.141	2.814		20	1.580	1.727	2.057
	9	1.927	2.200	2.885					

Т а б л и ц а А . 1 9

Нижние критические значения $q_{\alpha/2}$ статистики критерия Ньюмана (стьюдентизированного размаха)

n_1	$f = n_2 - 1$							
	2	5	10	15	20	30	40	60
$\alpha = 0.1$								
2	0.101	0.094	0.091	0.090	0.090	0.089	0.089	0.089
3	0.437	0.433	0.434	0.433	0.433	0.432	0.432	0.432
4	0.718	0.739	0.750	0.752	0.755	0.756	0.757	0.758
5	0.928	0.978	1.002	1.011	1.015	1.020	1.022	1.025
6	1.093	1.168	1.206	1.221	1.227	1.236	1.241	1.244
7	1.224	1.321	1.374	1.394	1.405	1.416	1.422	1.429
8	1.332	1.451	1.515	1.539	1.554	1.568	1.576	1.585
9	1.425	1.560	1.634	1.664	1.682	1.701	1.710	1.720
10	1.503	1.656	1.742	1.775	1.796	1.816	1.829	1.839
11	1.571	1.738	1.833	1.874	1.894	1.918	1.930	1.945
12	1.635	1.813	1.915	1.959	1.984	2.009	2.023	2.040
13	1.690	1.879	1.991	2.037	2.064	2.092	2.110	2.126
14	1.739	1.939	2.057	2.107	2.136	2.168	2.186	2.204
15	1.784	1.995	2.118	2.174	2.204	2.238	2.256	2.277
16	1.826	2.047	2.176	2.232	2.264	2.303	2.323	2.343
17	1.864	2.092	2.228	2.288	2.323	2.361	2.382	2.404

n_1	$f = n_2 - 1$							
	2	5	10	15	20	30	40	60
$\alpha = 0.1$								
18	1.903	2.135	2.277	2.340	2.375	2.417	2.438	2.463
19	1.935	2.177	2.322	2.386	2.425	2.467	2.490	2.516
20	1.967	2.214	2.363	2.433	2.471	2.516	2.541	2.566
$\alpha = 0.05$								
2	0.050	0.047	0.046	0.045	0.045	0.045	0.045	0.045
3	0.305	0.304	0.304	0.304	0.304	0.304	0.305	0.304
4	0.554	0.574	0.584	0.587	0.589	0.590	0.592	0.593
5	0.748	0.798	0.822	0.830	0.835	0.841	0.842	0.844
6	0.905	0.979	1.019	1.033	1.041	1.048	1.053	1.058
7	1.029	1.128	1.183	1.202	1.214	1.225	1.233	1.238
8	1.130	1.255	1.322	1.346	1.363	1.376	1.384	1.394
9	1.217	1.359	1.438	1.470	1.488	1.507	1.518	1.527
10	1.291	1.453	1.545	1.579	1.602	1.623	1.637	1.649
11	1.356	1.536	1.634	1.677	1.700	1.726	1.740	1.755
12	1.416	1.606	1.715	1.761	1.789	1.817	1.833	1.849
13	1.468	1.670	1.790	1.840	1.868	1.900	1.919	1.936
14	1.514	1.730	1.856	1.910	1.942	1.976	1.996	2.016
15	1.556	1.784	1.917	1.977	2.010	2.047	2.066	2.087

n_1	$f = n_2 - 1$							
	2	5	10	15	20	30	40	60
$\alpha = 0.05$								
16	1.598	1.833	1.975	2.033	2.069	2.113	2.134	2.156
17	1.633	1.880	2.026	2.089	2.129	2.172	2.193	2.219
18	1.669	1.921	2.073	2.142	2.181	2.226	2.250	2.278
19	1.700	1.960	2.117	2.189	2.231	2.278	2.303	2.330
20	1.728	1.995	2.158	2.234	2.277	2.328	2.354	2.382
$\alpha = 0.01$								
2	0.010	0.009	0.009	0.009	0.009	0.009	0.009	0.009
3	0.136	0.135	0.135	0.135	0.135	0.135	0.135	0.135
4	0.314	0.328	0.336	0.338	0.338	0.340	0.341	0.340
5	0.474	0.515	0.535	0.538	0.544	0.546	0.548	0.550
6	0.614	0.676	0.710	0.723	0.730	0.735	0.738	0.743
7	0.722	0.811	0.860	0.878	0.886	0.900	0.903	0.909
8	0.820	0.932	0.993	1.017	1.030	1.041	1.051	1.061
9	0.898	1.032	1.103	1.136	1.152	1.171	1.182	1.192
10	0.966	1.116	1.205	1.242	1.262	1.284	1.296	1.307
11	1.027	1.195	1.294	1.338	1.360	1.388	1.401	1.415
12	1.078	1.266	1.372	1.421	1.448	1.475	1.492	1.511
13	1.126	1.326	1.447	1.498	1.529	1.563	1.580	1.596

Окончание таблицы А.19

n_1	$f = n_2 - 1$							
	2	5	10	15	20	30	40	60
$\alpha = 0.01$								
14	1.168	1.384	1.510	1.568	1.598	1.636	1.656	1.676
15	1.206	1.432	1.570	1.634	1.667	1.706	1.728	1.752
16	1.244	1.481	1.626	1.695	1.727	1.774	1.797	1.822
17	1.275	1.525	1.679	1.746	1.786	1.832	1.856	1.886
18	1.307	1.565	1.726	1.798	1.840	1.886	1.915	1.945
19	1.337	1.601	1.767	1.845	1.886	1.940	1.968	1.999
20	1.362	1.634	1.807	1.887	1.934	1.990	2.020	2.051

Таблица А.20

Верхние критические значения $q_{1-\alpha/2}$ статистики критерия Ньюмана (стьюдентизированного размаха)

n_1	$f = n_2 - 1$							
	2	5	10	15	20	30	40	60
$\alpha = 0.1$								
2	6.076	3.636	3.147	3.015	2.953	2.891	2.858	2.828
3	8.314	4.604	3.877	3.675	3.578	3.487	3.442	3.401
4	9.818	5.223	4.327	4.076	3.958	3.843	3.789	3.737

n_1	$f = n_2 - 1$							
	2	5	10	15	20	30	40	60
$\alpha = 0.1$								
5	10.89	5.674	4.653	4.367	4.231	4.103	4.040	3.979
6	11.74	6.035	4.910	4.596	4.449	4.302	4.230	4.164
7	12.42	6.332	5.124	4.779	4.623	4.466	4.390	4.314
8	13.05	6.587	5.304	4.941	4.767	4.601	4.521	4.441
9	13.59	6.795	5.459	5.081	4.898	4.723	4.635	4.551
10	14.01	6.993	5.596	5.199	5.008	4.826	4.735	4.645
11	14.40	7.172	5.720	5.306	5.111	4.916	4.823	4.731
12	14.77	7.320	5.826	5.404	5.204	4.999	4.903	4.807
13	15.08	7.466	5.933	5.493	5.282	5.074	4.975	4.877
14	15.40	7.593	6.027	5.577	5.357	5.149	5.042	4.940
15	15.69	7.717	6.105	5.649	5.427	5.209	5.105	4.999
16	15.92	7.823	6.195	5.721	5.494	5.270	5.161	5.055
17	16.15	7.927	6.264	5.787	5.553	5.331	5.215	5.105
18	16.40	8.030	6.329	5.849	5.607	5.377	5.266	5.151
19	16.60	8.121	6.402	5.899	5.663	5.427	5.313	5.196
20	16.80	8.206	6.465	5.958	5.714	5.473	5.356	5.240

n_1	$f = n_2 - 1$							
	2	5	10	15	20	30	40	60
$\alpha = 0.05$								
2	8.787	4.481	3.723	3.529	3.425	3.338	3.293	3.251
3	11.91	5.555	4.476	4.185	4.049	3.920	3.858	3.801
4	14.02	6.263	4.941	4.588	4.429	4.271	4.199	4.122
5	15.54	6.777	5.286	4.884	4.699	4.527	4.442	4.359
6	16.76	7.192	5.553	5.121	4.916	4.718	4.626	4.537
7	17.72	7.519	5.781	5.313	5.093	4.882	4.780	4.682
8	18.62	7.815	5.970	5.464	5.242	5.019	4.911	4.805
9	19.35	8.062	6.136	5.617	5.370	5.133	5.018	4.912
10	20.01	8.287	6.283	5.736	5.476	5.237	5.119	5.004
11	20.49	8.492	6.410	5.849	5.582	5.329	5.209	5.085
12	21.10	8.666	6.524	5.943	5.678	5.413	5.288	5.161
13	21.52	8.814	6.642	6.038	5.760	5.484	5.359	5.229
14	21.94	8.973	6.736	6.122	5.839	5.562	5.423	5.295
15	22.33	9.107	6.824	6.200	5.909	5.621	5.482	5.350
16	22.68	9.247	6.915	6.275	5.971	5.679	5.543	5.403
17	23.01	9.366	6.995	6.341	6.037	5.742	5.595	5.454
18	23.29	9.480	7.059	6.408	6.095	5.792	5.645	5.500
19	23.67	9.580	7.141	6.462	6.146	5.838	5.692	5.541
20	23.93	9.675	7.215	6.521	6.199	5.884	5.734	5.585

n_1	$f = n_2 - 1$							
	2	5	10	15	20	30	40	60
$\alpha = 0.01$								
2	19.89	6.758	5.056	4.646	4.460	4.280	4.205	4.118
3	27.00	8.171	5.892	5.327	5.068	4.840	4.732	4.627
4	31.60	9.167	6.397	5.750	5.468	5.179	5.055	4.927
5	35.11	9.872	6.792	6.069	5.733	5.420	5.281	5.142
6	37.57	10.43	7.095	6.308	5.939	5.619	5.464	5.313
7	39.83	10.88	7.357	6.517	6.131	5.778	5.616	5.450
8	41.77	11.23	7.566	6.685	6.272	5.911	5.738	5.570
9	43.44	11.59	7.771	6.843	6.418	6.026	5.846	5.675
10	44.74	11.93	7.932	6.966	6.528	6.136	5.933	5.749
11	46.33	12.21	8.078	7.091	6.640	6.226	6.024	5.835
12	47.07	12.49	8.200	7.173	6.737	6.307	6.100	5.901
13	48.11	12.64	8.334	7.289	6.829	6.379	6.179	5.975
14	48.93	12.90	8.459	7.393	6.902	6.459	6.244	6.044
15	50.25	13.04	8.553	7.464	6.978	6.519	6.299	6.083
16	50.92	13.32	8.689	7.552	7.052	6.581	6.351	6.140
17	51.71	13.43	8.780	7.614	7.107	6.646	6.406	6.194
18	52.50	13.57	8.848	7.688	7.178	6.694	6.457	6.232
19	53.00	13.75	8.958	7.768	7.232	6.740	6.505	6.282
20	53.56	13.83	9.011	7.811	7.284	6.787	6.549	6.314

Таблица А.21

Критические значения c_α критерия Блисса-Кокрена-Тьюки

k	n											
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20
$\alpha = 0.1$												
2	0.927	0.814	0.755	0.720	0.697	0.681	0.668	0.658	0.650	0.639	0.626	0.613
3	0.723	0.618	0.563	0.531	0.510	0.495	0.484	0.476	0.468	0.457	0.446	0.434
4	0.588	0.496	0.449	0.421	0.403	0.390	0.381	0.373	0.367	0.358	0.348	0.337
5	0.506	0.418	0.375	0.350	0.334	0.323	0.315	0.308	0.303	0.294	0.286	0.277
6	0.442	0.361	0.322	0.300	0.286	0.276	0.268	0.262	0.258	0.250	0.243	0.235
7	0.395	0.318	0.283	0.263	0.250	0.241	0.234	0.229	0.225	0.218	0.211	0.204
8	0.356	0.284	0.252	0.234	0.223	0.214	0.208	0.203	0.200	0.194	0.187	0.181
9	0.325	0.258	0.228	0.203	0.201	0.193	0.187	0.183	0.180	0.174	0.169	0.163
10	0.299	0.236	0.208	0.193	0.183	0.176	0.171	0.167	0.163	0.158	0.153	0.148
$\alpha = 0.05$												
2	0.962	0.862	0.799	0.759	0.733	0.714	0.699	0.688	0.678	0.664	0.649	0.633
3	0.782	0.663	0.602	0.565	0.541	0.523	0.510	0.500	0.491	0.478	0.465	0.451
4	0.641	0.535	0.480	0.448	0.427	0.413	0.401	0.392	0.385	0.374	0.363	0.351
5	0.553	0.451	0.401	0.373	0.354	0.341	0.332	0.324	0.318	0.308	0.298	0.288
6	0.483	0.389	0.344	0.319	0.303	0.291	0.283	0.276	0.270	0.262	0.253	0.244
7	0.433	0.343	0.302	0.280	0.265	0.255	0.247	0.241	0.236	0.228	0.221	0.213
8	0.390	0.307	0.269	0.249	0.235	0.226	0.219	0.214	0.209	0.203	0.196	0.188
9	0.357	0.278	0.243	0.224	0.212	0.204	0.197	0.192	0.188	0.182	0.176	0.169
10	0.328	0.254	0.228	0.204	0.193	0.185	0.179	0.175	0.171	0.166	0.160	0.154

k	n											
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20
$\alpha = 0.01$												
2	0.992	0.936	0.874	0.831	0.800	0.776	0.757	0.743	0.732	0.713	0.693	0.673
3	0.884	0.750	0.678	0.632	0.600	0.578	0.561	0.548	0.537	0.520	0.503	0.484
4	0.775	0.616	0.545	0.504	0.476	0.457	0.443	0.432	0.423	0.408	0.394	0.379
5	0.701	0.525	0.457	0.420	0.396	0.379	0.366	0.356	0.349	0.336	0.324	0.311
6	0.635	0.453	0.392	0.359	0.338	0.323	0.312	0.304	0.297	0.286	0.275	0.264
7	0.578	0.401	0.344	0.314	0.295	0.282	0.273	0.265	0.259	0.250	0.240	0.230
8	0.525	0.358	0.306	0.279	0.262	0.251	0.242	0.235	0.230	0.221	0.213	0.204
9	0.479	0.324	0.276	0.252	0.236	0.225	0.217	0.211	0.206	0.199	0.191	0.183
10	0.438	0.295	0.251	0.229	0.215	0.205	0.198	0.192	0.188	0.181	0.174	0.166

Таблица А.22

Критические значения $K_{1-\alpha}$ критерия Кадуэлла–Лесли–Брауна

k	n											
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20
$\alpha = 0.1$												
2	12.67	4.363	3.074	2.569	2.302	2.130	2.014	1.928	1.860	1.766	1.672	1.581
3	25.54	6.544	4.151	3.295	2.855	2.589	2.408	2.280	2.181	2.038	1.902	1.771
4	40.09	8.374	4.975	3.823	3.249	2.907	2.679	2.517	2.394	2.217	2.052	1.894
5	55.60	10.01	5.659	4.245	3.557	3.154	2.889	2.698	2.556	2.354	2.164	1.985
6	71.60	11.47	6.259	4.605	3.818	3.359	3.061	2.846	2.691	2.464	2.256	2.058
7	88.32	12.84	6.801	4.929	4.050	3.539	3.211	2.974	2.805	2.557	2.333	2.120
8	105.4	14.12	7.281	5.211	4.250	3.695	3.338	3.085	2.903	2.639	2.399	2.173
9	123.0	15.33	7.727	5.466	4.430	3.836	3.455	3.186	2.991	2.712	2.457	2.219
10	140.9	16.51	8.150	5.703	4.595	3.966	3.561	3.277	3.071	2.778	2.511	2.261
$\alpha = 0.05$												
2	25.34	6.239	3.964	3.157	2.747	2.495	2.324	2.201	2.110	1.977	1.848	1.727
3	51.66	9.377	5.348	4.034	3.389	3.008	2.762	2.588	2.457	2.265	2.090	1.924
4	81.16	11.97	6.389	4.661	3.839	3.368	3.062	2.844	2.686	2.457	2.248	2.050
5	112.4	14.30	7.273	5.170	4.202	3.646	3.291	3.041	2.862	2.600	2.364	2.144
6	145.2	16.42	8.035	5.606	4.500	3.879	3.481	3.203	3.007	2.718	2.459	2.218

k	n											
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20
$\alpha = 0.05$												
7	178.7	18.39	8.713	5.990	4.763	4.077	3.645	3.344	3.128	2.817	2.539	2.282
8	213.3	20.24	9.312	6.326	4.994	4.258	3.787	3.464	3.232	2.904	2.610	2.337
9	249.1	22.03	9.878	6.634	5.201	4.413	3.915	3.571	3.327	2.982	2.670	2.384
10	285.6	23.69	10.42	6.912	5.393	4.554	4.034	3.671	3.411	3.050	2.726	2.4272
$\alpha = 0.01$												
2	127.2	14.05	6.961	4.924	3.994	3.456	3.114	2.888	2.727	2.478	2.259	2.058
3	259.9	21.06	9.341	6.242	4.876	4.139	3.657	3.359	3.135	2.807	2.524	2.266
4	408.8	26.94	11.09	7.172	5.498	4.596	4.031	3.670	3.401	3.025	2.697	2.400
5	567.2	32.31	12.62	7.914	5.985	4.965	4.324	3.902	3.605	3.187	2.823	2.498
6	733.8	37.07	13.92	8.580	6.398	5.256	4.560	4.089	3.770	3.322	2.925	2.580
7	902.3	41.35	15.18	9.157	6.769	5.511	4.772	4.260	3.916	3.434	3.018	2.646
8	1081.0	45.69	16.24	9.654	7.072	5.743	4.945	4.408	4.041	3.533	3.093	2.703
9	1257.6	49.78	17.21	10.12	7.363	5.947	5.101	4.539	4.146	3.617	3.160	2.751
10	1449.9	53.51	18.09	10.58	7.613	6.124	5.251	4.657	4.247	3.695	3.221	2.797

Таблица А.23

Критические значения $Z_{1-\alpha}$ критерия Оверолла–Вудворда

k	n													
	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	30	40	50
$\alpha = 0.1$														
2	2.633	2.752	2.783	2.793	2.786	2.778	2.781	2.773	2.767	2.749	2.742	2.731	2.734	2.726
3	2.073	2.244	2.303	2.325	2.329	2.336	2.338	2.339	2.330	2.329	2.325	2.319	2.316	2.312
4	1.863	2.003	2.061	2.087	2.097	2.106	2.106	2.108	2.105	2.103	2.101	2.097	2.094	2.091
5	1.737	1.865	1.920	1.942	1.956	1.961	1.962	1.966	1.962	1.962	1.961	1.959	1.958	1.953
10	1.472	1.562	1.603	1.623	1.634	1.640	1.642	1.645	1.645	1.645	1.643	1.642	1.639	1.638
20	1.299	1.378	1.409	1.424	1.434	1.438	1.440	1.442	1.444	1.443	1.443	1.440	1.440	1.438
$\alpha = 0.05$														
2	3.233	3.555	3.694	3.763	3.790	3.804	3.817	3.834	3.830	3.828	3.841	3.840	3.850	3.849
3	2.437	2.723	2.851	2.911	2.944	2.962	2.973	2.991	2.989	2.995	2.998	3.007	3.002	3.000
4	2.159	2.371	2.477	2.528	2.558	2.576	2.584	2.594	2.598	2.607	2.611	2.612	2.610	2.608
5	1.991	2.176	2.262	2.305	2.334	2.353	2.355	2.366	2.369	2.375	2.380	2.380	2.381	2.379
10	1.652	1.756	1.809	1.839	1.856	1.868	1.872	1.880	1.884	1.888	1.890	1.888	1.888	1.886
20	1.430	1.508	1.542	1.560	1.573	1.580	1.585	1.589	1.592	1.595	1.595	1.594	1.593	1.592

Окончание таблицы А.23

k	*n*													
	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	30	40	50
$\alpha = 0.01$														
2	4.114	4.997	5.473	5.746	5.917	6.029	6.104	6.217	6.290	6.368	6.447	6.499	6.548	6.562
3	3.218	3.715	3.977	4.141	4.256	4.323	4.368	4.418	4.459	4.501	4.528	4.567	4.580	4.593
4	2.787	3.150	3.345	3.455	3.536	3.590	3.629	3.671	3.693	3.724	3.745	3.771	3.773	3.775
5	2.577	2.837	2.987	3.073	3.137	3.178	3.210	3.237	3.262	3.279	3.305	3.309	3.323	3.323
10	2.058	2.180	2.245	2.291	2.321	2.340	2.357	2.371	2.383	2.397	2.407	2.413	2.410	2.410
20	1.772	1.797	1.826	1.846	1.862	1.874	1.880	1.888	1.893	1.904	1.907	1.908	1.911	1.910

Т а б л и ц а А . 24

Критические значения $Z_{1-\alpha}$ модифицированного Z–критерия Оверолла–Вудворда

k	n																
	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	30	40	50	60	80	100
$\alpha = 0.1$																	
2	0.267	1.233	2.161	2.643	2.857	2.938	2.977	2.983	2.951	2.891	2.821	2.739	2.701	2.667	2.658	2.629	2.616
3	0.210	0.975	1.699	2.100	2.288	2.376	2.422	2.433	2.425	2.397	2.353	2.296	2.267	2.247	2.241	2.222	2.211
4	0.189	0.845	1.461	1.814	1.987	2.075	2.124	2.138	2.142	2.128	2.096	2.058	2.037	2.022	2.018	2.003	1.999
5	0.176	0.769	1.319	1.639	1.802	1.885	1.931	1.953	1.965	1.960	1.938	1.910	1.895	1.881	1.876	1.866	1.863
10	0.149	0.606	1.018	1.262	1.398	1.476	1.520	1.548	1.572	1.582	1.581	1.573	1.567	1.561	1.562	1.556	1.554
20	0.132	0.511	0.845	1.047	1.163	1.232	1.274	1.302	1.332	1.349	1.359	1.362	1.362	1.361	1.361	1.359	1.358
$\alpha = 0.05$																	
2	0.328	1.935	3.492	4.210	4.478	4.546	4.553	4.542	4.435	4.288	4.142	3.976	3.898	3.839	3.818	3.765	3.729
3	0.247	1.385	2.460	3.011	3.250	3.335	3.375	3.369	3.315	3.245	3.154	3.044	2.995	2.959	2.945	2.916	2.892
4	0.219	1.130	1.995	2.465	2.684	2.773	2.820	2.828	2.808	2.760	2.696	2.617	2.581	2.558	2.542	2.522	2.508
5	0.202	0.990	1.738	2.148	2.356	2.440	2.490	2.507	2.499	2.468	2.425	2.370	2.339	2.316	2.305	2.291	2.281
10	0.168	0.721	1.231	1.528	1.686	1.771	1.820	1.848	1.864	1.866	1.856	1.834	1.821	2.051	1.810	1.801	1.795
20	0.145	0.578	0.964	1.197	1.329	1.403	1.449	1.478	1.506	1.520	1.525	1.521	1.518	1.516	1.514	1.511	1.509

k	n																
	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	30	40	50	60	80	100
$\alpha = 0.01$																	
2	0.418	4.943	8.067	9.240	9.541	9.491	9.240	9.131	8.646	8.160	7.651	7.185	6.976	6.804	6.751	6.642	6.542
3	0.327	2.793	4.863	5.710	6.006	6.063	5.984	5.917	5.694	5.423	5.181	4.875	4.750	4.657	4.623	4.566	4.508
4	0.283	2.025	3.547	4.272	4.573	4.655	4.639	4.612	4.495	4.324	4.145	3.952	3.853	3.795	3.768	3.717	3.682
5	0.262	1.651	2.893	3.528	3.789	3.883	3.907	3.905	3.819	3.700	3.569	3.422	3.362	3.313	3.286	3.247	3.222
10	0.209	1.018	1.754	2.171	2.371	2.482	2.522	2.546	2.545	2.509	2.463	2.409	2.377	2.355	2.342	2.329	2.312
20	0.180	0.745	1.241	1.536	1.698	1.789	1.832	1.866	1.888	1.889	1.876	1.856	1.844	1.839	1.831	1.828	1.823